

А. А. АНДРОНОВ и С. Э. ХАЙКИН

А. А. АНДРОНОВ и С. Э. ХАЙКИН — ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОКТИ НКТП СССР 1937

А. А. АНДРОНОВ и С. Э. ХАЙКИН

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

С ПРЕДИСЛОВИЕМ АКАД. Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА

Цена 14 р. 50 к. Перепл. 1 р. 50 к.

-7086-

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТН СССР

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

T 43-5-2

TKK № 78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вряд ли есть в настоящее время необходимость специально обосновывать важное значение колебательных процессов в современной физике и технике. Можно без преувеличения сказать, что нет почти области в этих науках, в которых колебания не играли бы той или иной роли, не говоря уже о том, что ряд областей физики и техники всецело базируется на колебательных явлениях. Достаточно, например, указать на область электромагнитных колебаний, включающую в себя и оптику, на учение о звуке, на радиотехнику и прикладную акустику.

Общность колебательных процессов, их разнообразие и в то же время их специфическое своеобразие, играют существенную роль в установлении внутренних связей между весьма разнородными, на первый взгляд, явлениями. Этим обстоятельством, как мне кажется, и обуславливается, главным образом, принципиальное значение и важность интересующей нас области.

Весьма существенно следующее: в области колебаний особенно отчетливо выступает взаимодействие между физикой и математикой, влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на наши физические знания. Несомненно, что в развитии таких математических проблем, как дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, в частности краевые задачи, разложение произвольных функций по ортогональным функциям и т. п., физические запросы сыграли не последнюю роль. Но и обратно, также несомненно, что только благодаря развитию этих математических дисциплин сделалось возможным углубленное понимание основных физических колебательных явлений.

До сравнительно недавнего времени интерес физиков, а также и техников, главным образом, хотя и не исключительно, был сосредоточен на „линейных“ колебательных задачах, т. е. на таких, математическая формулировка которых приводила к линейным дифференциальным уравнениям, обыкновенным, или в частных производных.

Относящийся сюда математический аппарат прекрасно разработан. Целый ряд результатов теории выкристаллизовался в определенную систему понятий и весьма общих положений. Благодаря тому, что физики этими понятиями и положениями постоянно оперируют, применяя их к конкретным задачам, они приобрели уже, если так можно выразиться, физическую наглядность. Для физика такое понятие, как логарифмический декремент, значение его в явлениях

резонанса, такие принципы, как принцип суперпозиции и связанное с ним разложение в ряд Фурье, и вообще, спектральный подход, наличие n гармонических колебаний в системе с n степенями свободы, несомненно являются не только отвлеченными математическими понятиями и положениями; они связаны для него неразрывно с комплексом физических явлений. И это обстоятельство имеет существенное значение: оно дает возможность физику, как бы инстинктивно, почти без вычислений, разбираться в сравнительно сложных вопросах, легко обнаруживать связь между разнородными явлениями, и наконец, имеет, и это может быть самое важное, большую эвристическую силу.

Но в последнее время, в ряде вопросов физики и техники выдвинулся новый класс колебательных проблем, для которых аппарат линейной теории колебаний оказался или недостаточным или даже совершенно неприменимым.

Существенную роль в привлечении интереса к проблемам нового рода сыграло введение электронных ламп, открывшее новые, весьма целесообразные пути в вопросах, как генерации, так и приема электромагнитных колебаний. Чрезвычайно важное применение получили эти новые явления в радиотехнике. Все те громадные успехи, которые были ею достигнуты в наше время, стали возможными только благодаря электронным лампам. Но и физика приобрела исключительно ценное, часто незаменимое орудие исследования. Для всестороннего охвата всех относящихся сюда разнообразнейших явлений, а также большого числа важных интересных явлений в акустике и механике, математический аппарат линейных дифференциальных уравнений абсолютно недостаточен. В его рамки заведомо не укладываются как раз те явления, которые здесь наиболее характерны и интересны. Дело в том, что дифференциальные уравнения, которые адекватным образом описывают эти явления, заведомо нелинейны. Сообразно с этим, мы говорим о „нелинейных“ системах.

Довольно естественно, что, особенно в начале, было известное стремление, трактуя эти новые, хотя явно и нелинейные, проблемы, по возможности не слишком удаляться от столь привычной линейной терминологии и столь же привычных линейных математических методов, приспособляя их так или иначе к новым обстоятельствам. При этом приходилось добавлять придуманные дополнения, без чего, нельзя было, конечно, получить нужных ответов.

Такое „линеаризирование“ всегда искусственно, редко бывает полезным, большей частью вообще ничему не научает, а иногда и прямо вредно. И действительно, в литературе известны ошибочные утверждения, вошедшие даже в учебники, обусловленные таким незаконным линеаризированием.

Другой путь для овладения нелинейными проблемами, о которых идет речь, состоит в том, что каждая конкретная проблема трактуется уже, как нелинейная, но индивидуально, с применением того или иного, наиболее к ней подходящего, метода и с учетом ее специфических особенностей. Этот путь, конечно, сам по себе правилен. Идя по нему, ряд исследователей получил весьма ценные результаты,

сохранившие все свое значение и в настоящее время. Сюда в первую очередь нужно отнести работы Ван-дер-Поля, сыгравшие существенную роль в развитии интересующей нас области. И в настоящее время иногда удобно, в том или ином случае, идти по этому пути.

Но не говоря уже о том, что фактически такие решения отдельных задач не имели достаточного математического обоснования, весь этот путь в качестве, так сказать, большой дороги, вряд ли целесообразен, так как он не ведет к установлению тех общих точек зрения, той базы, как математической, так и физической, которая необходима для достаточно полного и всестороннего охвата области нелинейных колебаний, в известной нам уже ее части, и, что еще важнее, для успешного дальнейшего планомерного развития.

А между тем, основы математического аппарата, адекватного не только отдельным задачам, но и всему циклу проблем нелинейных колебаний, которые нас интересуют, существуют давно. Они заложены в знаменитых работах Пуанкаре и Ляпунова, работах, преследовавших, правда, совершенно другие цели. На связь этих работ с нашими проблемами колебаний впервые обратил внимание один из авторов настоящей книги. Исследования авторов, несомненно сыграли весьма существенную роль в приспособлении этого аппарата для изучения колебательных проблем. Ими же были применены эти методы для решения целого ряда новых конкретных задач. Их же работами подведена солидная математическая база и под результаты других авторов, результаты, как уже сказано, весьма ценные, но разрозненные и до этих пор такой базы не имевшие.

Таким образом основы необходимого общего математического аппарата существуют. Аппарат этот существенно труднее и сложнее, чем линейный, и это лежит в природе вещей. Физические процессы, охватываемые им, значительно сложнее и разнообразнее линейных процессов, являющихся лишь весьма узким частным случаем. Нужно сказать, что в настоящее время нелинейный аппарат еще гораздо менее разработан, чем линейный, и конечно гораздо менее привычен. Но много уже сделано, общие черты теории, которые дают направление дальнейшему развитию, существуют, существует и рабочий аппарат, дающий возможность планомерно решать ряд конкретных задач нелинейной теории колебаний.

Дальнейшее естественное развитие общей теории на этой базе будет способствовать, по-моему мнению, тому, что и в сложной области нелинейных колебаний, еще в большей мере, чем это уже имеет место сейчас, выкристаллизуются свои специфические общие понятия, положения и методы, которые войдут в обиход физика, сделаются привычными и наглядными и позволяют ему разбираться в сложной совокупности явлений, и дадут мощное эвристическое оружие для новых исследований.

Физик, интересующийся современными проблемами колебаний, должен, по-моему мнению, уже теперь участвовать в продвижении по этому пути. Он должен овладеть уже существующими математи-

ческими методами и приемами, лежащими в основе этих проблем и научиться их применять.

Известным препятствием служило до сих пор почти полное отсутствие¹ в нашей и, насколько я знаю, и в заграничной литературе, соответственного систематического изложения общих основ теории нелинейных колебаний и их физических применений, рассчитанного на физиков. Настоящая книга стремится заполнить этот пробел. Основная цель ее — ввести читателя в круг идей, лежащих в основе теории нелинейных колебаний и ее применений. Центр тяжести изложения лежит, сообразно с этим, не в решении возможно большего количества отдельных задач, а в выяснении основных положений и основных методов, адекватных для области нелинейных колебаний в целом. Это, конечно, не значит, что в книге не уделено достаточного внимания конкретным проблемам. Наоборот, разбору таких проблем, и в первую очередь проблем, с которыми физику и технику постоянно приходится иметь дело, уделяется довольно много места. Но эти проблемы рассматриваются под углом зрения общих положений, они являются примерами и иллюстрациями применения общих методов. Иногда, для выяснения той или другой стороны теоретических рассуждений, авторы пользуются несколько искусственными примерами, но зато выпукло оттеняющими эти рассуждения.

Изложение авторов, базирующееся, как было упомянуто, на работах Пуанкаре и Ляпунова, обладает одной весьма положительной чертой: в математической трактовке физических проблем часто бывает так, что цепь математических рассуждений, связывающая исходные уравнения с окончательными результатами, допускающими физическую интерпретацию, весьма длинна, причем отдельные ее звенья такой интерпретации не поддаются. Авторы удачно сумели воспользоваться тем обстоятельством, что излагаемые ими методы позволяют придать физический смысл и отдельным звеньям этой цепи. Это значительно оживляет теорию и облегчает ее усвоение.

В вопросах принципиальных, авторы, там где это целесообразно, выходят из рамок собственной темы. Сюда относятся, например, довольно подробный интересный разбор вопросов идеализации физических проблем, вопросы, связанные с ролью начальных условий; сюда же может быть отнесен ряд рассуждений, относящихся к так называемым релаксационным колебаниям.

Достаточно обстоятельно излагаются методы т. н. качественного интегрирования, дающие ряд ценных указаний относительно протекания колебательных процессов. По моему мнению, авторы поступают правильно, иллюстрируя эти методы на хорошо известных и привычных случаях линейных систем, где, конечно, применимы более простые, прямые методы. Важному вопросу о существовании периодических решений, уделено соответственное внимание. Детально изложены вопросы, относящиеся к проблемам с „малой“ нелиней-

¹ Лишь недавно вышла оригинальная монография акад. Я. М. Крылова и д-ра Н. Н. Боголюбова „Новые методы нелинейной механики“, ОНТИ, 1935.

ностью, проблемам, имеющим, в расчетном смысле, чрезвычайно важное значение. Подробно разобран вопрос об устойчивости.

Все эти проблемы рассмотрены применительно к наиболее простому случаю системы с одной степенью свободы без внешней силы (т. е. автономные системы). То же относится и к разобранным в книге конкретным задачам и примерам. Эти вопросы изложены с большой полнотой; но читатель не найдет в книге ни задач, связанных с воздействием внешней силы, ни задач, относящихся к системам с несколькими степенями свободы и к системам с распределенными параметрами. Между тем все эти проблемы несомненно важны и интересны. Однако, если принять во внимание, как велик объем всего материала, относящегося к нелинейным колебаниям, с одной стороны, и основную цель книги — ввести читателя в круг общих идей и методов — с другой, то выбор авторов станет понятным. Автономные системы с одной степенью свободы — наиболее простые системы, и они в то же время являются теми элементами, которые лежат в известном смысле в основе всех более сложных систем.

Теоретический аппарат, необходимый для рассмотрения этих последних, базируется на тех общих положениях, которые изложены здесь и представляют собой его дальнейшее развитие. Таким образом, хотя в настоящей книге разобран сравнительно узкий цикл вопросов, но по существу она является введением в общую теорию нелинейных колебаний.

Я не сомневаюсь, что свежая и оригинальная книга, предлагаемая вниманию читателя, будет ценным вкладом в нашу литературу по колебаниям. Следует пожелать, чтобы авторы продолжили свой труд и на основе изложенной здесь общей теории дали бы в дальнейших томах разбор и тех проблем, которые в настоящую книгу не вошли.

Л. Мандельштам.

ОТ АВТОРОВ

Настоящая книга представляет собой попытку систематического изложения той части обширного материала по теории нелинейных колебаний, которая относится к автономным системам с одной степенью свободы¹.

Для того, чтобы подготовить читателя к новым, еще не привычным представлениям, мы считали необходимым применить в некотором смысле концентрическое изложение. Именно, некоторые существенные вопросы затрагивались в элементарном изложении в вводных главах (например исследование особых точек, теорема Коши и т. д.) и затем — тот же материал, в развернутом виде, систематически излагался вторично.

Мы отчетливо себе представляем, что такой способ изложения привел к увеличению и так значительного объема книги, но мы все же считали нужным это сделать, так как надеялись, что этот способ облегчит чтение книги физику и инженеру.

Мы должны признать, что, несмотря на значительный объем книги, она все же не может претендовать на исчерпывающую полноту, так как к сожалению в ней не нашел себе места ряд вопросов, имеющих существенный интерес. Именно, в книге не изложена важная работа Льенара, посвященная исследованию автоколебаний по геометрическим свойствам характеристики, не приведены ряд важных физических иллюстраций к уравнениям Ван-дер-Поля и Рэля, не рассмотрены поучительные примеры применения качественной теории дифференциальных уравнений к динамике аэроплана и баллистике, не дана теория династронного генератора.

Некоторые другие вопросы — например статистическое рассмотрение динамических систем — изложены чрезвычайно конспективно и должны рассматриваться только как введение в изучение оригинальных работ. Заметим, что в настоящей книге, при исследовании разрывных колебаний, мы часто пользовались постулатом непрерывности энергии при скачке. Хотя в тексте было указано, что этот прием не является общим, и были рассмотрены примеры скачков, при которых непрерывность энергии не соблюдается, вопрос о выводе условий скачка в общем случае был оставлен открытым. В самое последнее время, когда печатание книги уже заканчивалось, нам удалось получить ответ на этот вопрос и на некоторые другие вопросы (в частности —

¹ Мы намеряем выпустить дальнейшие части этой книги, посвященные неавтономным системам с одной степенью свободы, дискретным системам со многими степенями свободы и распределенным системам.

дать общую теорию бифуркаций), о которых в книге говорится, как о вопросах, ожидающих решения.

В аналогичном положении книга находится по отношению к ряду исследований других авторов, которые были закончены во время печатания настоящей книги и которые имеют прямое отношение к материалу книги (теория рейс-диаграмм (Безменов), теория автоколебаний синхронных машин (Власов) и некоторые другие).

В заключение мы считаем необходимым подчеркнуть исключительную роль Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси в развитии физики нелинейных колебаний. Вместе с тем мы пользуемся случаем выразить им здесь еще раз признательность за интерес и внимание к нашей работе и за целый ряд весьма ценных советов и указаний.

Мы считаем также своим приятным долгом выразить благодарность за помощь при работе над книгой и, в особенности, за указание ряда недосмотров при чтении корректур Б. А. Введенскому (Ленинград), Г. С. Горелику (Москва), Е. А. Леонтович (Горький), А. Г. Майеру (Горький).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

| | |
|--------------------|---|
| Введение | 1 |
|--------------------|---|

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

| | |
|---|----|
| 1. Линейная система без трения | 19 |
| 2. Понятие о фазовой плоскости, представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости | 22 |
| 1. Фазовая плоскость (22). — 2. Уравнение, не содержащее времени (24). — 3. Особые точки. Центр (24). — 4. Изожнии (25). — 5. Состояние равновесия и периодические движения. (27). | |
| 3. Устойчивость состояния равновесия | 28 |
| 4. Линейный осциллятор при наличии трения | 31 |
| 1. Затухающий осцилляторный процесс (32). — 2. Изображение затухающего осцилляторного процесса на фазовой плоскости (34). — 3. Уравнение фазовых траекторий в полярных координатах (36). — 4. Непосредственное исследование дифференциального уравнения (38). — 5. Затухающий аперриодический процесс (42). — 6. Изображение аперриодического процесса на фазовой плоскости (44). | |
| 5. Вырожденная линейная система | 49 |
| 1. Полное и укороченные уравнения (49). — 2. Связь с начальными условиями (54). — 3. Условия скачка (55). — 4. Паразитные параметры (60). | |
| 6. Линейные системы с „отрицательным трением“ | 63 |
| 1. Механический пример (64). — 2. Электрический пример (67). — 3. Картина на фазовой плоскости (69). — 4. Поведение системы при изменении обратной связи (73). | |
| 7. Линейная система с отталкивающей силой | 76 |
| 1. Картина на фазовой плоскости (77). — 2. Электрическая модель (79). | |

ГЛАВА II

КОНСЕРВАТИВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

| | |
|---|-----|
| 1. Введение | 87 |
| 2. Простейшая консервативная система | 88 |
| 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия | 93 |
| 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости | 102 |
| 5. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра | 108 |
| 1. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси (112). — 2. Движение тяжелой точки по параболе, вращающейся вокруг вертикальной оси (114). — 3. Прямолинейное движение точки по прямой, отталкиваемой вблизи начала координат, обратно пропорционально кубу расстояния и притягиваемой вдали от начала координат обратно пропорционально квадрату расстояния (119). — 4. Движение проводника, обтекаемого током (121). | |
| 6. Уравнения движения | 125 |
| 1. Уравнения Гамильтона (126). — 2. Интегральный инвариант (127). — 3. Колебательный контур с железом (130). — 4. Колебательный контур с сегнетовой солью в конденсаторе (133). | |

7. Периодические движения в консервативных системах 136
 1. Общие свойства консервативных систем (138). — 2. Консервативные системы и вариационный принцип (144). — 3. Основные свойства консервативных систем (144). — 4. Пример. Совместное существование двух видов (147).

ГЛАВА III

НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Введение 151
 2. Диссипативные системы —
 3. Постоянное трение 156
 4. Ламповый генератор в случае $_ | _$ характеристики 164
 5. Теория часов 177
 1. Часы в случае линейного трения (179). — 2. Часы в случае постоянного трения (181).
 6. Свойства простейших автоколебательных систем 193
 7. Предварительное рассмотрение автоколебаний близких к синусоидальным 194

ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОДНИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Введение 203
 2. Теорема существования и единственности 204
 3. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий 208
 4. Качественный характер кривых на плоскости x, t в зависимости от вида функции $f(x)$ —
 5. Представление движения на фазовой прямой 209
 6. Устойчивость состояния равновесия 212
 7. Зависимость характера движений от параметра 216
 1. Вольтова дуга в цепи с сопротивлением и самовидущей (217). — 2. Однофазный асинхронный мотор (219).
 8. „Разрывные“ движения 221
 9. Механические разрывные колебания 226
 10. Колебания в схеме с неоновой лампой 236
 11. Схемы с электронными лампами 245
 12. Вольтова дуга, включенная параллельно с емкостью 251

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДВУМЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Введение 256
 2. Теорема существования 257
 1. Теорема существования (теорема Коши) (258). — 2. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений (258).
 3. Линейные системы общего типа 259
 4. Пример „универсальная схема“ 268
 5. Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия 272
 1. Случай действительных корней характеристического уравнения (273). — 2. Случай комплексных корней характеристического уравнения (278).
 6. Пример — состояния равновесия в цепи вольтовой дуги 279
 7. Периодические движения и их устойчивость 285
 8. Предельные циклы и автоколебания 292
 9. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация 294

| | |
|--|-----|
| 10. „Особенные“ и „грубые“ системы. Характер возможных траекторий в грубых системах | 305 |
| 11. Индексы Пуанкаре | 322 |
| 12. Зависимость качественной картины траекторий от параметра | 327 |
| 13. Системы без замкнутых траекторий | 346 |
| 14. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости | 356 |
| 15. Оценка месторасположения предельных циклов | 366 |
| 16. Приближенные методы интегрирования | 370 |
| 17. „Разрывные“ колебания в системах с одной степенью свободы, описываемых двумя уравнениями первого порядка | 376 |
| 18. Системы с двумя степенями свободы, описываемые двумя уравнениями первого ряда | 392 |
| 1. Схема Фрühгауфа (393). — 2. Схема Хеогнера (399). — 3. Мультивибратор Абрагама-Блока (401). | |
| 19. Малые параметры и паразитные степени свободы | 406 |

ГЛАВА VI

СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

| | |
|---|-----|
| 1. Цилиндрическое фазовое пространство | 421 |
| 2. Консервативные системы, отображаемые на цилиндре | 423 |
| 3. Неконсервативная система | 427 |

ГЛАВА VII

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

| | |
|--|-----|
| 1. Метод ван-дер-Поля | 435 |
| 2. Обоснование метода ван-дер-Поля для процессов установления | 443 |
| 3. Применение метода ван-дер-Поля | 448 |
| 1. Ламповый генератор при мягком режиме (448). — 2. Ламповый генератор при жестком режиме (452). | |
| 4. Метод Пуанкаре | 455 |
| 1. Идея метода Пуанкаре (456). — 2. Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным (458). | |
| 5. Применение метода Пуанкаре | 467 |
| 1. Ламповый генератор с мягким режимом (467). — Значение малого параметра μ (470). | |
| 6. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик | 471 |
| 7. Влияние сеточного тока на работу лампового генератора | 476 |
| 8. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе | 479 |
| 9. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора | 481 |
| 1. Мягкое возникновение колебаний (482). — 2. Жесткое возникновение колебаний (484). | |

ГЛАВА VIII

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

| | |
|--|-----|
| 1. Введение | 488 |
| 2. Случайные „скачки“ | 489 |
| 3. Случайные начальные условия | 490 |

Дополнение

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 1. Электронная лампа | 493 |
| 2. Катодный осциллограф | 508 |
| Литература | 514 |

ВВЕДЕНИЕ

При всяком теоретическом исследовании какой-либо реальной физической системы мы всегда вынуждены в большей или меньшей степени идеализировать свойства описываемой системы. Известная идеализация задачи всегда неизбежна; при описании системы нужно учесть основные решающие факторы, определяющие те именно черты поведения системы, которые нас в данное время интересуют, и отнюдь не следует стремиться точно учесть все без исключения ее свойства. Это последнее вообще неосуществимо; но если бы нам даже и удалось учесть значительную часть этих свойств, то задача получилась бы столь сложной, что решение ее было бы чрезвычайно затруднено или даже вовсе невозможно.

Поскольку идеализация задачи всегда неизбежна, прежде всего возникает вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении, до какой степени можно идеализировать свойства системы и все же получить удовлетворительные результаты. Ответ на этот вопрос может дать в конечном счете только опыт. Только сопоставляя те ответы, которые дает на тот или иной вопрос наше идеализированное рассмотрение, с результатами опыта, мы можем судить, законна ли та или иная идеализация.

Это заключение конечно справедливо лишь в том случае, когда теоретическое рассмотрение нашей идеализированной схемы проведено вполне строго¹⁾. Только в этом случае мы можем считать расхождение теории и опыта бесспорным доказательством недостаточности исходной идеализации и необходимости учесть какие-то новые свойства системы для объяснения наблюдаемых явлений.

Следует подчеркнуть, что указания о допустимости той или иной идеализации могут быть получены не только из сравнения результатов теоретического рассмотрения с данными опыта, но и из сопоставления результатов двух различных теорий, одна из которых развита с использованием данной идеализации, а другая — без этой идеализации. Поскольку первая теория развита после пренебрежения известными обстоятельствами, а вторая, наоборот, с учетом тех же самых обстоятельств, то, сопоставляя результаты обеих теорий, мы получаем непосредственные указания о том, какую роль играют эти обстоятельства для

¹⁾ Заметим, что строгая теория отнюдь не значит — теория, дающая точные количественные ответы на поставленные вопросы. Строгая теория может давать приближенные количественные ответы (например может оценить амплитуду колебательного процесса при помощи неравенств) и может делать качественные высказывания (например — о существовании периодических движений).

решения того или иного вопроса. Постепенно мы накапливаем опыт и развиваем свою интуицию в этом отношении и научаемся все лучше и лучше «угадывать», что важно и что не важно для решения рассматриваемого круга вопросов. Убедившись тем или иным путем в том, что для решения данного вопроса известное обстоятельство играет второстепенную роль, мы в дальнейшем распространяем полученный результат и на другие, аналогичные задачи сначала пренебрегая этими обстоятельствами, а затем проверяя законность этих пренебрежений на опыте.

Характер идеализаций, допустимых при рассмотрении той или иной задачи, определяется всей *задачей в целом* и зависит поэтому не только от свойств рассматриваемой системы, но и от того на какие именно вопросы мы хотим получить ответ при рассмотрении задачи.

Так, например, рассмотрим систему, состоящую из стального шарика, падающего вертикально на горизонтальную стальную доску. Если нас интересует движение шарика как целого, то мы, вообще говоря, не совершим большой ошибки, если будем считать при теоретическом рассмотрении, что шарик — это материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести, скорость которой при достижении доски мгновенно меняет свой знак. Если же нас интересуют те упругие напряжения, которые возникают в шарике при ударе, то само собою разумеется, что мы уже не можем рассматривать шарик как материальную точку; шарик приходится идеализировать как упругое тело с определенными константами, характеризующими свойства стали, приходится учитывать характер деформаций, время соударения и т. д. Подобный же пример можно было бы привести и из теории электрических систем, где могут быть случаи, когда для ответа на одни вопросы можно считать емкость и самоиндукцию сосредоточенными, а для ответа на другие вопросы (относящиеся к той же системе) — распределенными.

Аналогично, если нас интересует вопрос о движении (свободных колебаниях) маятника в течение некоторого небольшого промежутка времени и если трение, испытываемое маятником, невелико, то мы можем отказаться от учета сил трения. Однако эта же идеализация не позволит нам получить правильный ответ на вопрос о движении маятника в течение большого промежутка времени, так как движение маятника затухает. Точно так же при рассмотрении вопроса о вынужденных колебаниях маятника под действием гармонической внешней силы, мы можем не учитывать трения в системе, если нас интересует область, далекая от резонанса. Вблизи резонанса та же идеализация (пренебрежение трением) лишает нас возможности получить правильный ответ на вопрос об амплитуде вынужденных (установившихся) колебаний, так как при резонансе эта амплитуда существенно зависит от величины трения. Таким образом одна и та же идеализация может быть и «допустимой» и «недопустимой», вернее либо целесообразной, либо нецелесообразной, в зависимости от того, на какие вопросы мы хотим получить ответ.

Допустимость той или иной идеализации зависит и от тех количественных соотношений, которые характеризуют данную задачу. Напри-

мер, в нашем примере с маятником можно пренебречь трением только при условии, что трение достаточно мало и время, в течение которого мы изучаем движение маятника, также не слишком велико. Но когда мы говорим «мало» или «велико», то это имеет смысл только тогда, когда мы указываем, по сравнению с какой другой величиной мала или велика данная величина. И в нашем примере мы должны потребовать, чтобы показатель затухания был мал по сравнению с частотой колебаний (или логарифмический декремент затухания был мал по сравнению с единицей) и чтобы время наблюдения было не слишком велико по сравнению с периодом колебаний. Только при подобных формулировках можно считать вполне исчерпывающими такие количественные характеристики, как «мал» и «велик».

Однако когда приступают к изучению задачи, часто бывает трудно сказать наперед, с какой именно величиной нужно сравнивать данную величину. Тогда применяют количественные характеристики, не указывая, по сравнению с чем именно мала или велика данная величина. В таком случае характеристики теряют свою строгость, но все же сохраняют известный смысл, который подсказывается нашими знаниями о данном круге явлений. И поэтому даже такие расплывчатые количественные характеристики все же могут дать нам известные указания о характере допустимой идеализации и во всяком случае о том, в каком направлении следует делать попытки в смысле идеализации задачи. Так, например, с точки зрения «средних человеческих масштабов» наблюдение за явлением в течение одной минуты — это еще «не слишком долго». С другой стороны, тысячная доля секунды — это «очень быстро». Поэтому мы часто говорим, что колебания маятника затухают «медленно», а колебания в электрическом колебательном контуре высокой частоты затухают «быстро», даже если декремент затухания контуров очень мал и близок к декременту затухания в маятнике. И эти утверждения «мал» и «велик» хотя и не имеют, строго говоря, точного содержания, все же оказывают влияние на то, какие именно идеализации обычно применяются к той и другой задаче. В то время как задача о собственных колебаниях механических систем рассматривается обычно (по крайней мере сначала) без учета трения, при исследовании вопроса о собственных колебаниях в электрическом колебательном контуре почти всегда сразу принимают во внимание омическое сопротивление контура. Таким образом казалось бы лишние содержания характеристики «мал» и «велик» (без указания по сравнению с чем) все же толкают нас к выбору определенных идеализаций. При дальнейшем рассмотрении эти характеристики «мал» и «велик» приобретают вполне определенное содержание: становится ясным, по сравнению с чем именно должна быть мала или велика данная величина. Мы тоже иногда будем начинать рассмотрение с таких неопределенных предположений «мал» или «велик» без указаний по сравнению с чем, но из дальнейшего рассмотрения смысл этих утверждений всегда будет выясняться.

Во всяком физическом рассмотрении, и в частности в нашем дальнейшем изложении, вопрос о характере идеализации играет весьма существенную роль; поэтому мы прежде всего должны выяс-

нить, какого именно характера идеализации приходится применять при рассмотрении колебательных систем. Во-первых, эти идеализации связаны с числом величин, определяющих состояние системы (например координат и скоростей), и, во-вторых, с выбором законов, связывающих эти состояния или скорости изменений состояний и устанавливающих зависимости между ними. В эти зависимости, которые в большинстве рассматриваемых случаев можно выразить в виде тех или иных дифференциальных уравнений, обычно входит некоторое число постоянных параметров, характеризующих систему. Например, для обычного электрического контура в простейшем случае величинами, определяющими состояние системы, служат заряд и ток, а постоянными параметрами — самоиндукция, емкость и сопротивление. Связь между величинами, характеризующими состояние системы, определяется некоторым дифференциальным уравнением, в которое постоянные параметры или их комбинации входят в качестве коэффициентов. При переходе к более сложным случаям мы получим новые дифференциальные уравнения, имеющие, вообще говоря, совсем иной вид, но очень часто оказывается возможным привести эти новые уравнения к такому же виду, какой имеют уравнения для системы с постоянными параметрами. Однако вместо постоянных параметров в этом случае в уравнении будут стоять некоторые переменные величины, например некоторые функции от величин зарядов и сил токов. Имея в виду связь новых уравнений с прежними, мы будем эти переменные величины, характеризующие свойства системы, иногда называть параметрами, хотя они уже и не являются постоянными величинами. В этом условном смысле мы и будем говорить о переменных параметрах. Для этих новых переменных параметров мы сохраним те же названия, которые применяются для постоянных параметров, например, будем говорить о переменном сопротивлении и переменной самоиндукции. Необходимо, однако, иметь в виду, что мы тем самым вводим новые определения этих параметров; причем эти определения, вообще говоря, могут не совпадать с прежними, принятыми нами для постоянных параметров. Таким образом идеализация, относящаяся к выбору законов, связывающих состояния и скорости изменения состояний, сводится в конечном счете к известным допущениям относительно вида тех функций, которые мы назвали переменными параметрами системы.

Идеализация, связанная с числом величин, определяющих состояние системы, приводит в конечном счете к представлению о том или ином числе степеней свободы системы. Сейчас мы будем рассматривать системы, к которым целесообразно применять идеализацию, приводящую к одной степени свободы. Конечно, всякая реальная система, с точки зрения классической физики обладает не одной, а весьма большим числом степеней свободы. Например, следуя обычным молекулярным представлениям, мы должны были бы считать, что всякая механическая система имеет очень большое число степеней свободы, равное сумме степеней свободы всех отдельных молекул, из которых состоит система. Однако в целом ряде случаев можно отвлечься от молекулярного строения вещества и рассматривать систему как сплошную. В этом случае мы

заменяем *очень большое* число степеней свободы *бесконечно большим* числом степеней свободы и приходим к уравнениям в частных производных. В других случаях оказывается, что для описания интересующих нас вопросов достаточно ввести в рассмотрение всего лишь одну или несколько степеней свободы. Мы приходим, с одной стороны, к представлениям о сплошной системе, обладающей бесконечно большим числом степеней свободы, а с другой стороны, к представлениям о дискретных системах, обладающих конечным числом степеней свободы. И в частности, рассматривая определенный класс систем и ограничиваясь определенным кругом вопросов, мы можем пользоваться представлением о системе с одной степенью свободы. Например, массу m на пружинке (рис. 1) мы только в том случае сможем рассматривать как систему с одной степенью свободы, если откажемся от учета влияния массы пружинки (что имеет смысл только, если масса пружинки гораздо меньше массы m) и будем считать тело m абсолютно жестким (что имеет смысл только, если тело m гораздо более жестко, чем пружинка). Кроме того, конечно, мы должны рассмотреть ограничение движением этого тела только в одном вертикальном направлении. Это последнее ограничение имеет смысл только при условии, что колебания массы m в вертикальном направлении не вызывают раскачивания ее как маятника, раскачивания, которое неизбежно появляется при известных соотношениях между параметрами системы. Наши допущения в реальной системе, конечно, не могут быть строго соблюдены. В действительности пружина обладает массой, а тело m обладает упругостью, но мы идеализируем задачу и отказываемся от рассмотрения тела и пружины как сплошных систем (систем с распределенными параметрами). Вследствие этой идеализации мы лишаемся возможности ответить на вопросы о движении отдельных частиц тела m и пружинки; но если, с одной стороны, тело m достаточно жестко и масса его достаточно велика по сравнению с массой пружинки, а с другой стороны, начальные условия совместимы с нашими допущениями, именно в начальный момент сама масса m отклонена от положения равновесия в вертикальном направлении или ей сообщена некоторая начальная скорость тоже только в вертикальном направлении, то мы при допущенной идеализации задачи все же можем удовлетворительно ответить на вопрос о движении всей массы m в целом. И в том случае, когда нас интересует вопрос о движении системы при таких ее свойствах и таких начальных условиях, было бы просто нецелесообразно учитывать какие-либо другие свойства системы, кроме наличия массы m и упругости пружинки. Но несколько иную задачу, отличающуюся от только что рассмотренной лишь характером начальных условий, мы уже не в состоянии будем решить, применяя прежнюю идеализацию. Пусть, например, сначала пружина растянута силой, приложенной в точке b (рис. 1), и в момент $t=0$ мы эту силу устраняем. Такое начальное состояние несовместимо с принятой нами идеализацией, которая позволила нам

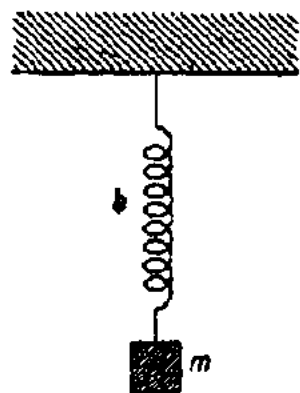


Рис. 1.

рассматривать всю систему как обладающую одной степенью свободы. Мы могли бы, конечно, задать не силу в точке b , а любое начальное распределение деформаций в пружине, отличное от того, которое получается, если сила приложена к массе m . Всякое такое распределение было бы несовместимо с нашей идеализацией. Оставаясь при прежней идеализации и не делая каких-либо новых допущений, мы не в состоянии ответить на вопрос о характере движения системы при таких начальных условиях. Этот пример иллюстрирует высказанное

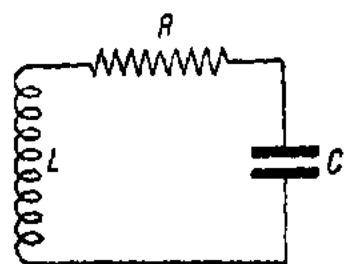


Рис. 2.

выше общее положение. Мы видим, что допустимая идеализация в отношении числа величин, определяющих состояние системы (в частности числа степеней свободы системы) зависит не только от свойств самой системы, но и от характера тех начальных условий, которые заданы, и содержания тех вопросов, на которые нужно ответить, — словом, зависит от характера той задачи, которая нам поставлена.

Точно так же обычный электрический контур, обладающий емкостью, самоиндукцией и сопротивлением (рис. 2), мы можем рассматривать как систему с одной степенью свободы, только при том условии, что не будем учитывать, например, емкостей, которыми обладают отдельные витки катушки самоиндукции один по отношению к другому, провода между собой и т. д. Но несмотря на эту идеализацию мы сможем достаточно точно ответить на основной интересующий нас вопрос о законе изменений напряжения на обкладках конденсатора, если начальные условия таковы, что заданы напряжение на обкладках конденсатора и ток во всей катушке самоиндукции. Однако допущенная нами идеализация лишает нас возможности отве-

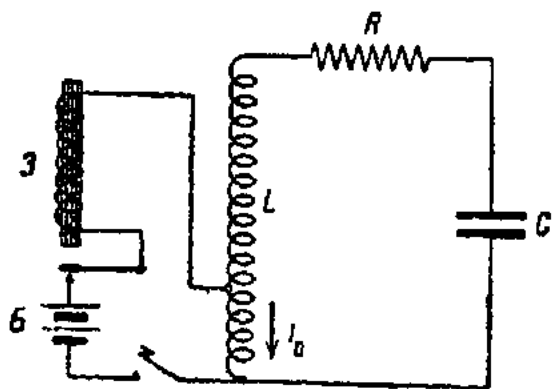


Рис. 3.

твить, например, на вопрос о законе распределения тока внутри самой катушки самоиндукции. При допущенной идеализации и не делая специальных предположений, мы не сможем решить и вопроса об изменении силы тока в начале процесса, если в начальный момент ток существует не во всей катушке, а только в части ее, присоединенной к источнику постоянного тока (рис. 3), ибо эти начальные условия, так же как и в рассмотренном нами механическом примере, не-

совместимы с примененной идеализацией задачи. (Именно такого типа начальные условия имеют место, например, в случае волномера, возбуждаемого зуммером, — батарея B и зуммер Z обычно присоединяются к волномеру так, как это указано на рис. 3.) И в этом случае мы могли бы, как и в предыдущем, задать начальное распределение силы тока в катушке не в виде двух условий для двух частей катушки, а в более общем виде некоторой функции распределения $i = f(x)$. Однако никакое иное распределение кроме некоторой определенной

силы тока, одинаковой во всех витках катушки, конечно, несовместимо с нашей идеализацией системы. Такие произвольные начальные условия требуют, вообще говоря, рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы, т. е. рассмотрения распределенной системы.

Мы видим, таким образом, что, отказываясь от рассмотрения реальных систем как систем распределенных и рассматривая их в виде систем с конечным числом степеней свободы, в частности в нашем случае в виде систем с одной степенью свободы, мы должны соответствующим образом ограничить себя в смысле выбора начальных условий и задавать только такие начальные состояния, которые совместимы с нашей идеализацией. В противном случае возникает конфликт между начальными условиями и уравнениями нашей идеализированной системы, для ликвидации которого, вообще говоря, нужно было бы изменить характер идеализации системы. Однако в некоторых случаях, как мы увидим в дальнейшем, конфликт этот может быть ликвидирован без изменения характера идеализации системы — именно при помощи некоторых добавочных постулатов, «предписывающих» определенный путь разрешения конфликта.

Точно так же не только от свойств самой системы, но и от характера той задачи, которая нам поставлена, зависит решение вопроса о допустимости той или иной идеализации, связанной с определенными законами, управляющими движением системы и, в частности, определяющих зависимости параметров от состояния системы. Именно эта идеализация определяет тип уравнений, которыми описывается система, и приводит нас к разделению систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», «автоколебательные» и «диссипативные» и т. д.

Как же следует подходить к вопросу о законах, характеризующих состояния системы, и, в частности, к вопросу о свойствах параметров (мы применяем этот термин в том смысле, как мы его выше определили)? В каких случаях, какая идеализация этих свойств может быть допущена? Вообще говоря, параметры всякой электрической или механической системы — емкость или упругость, сопротивление или коэффициент трения, самоиндукция или масса — всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы, т. е. от ее координат и скоростей. Действительно, если конденсатор заряжен до какого-либо напряжения, то между его обкладками существуют силы электростатического притяжения. Так как абсолютно жестких систем не существует, то эти силы вызовут какое-то изменение формы или размеров обкладок конденсатора, вследствие чего изменится и его емкость; эти изменения будут тем больше, чем больше напряжение между обкладками конденсатора. Поэтому емкость конденсатора всегда в большей или меньшей степени будет зависеть от напряжения между его обкладками.

Точно так же между витками катушки самоиндукции, по которым течет ток, будут существовать ponderomotorные силы, которые несколько изменят конфигурацию витков катушки, а вместе с тем и ее коэффициент самоиндукции. Следовательно, коэффициент самоиндукции катушки неизбежно в большей или меньшей степени зависит от силы тока, протекающего по катушке. Наконец, сопротивление проводника

всегда в большей или меньшей степени зависит от температуры; так как при протекании тока по проводнику выделяется тепло, нагревающее сопротивление, то величина этого сопротивления всегда до некоторой степени зависит от силы протекающего по нему тока.

Так же легко убедиться в том, что, например, параметры изображенной на рис. 1 механической системы всегда в известной степени зависят от состояния системы. Например, модуль упругости любого материала, или коэффициент упругости любой пружины, при достаточно больших деформациях уже не остается постоянным, т. е. зависит от координат системы. Коэффициент трения всегда (и довольно сложным образом) зависит от скорости. Момент инерции вращающегося тела также, вообще говоря, не является постоянной величиной, а зависит от угловой скорости, так как всякое физическое тело не является абсолютно твердым и испытывает деформации при вращении. Итак, величины параметров как механических, так и электрических систем всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы.

Если при описании рассмотренных нами механической и электрической систем с помощью математических соотношений начать учитывать все эти зависимости параметров от состояния системы, то мы пришли бы к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых зависят от координат и скоростей, т. е. к нелинейным дифференциальным уравнениям. Чтобы упростить задачу, мы должны до известных пределов идеализировать свойства системы, сделать ряд упрощающих предположений относительно зависимости параметров от состояния системы, так как не всегда, для ответа на поставленные в отношении данной системы вопросы, нам необходимо учитывать эту нелинейность, которая часто значительно затрудняет теоретическое рассмотрение.

Наиболее простым и удобным было бы предположение, что параметры вообще не зависят от состояния системы и являются величинами постоянными. Тогда при математическом описании рассмотренных нами систем мы пришли бы к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, для которых существуют регулярные методы решения и исследование которых не представляет никаких трудностей.

При каких же условиях мы сможем дать удовлетворительный ответ на интересующие нас вопросы о характере движения системы, если мы применим указанную идеализацию, т. е. будем считать, что параметры системы не зависят от ее состояния и являются постоянными? Как мы уже видели, вообще говоря, это предположение не оправдывается в реальных физических системах. Но во многих случаях мы можем выбрать такие области изменения координат и скоростей, в которых параметры системы практически (т. е. с заданной нами степенью точности) будут оставаться постоянными. Так, например, если конструкции конденсатора и катушки самоиндукции достаточно жестки и наибольшие значения, которых достигают напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в катушке самоиндукции, не слишком велики, то практически емкость конденсатора и коэффициент самоиндукции катушки в данной области можно считать постоянными. Точно

так же, если наибольшее значение плотности тока достаточно мало, то и сопротивление обычного металлического проводника можно считать постоянным.

Аналогичным образом мы можем выбрать такую узкую область изменений координат и скоростей механической системы, чтобы параметры системы в этой области можно было с достаточной степенью точности считать постоянными. Предположение о том, что параметры системы не зависят от координат и скоростей в тех случаях, которые мы главным образом будем рассматривать, сводятся к утверждению, что все силы, возникающие в системе и являющиеся, вообще говоря, какими-то функциями координат, скоростей и ускорений, суть линейные функции либо координат, либо скоростей, либо ускорений, например упругая сила есть линейная функция координаты (или напряжение — такая же функция заряда), а сила трения или омическое падение напряжения суть линейные функции скорости (соответственно силы тока), наконец «сила инерции» и ЭДС самоиндукции суть линейные функции ускорения (производной от силы тока).

Это утверждение, что в области достаточно малых изменений аргумента силы можно рассматривать как линейные функции координат скоростей или ускорений, вытекает в сущности из математических соображений. Действительно, если функция вблизи данной точки может быть разложена в ряд Тейлора и если, кроме того, ее первая производная в этой точке не равна нулю, то для достаточно малых значений аргумента мы всегда можем ограничиться только первым членом ряда Тейлора, т. е. рассматривать функцию как линейную.

Таким образом предположение о том, что в известных пределах можно все силы, возникающие в системе, считать линейными функциями координат или скоростей, будет справедливо для очень широкого класса сил. Однако в реальных физических системах возможны такие случаи, когда представление о линейных силах не дает правильного ответа на вопрос о движении системы даже в очень узкой (однако физически интересной) области изменений координат и скоростей.

Вопрос о возможности «линеаризации» реальной физической системы мы иллюстрируем на примере механической системы с трением, например массы m , подвешенной на пружинах, но при условии, что груз либо испытывает известное сопротивление движению со стороны окружающего его газа (или жидкости), либо движется с трением вдоль поверхности какого-либо твердого тела (рис. 4). Вопрос о «линеаризации» такой системы в случае отсутствия трения не вызывает никаких трудностей, ибо при малых отклонениях упругая сила пружины, как это следует из закона Гука, пропорциональна отклонению, массу же тела в широких пределах можно считать независимой от скорости. В случае же наличия трения мы знаем, что сила трения, вообще говоря, зависит от скорости; поэтому возникает вопрос, можно ли силу

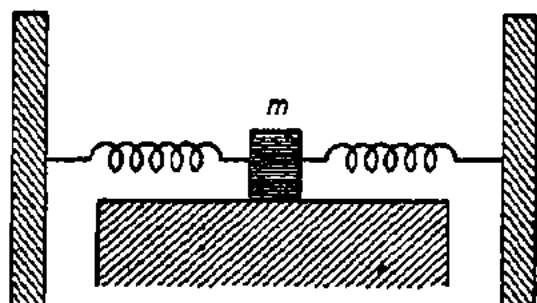


Рис. 4.

трения «линеаризовать», т. е. рассматривать ее как линейную функцию скорости, хотя бы в области очень небольших скоростей. Ответ на этот вопрос может дать только опыт, в частности, например, такой простейший опыт. Двигая груз, мы определяем ту работу, которую нужно затратить на преодоление силы трения при перемещении груза на известное расстояние. Далее мы повторяем это измерение снова и снова при все меньших скоростях движения груза (путь же остается неизменным). Таким образом можно установить зависимость между работой, затраченной на преодоление сил трения, и скоростью движения. Эта зависимость, вообще говоря, очень сложная, получается совершенно различной для случая движения массы m в газе или жидкости или трения массы m о какую-либо твердую поверхность.

В первом случае работа существенно зависит от скорости и при уменьшении скорости уменьшается и может быть сделана как угодно малой. Во втором же случае «сухого трения», наоборот, работа мало зависит от скорости, и как бы медленно мы ни двигали груз, мы

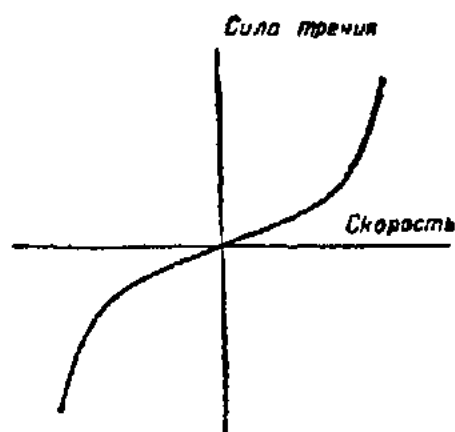


Рис. 5.

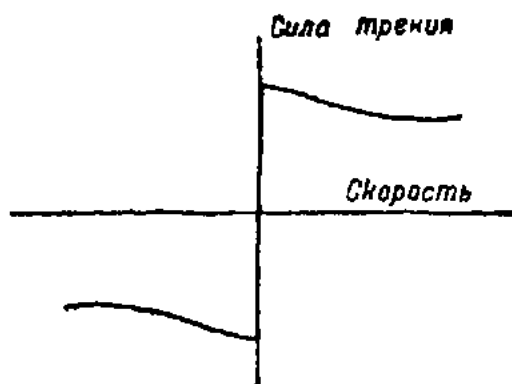


Рис. 6.

должны затратить на его перемещение некоторую конечную и вполне определенную работу, и, значит, сила трения даже при сколь угодно малой скорости имеет конечную величину. Кроме того, необходимо иметь в виду, что сила трения всегда направлена в сторону противоположную скорости, и, значит, при переходе скорости через нуль сила трения должна менять знак на обратный. Принимая во внимание это обстоятельство, а также результат наших опытов, мы можем установить хотя бы качественно связь между силой трения и скоростью в области малых скоростей. Очевидно, что в первом случае при «жидком трении» сила трения без скачка проходит через нуль и меняет при этом знак (рис. 5). Во втором же случае при скорости, стремящейся к нулю, сила трения с двух сторон стремится, вообще говоря, к разным (в частности, например, противоположным по знаку, но одинаковым по абсолютной величине) конечным пределам и, значит, при нуле претерпевает разрыв (рис. 6)¹⁾. Очевидно, что в случае «жидкого трения» мы всегда можем в некотором, хотя бы небольшом, участке по обе

¹⁾ О зависимости силы трения от скорости в области не очень малых скоростей нам еще придется говорить в дальнейшем. Пока же мы можем ограничиться областью только очень малых скоростей.

стороны от нуля считать силу трения линейной функцией скорости, т. е. можем «линеаризовать» трение и рассматривать систему как линейную. В случае же «сухого трения» такая линеаризация даже в области очень малых скоростей не передает наиболее типичных особенностей сухого трения. Поскольку при переходе скорости через нуль сила трения изменяется скачком, мы не можем, конечно, передать эту особенность силы трения, считая ее линейной функцией скорости. И поэтому при рассмотрении тех задач, в которых сухое трение играет существенную роль, мы не можем рассматривать систему как линейную, даже если ограничим наше рассмотрение весьма малыми значениями скоростей.

Простейшая идеализация, которая может быть сделана в случае сухого трения, т. е. в случае зависимости, изображенной на рис. 6,— это предположение, сделанное Кулоном, именно, что, трение по величине не зависит от скорости¹⁾. Так же как линейный закон трения является простейшей идеализацией случаев жидкого трения, закон Кулона является простейшей идеализацией случаев сухого трения. Эта идеализованная характеристика трения приведена на рис. 7.

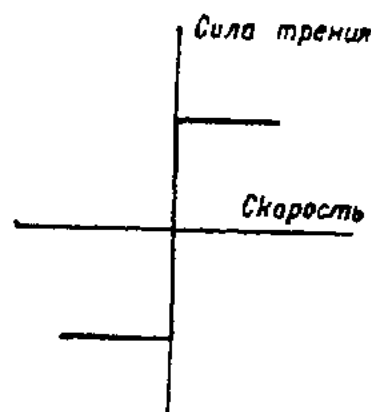


Рис. 7.

Мы видим таким образом, что не всегда можно, даже в некоторой ограниченной области, рассматривать систему как линейную. Однако во многих случаях это оказывается возможным. Тогда в этой ограниченной области мы, несмотря на допущенную идеализацию (предположение, что все параметры системы постоянны), сможем ответить на интересующие нас вопросы о характере и общих свойствах движения системы. Границы этой области определяются характером существующих в реальных физических системах зависимостей параметров от координат и скоростей и характером той задачи, которая нам поставлена; однако эта область, в которой применима наша идеализация, *всегда ограничена известными пределами.*

Но если эта область ограничена, то неизбежно возникает следующий весьма важный вопрос: не уйдет ли система «сама по себе» в силу своих свойств за пределы той области, в которой применима наша идеализация? Если этого не случится, если при начальных условиях, лежащих в пределах той области, в которой параметры системы можно считать постоянными, система и при всех дальнейших движениях не выйдет за пределы этой области, то наша идеализованная задача позволит нам дать ответ на ряд вопросов, которые могут возникнуть при изучении данной системы. Для ответа на такие вопросы мы можем считать параметры системы независимыми от состояния системы и описывать ее линейными дифференциальными уравнениями, т. е. рассматривать систему как «линейную».

1) Нужно иметь в виду, что этот простейший закон трения ни в коем случае не является линейным законом, и что хотя сила трения не зависит от величины скорости, но она зависит от направления скорости; сила трения является нелинейной функцией скорости.

Тогда же, когда система в силу своих свойств выходит за пределы «линейной области», совершенно очевидно могут возникнуть вопросы, на которые мы не в состоянии будем дать ответа, рассматривая систему как линейную. И в вопросе о законах, связывающих свойства параметров с состояниями системы, допустимость той или иной идеализации зависит не только от свойств системы, но и от характера поставленной нам задачи, и в частности от характера начальных условий задачи.

Существует очень большое число весьма интересных и практически важных вопросов, для ответа на которые необходимо рассмотреть поведение системы за пределами линейной области. Целый ряд таких вопросов выдвигается например современной радиотехникой. Как мы увидим дальше, даже теория простейшего передатчика *принципиально* не может быть сведена к исследованию линейного дифференциального уравнения и требует изучения нелинейного уравнения; линейное уравнение, например, не в состоянии объяснить тот факт, что передатчик, независимо от начальных условий имеет стремление устанавливаться в определенном режиме. Аналогичные вопросы возникают в электротехнике, акустике и т. д.

Рассмотрение именно таких вопросов, *самый характер которых делает неизбежной постановку нелинейной проблемы, т. е. заставляет рассматривать систему как нелинейную, и составит нашу основную задачу.*

Провести строгое разделение реальных физических систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», их разделение по числу степеней свободы и т. д. невозможно. Реальные физические системы не являются ни линейными, ни консервативными, не могут иметь конечного числа степеней свободы, ибо они вообще не могут быть описаны совершенно точно при помощи математических соотношений. Поэтому всякое строгое разделение, строгая классификация не может быть точно проведена для реальных физических систем. Такому строгому разделению поддаются только абстрактные схемы, которые получаются в результате известной идеализации свойств реальной физической системы.

В частности те системы, которые рассматриваются обычно в учебных курсах, не являются какими-то особыми «линейными системами», которые могут быть строго отделены от других «нелинейных систем», составляющих предмет нашего рассмотрения. И в том, и в другом случае мы рассматриваем часто одни и те же реальные физические системы, но применяем к ним разные способы идеализации. *В результате этой идеализации* поставленных перед нами задач оказывается возможным разделение систем на линейные и нелинейные, консервативные и неконсервативные, выделение из числа нелинейных неконсервативных систем класса автоколебательных систем, наконец деление автоколебательных систем на непрерывные (в частности «томсоновские») и «разрывные».

Проводя это разделение, мы всегда будем приходить к определенным заключениям относительно свойств того или иного класса систем; однако необходимо иметь в виду, что эти свойства, характеризующие

систему, являются *идеализированными свойствами*. Это и естественно, ибо самое выделение класса систем, обладающих данными свойствами, оказалось возможным в результате той или иной идеализации. Так, например, когда мы говорим о свойстве автоколебательной системы как угодно долго совершать колебания с постоянной амплитудой, то это свойство, конечно, нужно рассматривать как идеализированное. В реальной автоколебательной системе колебания не могут продолжаться «как угодно долго»; колебания часов прекратятся, когда кончится их завод, колебания в ламповом генераторе прекратятся, когда разрядится анодная батарея или батарея накала. Когда мы говорим о колебаниях, которые могут длиться «как угодно долго», то мы отвлекаемся от указанных обстоятельств (конечный запас энергии в заводе часов или в батарее лампового генератора). Совершенно также только приближенный смысл имеет утверждение, что всякая автоколебательная система, например передатчик в радиотехнике, имеет стремление устанавливаться в определенном режиме, т. е. что установившаяся «амплитуда» и период колебаний в таком передатчике постоянны (при фиксированных параметрах). Нетрудно видеть, что фактически, благодаря небольшим внешним воздействиям, которые всегда существуют и благодаря флуктуациям, которые неизбежны, эти величины всегда меняются в некоторых, обычно узких пределах. Более того, очевидно, что даже понятие периодического движения по отношению к реальной системе также является идеализацией. Как уже много раз указывалось, при всяком рассмотрении мы подчеркиваем те или иные свойства реальной физической системы, которые для решения данного вопроса играют принципиальную роль, и отвлекаемся от тех свойств, которые для решения данного вопроса являются второстепенными¹⁾.

На какие же вопросы мы должны будем пытаться получить ответ при рассмотрении этих нелинейных проблем?

При изучении поведения динамической системы нас обычно прежде всего интересуют так называемые *стационарные движения* в системе²⁾, так как именно эти движения являются наиболее характерными для поведения системы в течение длительных промежутков времени.

Какие же стационарные движения возможны в тех системах, которые мы будем рассматривать (для определенности мы будем сейчас иметь в виду только механические модели динамических систем)?

1) Заметим, кстати, что поскольку мы будем рассматривать только замкнутые контура, в которых излучение электромагнитной энергии играет второстепенную роль, мы раз навсегда отказываемся от учета излучения.

2) Стационарное движение, грубо говоря, есть то предельное движение, к которому стремится система. Говоря о стационарных движениях, мы понимаем под ними также и состояния покоя, т. е. рассматриваем состояния покоя как частный случай стационарного движения. Можно дать точное математическое определение стационарных движений, отождествив их с так называемыми *рекуррентными* движениями Биркгофа [43]. Для систем с одной степенью свободы рекуррентными движениями могут быть только состояния равновесия и периодические движения. Для более общих систем, рекуррентными движениями могут быть более сложные движения, например квазипериодические. Однако, по видимому, требование «грубости» системы запрещает все остальные рекуррентные движения, кроме состояний равновесия и периодических.

Это могут быть прежде всего состояния равновесия, в которых скорости и ускорения, определяемые из дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, обращаются в нуль. Второе условие равносильно тому, что на систему не действуют никакие регулярные силы, учитываемые дифференциальными уравнениями. Но во всякой физической системе помимо таких регулярных сил действуют и малые нерегулярные силы, например флуктуационного характера. Вследствие наличия этих сил система никогда не может находиться точно в состоянии равновесия и совершает малые движения вблизи состояния равновесия (броуновское движение). Но вблизи состояний равновесия на систему действуют уже и регулярные силы (они равны нулю только точно в состоянии равновесия), которые могут либо возвращать систему к состоянию равновесия, либо удалять ее еще больше. В первом случае будем иметь устойчивые, а во втором неустойчивые состояния равновесия. Ясно, что для изучения поведения системы нужно уметь не только находить состояния равновесия, но и определять их устойчивость по отношению к малым изменениям координат и скоростей. Устойчивость в этом смысле является необходимым условием того, чтобы система могла находиться вблизи данного состояния равновесия как угодно долго.

Далее к числу возможных стационарных движений в системе принадлежат *периодические* движения. Правда, помимо периодических в колебательных системах возможны и другие стационарные колебательные процессы, например квазипериодические. Но в *автономной*¹⁾, т. е. не находящейся под переменным воздействием, колебательной системе с одной степенью свободы, как будет выяснено при более детальном рассмотрении этих вопросов, возможно существование только простейшего типа стационарного колебательного движения — именно процесса периодического.

Однако не всякие возможные стационарные движения могут существовать в реальной физической системе. Для того чтобы данный стационарный процесс в реальной физической системе мог длиться как угодно долго, необходимо, чтобы при наличии неизбежных случайных толчков система совершала движения достаточно близкие к данному стационарному движению, и не удалялась бы от него сколько-нибудь заметно. Это требование совершенно аналогично такому же требованию по отношению к состояниям равновесия: чтобы периодический процесс мог продолжаться как угодно долго, он должен быть устойчив по отношению к небольшим изменениям координат и скоростей. Поэтому нам необходимо будет не только находить возможные периодические процессы в системе, но и решать вопрос об их устойчивости по отношению к небольшим отклонениям. Точно так же нас будет интересовать зависимость движений системы от параметров, входящих в уравнения и могущих принимать те или другие фиксированные значения (сопротивление, емкость и т. д.). Исследование этой зависимости позволяет

¹⁾ Автономными мы будем называть такие системы, которые описываются уравнениями, не содержащими явно времени. Поэтому, рассматривая автономные системы, мы будем считать, что внешние воздействия не зависят от времени.

дать ответ на ряд основных вопросов связанных с возникновением колебаний, срывом колебаний и т. д.

Чтобы стационарные состояния могли длительно существовать в реальной системе, они должны быть устойчивы не только по отношению к малым изменениям координат и скоростей, но и по отношению к малым изменениям самого вида дифференциальных уравнений, описывающих систему. Эти малые изменения вида дифференциальных уравнений отражают соответствующие малые изменения свойств той системы, которая этими уравнениями описывается. И так как, с одной стороны, мы никогда не можем с абсолютной точностью описать реальную систему при помощи математического аппарата, а с другой стороны, ни одна реальная система не остается абсолютно неизменной во время происходящих в ней процессов, то мы всегда должны допускать возможность малых изменений вида дифференциальных уравнений, описывающих реальную систему¹⁾.

Если мы при рассмотрении той или иной конкретной задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движений и что в поведении идеальной модели сохраняются те черты, которые нас интересуют. Те же черты поведения модели, которые не сохраняются при малом изменении вида дифференциальных уравнений и величин параметров, не имеют физического интереса, так как они не отражают свойств реальной физической системы. Такие не меняющиеся в своих существенных чертах при малом изменении вида дифференциальных уравнений системы, которые мы будем называть «грубыми» системами, служат теоретическими моделями реальных физических систем, и их мы главным образом и будем изучать в этой книге. Однако то ограничение, которое мы наложили на малые изменения системы, — чтобы при этих изменениях не увеличивалось число степеней свободы или, иначе, порядок уравнения, — весьма существенно. Действительно, с некоторой точки зрения, которую физически можно оправдать, «малым изменением вида» уравнения можно было бы считать также повышение порядка дифференциального уравнения, если только коэффициенты при появляющихся вновь более высоких производных достаточно малы. А «малое изменение вида» дифференциального уравнения, заключающееся в повышении порядка уравнения, есть результат учета каких-либо новых степеней свободы системы; учета каких-то «паразитных» параметров ее. Так, например, в случае электрической схемы, изображенной на рис. 8, учитывая только самоиндукцию L , емкость C и омическое сопротивление катушки самоиндукции R , т. е. основные («не паразитные») пара-

1) Эти малые изменения системы или малые изменения вида дифференциальных уравнений мы будем сперва предполагать такими, которые не меняют порядка исходного дифференциального уравнения (или, что то же, не меняют числа дифференциальных уравнений первого порядка, если мы рассматриваем только системы первого порядка). На языке физики это значит, что рассматриваемые малые изменения системы таковы, что они не вынуждают нас отказаться от идеализации, связанной с числом степеней свободы.

метры, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка. Учитывая, кроме того, суммарную «паразитную» емкость между витками катушки, т. е. емкость C_1 , и «паразитную» самоиндукцию приводов, т. е. самоиндукцию L_1 , мы вместо уравнения второго порядка получим уравнение четвертого порядка. Но поскольку C_1 и L_1 — величины малые, это уравнение четвертого порядка можно рассматривать лишь как малое изменение вида исходного дифференциального уравнения второго порядка.

Эти «малые изменения» вида дифференциального уравнения, приводящие к повышению порядка уравнения, мы могли бы продолжать как угодно долго, ибо стремясь к более полному описанию системы мы всегда приходили бы к все большему и большему числу степеней свободы.

Решив вопрос об устойчивости того или иного стационарного состояния мы должны были бы, строго говоря, также убедиться в том, что данное состояние не исчезает и не теряет своей устойчивости при повышении порядка дифференциального уравнения. Действитель-

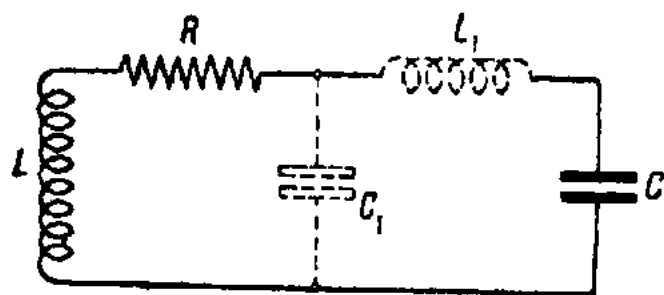


Рис. 8.

но, если бы оказалось, что состояние равновесия, устойчивое в том случае, когда учитываются только основные параметры, потеряло свою устойчивость вследствие влияния малого паразитного параметра, повышающего порядок уравнения, то это значило бы, что в действительности это состояние равновесия неустойчиво. Поэтому требова-

ние устойчивости стационарного состояния по отношению к таким изменениям уравнения является вполне естественным. Нетрудно показать, что невозможно построить такую идеальную модель динамической системы (выделить такой класс дифференциальных уравнений), для которой стационарные состояния всегда оставались бы устойчивыми даже, если в уравнения системы войдут члены с более высокими производными, имеющими сколь угодно малые, но отличные от нуля произвольные аналитические коэффициенты. Отсюда следует, что нельзя выставить общее требование к идеальным моделям динамических систем о неизменности характера стационарных состояний при появлении новых степеней свободы (аналогичное требованию грубости при малых изменениях динамической системы, не связанных с появлением новых степеней свободы), а можно лишь учитывать влияние новых степеней свободы, принимая во внимание специфические особенности отдельных классов систем. С состояниями, «устойчивость» которых обуславливается в сущности не свойствами реальной системы, а тем, что мы не учитываем некоторую степень свободы, нам придется встречаться в дальнейшем.

Но не быть «наивными» мы не можем, ибо это значит, что мы должны были бы проверить не нарушают ли устойчивости данного состояния всевозможные малые паразитные параметры, повышающие порядок

уравнения. Мы никогда не сможем провести полностью этой проверки, ибо число таких паразитных параметров во всякой системе очень велико и, кроме того, как будет показано, может случиться, что эти параметры влияют в разные стороны, и, значит, чтобы проверить их влияние, мы должны не только предполагать наличие этих параметров, но и знать количественные соотношения между ними, а величин паразитных параметров мы обычно не знаем. Поэтому окончательный ответ на вопрос об устойчивости того или иного состояния в реальной системе может дать только опыт.

Форма, в которой мы будем пытаться получить ответы на интересующие нас вопросы, в разных случаях будет различная. Мы могли бы получить ответы на все возникающие вопросы, если бы нам были известны те функции, которые характеризуют состояния системы и изменения этих состояний. Эти функции, которые предстоит нам изучать для того, чтобы определять поведение системы — например зависимость силы тока или напряжения от времени, — определены при помощи дифференциальных уравнений, описывающих данную систему, и другого определения не имеют. Только для очень небольшого класса случаев — например для линейных уравнений с постоянными коэффициентами — возможно свести задачу об отыскании таких функций на другую более простую, например на решение алгебраических уравнений или нахождение интегралов (квадратур) от функций, входящих в дифференциальные уравнения.

Поэтому необходимо непосредственно, из самих дифференциальных уравнений уметь извлечь указания относительно характера и вида функций, этими уравнениями определяемых.

В первую очередь при этом возникает задача — определить наиболее характерные, так сказать, качественные черты этих функций при помощи геометрического построения так называемых интегральных кривых, т. е. кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Мы будем называть это качественной интеграцией уравнений. Если мы сумеем качественно проинтегрировать рассматриваемое дифференциальное уравнение, то это значит, что мы получим качественную картину возможных физических процессов в рассматриваемой системе. Большое число вопросов, имеющих фундаментальный практический интерес, носит именно такой качественный характер, например вопрос о наличии устойчивых состояний равновесия, вопрос о существовании устойчивых периодических процессов, вопрос о мягком и жестком режиме и т. д.

Качественная интеграция существенно облегчит нам и количественную интеграцию или точнее облегчит решение тех количественных вопросов, которые возникают в физике колебаний. В конечном счете теория колебаний не интересуется численными значениями функций в тот или другой частный момент времени; ее в основном интересуют те количественные характеристики, которые определяют протекание этой функции на значительных отрезках времени, например в случае периодической функции — ее период, величины коэффициентов разложения в ряд Фурье, спектральный состав для функций, изображимых при помощи интеграла Фурье, и т. д.

Однако для нахождения этих величин, например спектрального состава, теория колебаний часто должна в качестве промежуточной ступени определять численные значения функций для тех или иных частных значений независимого переменного. Обычные приближенные методы количественного интегрирования (например метод изоклин, метод Рунге-Кутты), которые могут быть использованы для получения ответов на такие вопросы, само собой разумеется, также оперируют непосредственно с дифференциальным уравнением. Знание качественной картины для данного дифференциального уравнения позволяет с большей эффективностью и надежностью применять количественные приближенные методы, разумно их комбинировать и т. д.

В дальнейшем мы должны будем познакомить читателя с тем математическим аппаратом, который необходим для исследования функций, определяемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Поскольку мы здесь ограничимся рассмотрением систем с одной степенью свободы, это будут функции, определяемые одним дифференциальным уравнением не выше второго порядка, или не более чем двумя дифференциальными уравнениями первого порядка.

Чтобы облегчить усвоение этого математического аппарата, мы начнем с изложения хорошо известных обычных линейных задач на том языке, и частично с помощью тех приемов, которые потом в развернутом виде будут нами использованы при решении несравненно более сложных нелинейных задач.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Линейная система без трения

Мы начнем наше рассмотрение с простейшего случая автономной линейной колебательной системы при отсутствии трения. Примером такой системы является, например, масса m , могущая совершать без трения горизонтальные движения вдоль стержня под действием двух пружин (рис. 9). Чтобы рассмотрение такой системы привело к интересующему нас простейшему случаю,

мы должны ввести следующую идеализацию¹⁾. Во-первых, мы должны предположить, что силы, с которыми действуют пружины на груз, пропорциональны смещениям, что в действительности с нужной нам степенью точности соблюдается только в известных пределах, а именно, если смещения достаточно малы, так как пружина при малых деформациях подчиняется закону Гука. Во-вторых, мы должны предположить, что пружины не обладают внутренним трением, т. е. что при растяжении и сжатии пружин энергия не рассеивается, и что система при движении не испытывает сопротивления (нет трения о воздух и о поддерживающий стержень).

Это второе предположение об отсутствии трения в системе, конечно, еще с меньшей степенью точности может быть соблюдено в реальных физических системах, чем первое. При сделанных предположениях движение такой идеализированной системы может быть отображено линейным уравнением второго порядка:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

где x — смещение относительно положения равновесия, k — положительный коэффициент, зависящий от упругости пружин.

Полагая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим дифференциальное уравнение гармонического движения в каноническом виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Мы не упоминаем и не будем более упоминать о других идеализациях, о которых шла речь во введении.

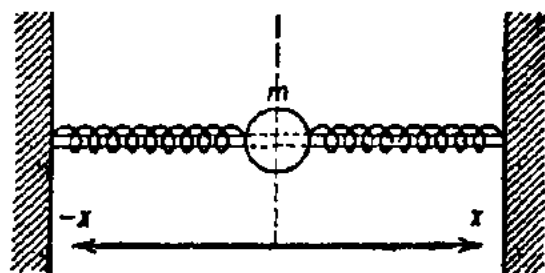


Рис. 9.

Примером электрической системы этого типа может служить колебательный контур, состоящий из емкости C и самоиндукции L (рис. 10), — такие контуры мы будем для краткости называть «томсоновскими»¹⁾. Чтобы притти к случаю линейной системы без трения, мы должны, конечно, идеализировать свойства этого контура. Прежде всего мы должны предположить, что в контуре не происходит потерь энергии, т. е. что соответствующие проводники не обладают сопротивлением, что в диэлектрике энергия также не рассеивается и, наконец, что отсутствует излучение электромагнитной энергии. Это предположение никогда не осуществляется с достаточной точностью в реальных системах, о чем свидетельствует хотя бы тот факт, что во всяком контуре всегда происходит более или менее сильное, но во всяком случае заметное (если подождать достаточно долго) затухание колебаний. Таким образом идеализируя реальную систему как систему без трения, мы уже не можем передать одну из наиболее типичных черт

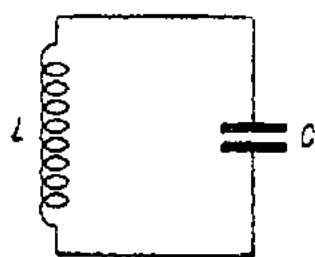


Рис. 10.

всякой реальной системы — именно затухание собственных колебаний; и в этом смысле предположение об отсутствии трения является гораздо более далеко идущей идеализацией, чем предположение о линейности контура, которое в реальных системах довольно хорошо соблюдается. Однако такая идеализация позволяет все же достаточно удовлетворительно ответить на некоторые основные вопросы теории колебаний, например на вопросы о частоте и форме собственных колебаний, конечно, только

в тех случаях, когда трение в реальной системе достаточно мало. При сделанных предположениях электрическая система также подчиняется уравнению вида (1); именно если обозначить заряд конденсатора через q , то мы получим:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (3)$$

Обозначая $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, снова приходим к уравнению гармонического движения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Напомним теперь характерные свойства движений системы, подчиняющейся такому уравнению, системы, которую в физике называют гармоническим осциллятором. Интеграл этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, как известно, имеет вид:

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

где A и B определяются начальными условиями. Если для $t=0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \quad \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t. \quad (5)$$

1) Целесообразность этого специального термина выяснится в дальнейшем, когда нам придется рассматривать другие системы, «нетомсоновские», в которых сопротивление играет преобладающую роль.

Это же решение может быть также записано в виде:

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad \dot{x} = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (6)$$

где

$$K = +\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}. \quad (7)$$

Мы видим, что зависимость смещения или заряда от времени можно изобразить в виде хорошо известной «синусоиды» (рис. 11). Для характеристики такого «синусоидального» или гармонического колебания нужно задать три величины: K — максимальное отклонение, или *амплитуду* колебаний, ω_0 — число колебаний в 2π секунд, или *циклическую частоту*, и α — так называемую *фазу* колебаний, которая играет очень существенную роль, когда мы имеем дело сразу с несколькими процессами. Действительно, так как выбор фазы колебания вполне определяет начальный момент отсчета времени, то ее нельзя выбирать произвольно, если начальный момент отсчета времени уже задан каким-либо другим процессом. Но фаза колебаний не играет какой-либо физической роли, когда мы имеем дело только с одним «изолированным» процессом. Итак, гармонический осциллятор совершает периодические движения, разложение которых

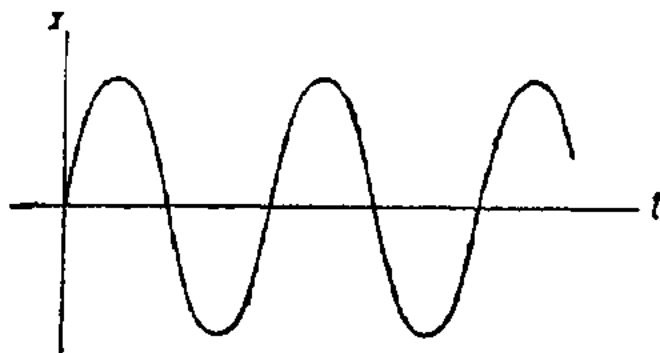


Рис. 11.

в ряд Фурье дает только один член. Колебательное движение не возникает лишь в случае $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, т. е. когда наш осциллятор в начальный момент находится в состоянии равновесия; в этом случае он продолжает и дальше в нем оставаться. Амплитуда и фаза гармонического колебательного движения определяются начальными условиями. Циклическая частота, а значит, и период процесса не зависят от начальных условий и определяются самой системой, самим колебательным устройством.

Формулы (5) или (6) и (7) дают точный количественный ответ на вопрос, как происходят движения в системе, определяемой уравнением (2). Они позволяют определять «будущее из настоящего», т. е. позволяют вычислять значения x и \dot{x} для каждого момента времени t , если они известны для момента времени $t=0$. Следует отметить, что эти же формулы позволяют вычислять значения x и \dot{x} , относящиеся к моменту времени $t=0$, если они известны для момента времени $t > 0$. Именно: уравнения (5) могут быть приведены к виду:

$$x_0 = x \cos \omega_0 t - \frac{\dot{x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \quad \dot{x}_0 = x \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x} \cos \omega_0 t, \quad (8)$$

где x и \dot{x} относятся к моменту времени t , а x_0 и \dot{x}_0 — к моменту времени $t=0$.

§ 2. Понятие о фазовой плоскости, представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости

1. Фазовая плоскость. Положим $\dot{x} = y$ и будем изучать движение нашего гармонического осциллятора, изображая это движение на плоскости x, y , где x и y — прямоугольные декартовы координаты. Каждому состоянию нашей системы, каждой паре значений координаты x и скорости y соответствует точка на плоскости x, y . Обратное, каждой точке на плоскости x, y соответствует одно и только одно состояние системы. Плоскость x, y носит название плоскости состояний или иначе «фазовой» плоскости¹⁾; она изображает совокупность всех мыслимых состояний нашей системы. Каждому новому состоянию системы соответствуют все новые и новые точки фазовой плоскости. Таким образом изменению состояний системы можно соподчинить движение некоторой точки на фазовой плоскости, которая носит название «изображающей» или «представляющей» точки. Траектория такой изображающей точки называется *фазовой траекторией*; ее не следует смешивать с действительной траекторией движения. Скорость такой изображающей точки называется фазовой или диаграммной скоростью; опять-таки ее не следует смешивать с действительной скоростью. *Целой фазовой траекторией* мы будем называть ту кривую (или часть кривой), которую описывает изображающая точка за все время своего движения (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$). Найти фазовую траекторию — это значит найти кривую или часть кривой, выражающую для данного движения зависимость скорости от координаты. Зная решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора (2), нетрудно найти уравнение траектории на фазовой плоскости. Именно уравнения

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (6)$$

являются параметрическими уравнениями фазовой траектории; исключая из этих уравнений t , найдем координатное уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2\omega_0^2} = 1. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение семейства подобных (с постоянным отношением осей) эллипсов, причем через каждую точку плоскости проходит один и только один эллипс²⁾, соответствующий определенному значению K , т. е. определенному классу начальных условий, именно одним и тем же начальным значениям полной энергии

1) Метод отображения состояния системы с n степенями свободы заданием одной точки в пространстве $2n$ измерений уже давно применяется в физике. Это $2n$ -мерное пространство состояний (фаз) системы получило название фазового пространства. Отсюда произошел и термин «фазовая плоскость».

2) В других, более сложных примерах, может случиться, что исключая время t из параметрических уравнений фазовой траектории, мы получим координатное уравнение не одной траектории, а сразу *несколько*.

системы. Вся плоскость x, y в этом случае заполнена вложенными друг в друга эллипсами, за исключением точки $x=0, y=0$; «проходящий» через эту точку эллипс сам вырождается в точку (рис. 12).

Все эти эллипсы представляют собой траектории движения представляющей точки. Посмотрим, как будет двигаться изображающая точка по какому-нибудь из этих эллипсов. Легко видеть, что при выбранном нами направлении осей координат движение представляющей точки будет всегда, по любой траектории, происходить по часовой стрелке, так как положительная скорость ($y > 0$) соответствует увеличению x с течением времени, отрицательная же скорость ($y < 0$) — уменьшению x с течением времени.

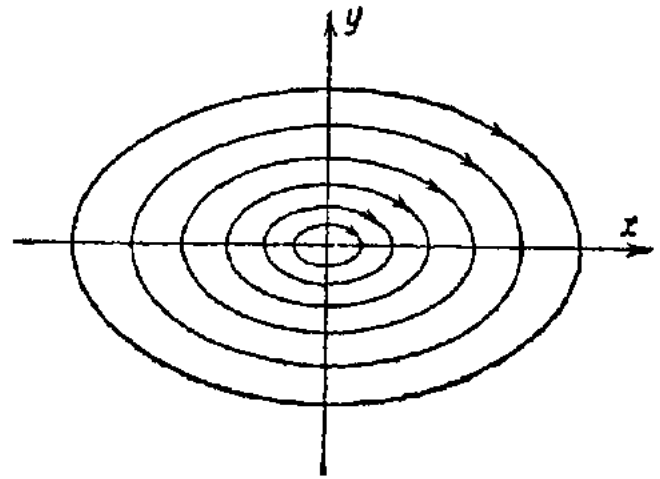


Рис. 12.

Для того чтобы найти численную величину фазовой скорости, введем, как это обычно делается в механике, фазовый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = i x + j y. \quad (10)$$

В таком случае фазовая скорость изобразится в виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i \dot{x} + j \dot{y} \quad (11)$$

или по (6) в виде:

$$\mathbf{v} = i \{ -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \} + j \{ -K\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) \}. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что фазовая скорость, за исключением случая $K=0$, никогда не обращается в нуль, так как синус и косинус одновременно никогда не обращаются в нуль.

Мы исследовали характер фазовой плоскости и обнаружили, что периодическим движениям, происходящим в системе, на фазовой плоскости, соответствуют замкнутые траектории представляющей точки — в нашем случае эллипсы, по которым двигается изображающая точка с не обращающейся в нуль фазовой скоростью (рис. 12), совершая полный оборот в $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ единиц времени. Состоянию равновесия осциллятора соответствует на фазовой плоскости фазовая траектория, выродившаяся в точку.

Допустим теперь, что нам неизвестен характер движений в системе, но каким-либо образом стал известен характер фазовых траекторий и величины фазовых скоростей. Можем ли мы, пользуясь этим знанием, делать высказывания, касающиеся отображаемых этими кривыми движений? Как мы увидим дальше, общий характер движения, качественные его черты выявляются уже в характере фазовых траекторий. Фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый

«портрет» динамической системы, она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях.

Мы получили для рассматриваемого случая гармонического осциллятора картину на фазовой плоскости исходя из готового решения (6) уравнения осциллятора. Можно, однако, не пользуясь этим решением, непосредственно из самого уравнения (2) вывести заключения о движении изображающей точки на фазовой плоскости. Именно этот второй путь и представляет особый интерес, так как он позволяет вывести известные заключения о характере движения без знания аналитических выражений интегралов исходного уравнения, и следовательно, применим и в тех случаях, когда такие аналитические выражения, подобные (6), не могут быть найдены.

2. Уравнение, не содержащее времени. Для того чтобы от исходного уравнения (2), не интегрируя этого уравнения, непосредственно перейти к картине на фазовой плоскости, мы поступим следующим образом. Заменяем исходное уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x. \quad (13)$$

Деля одно из этих уравнений на другое, получим дифференциальное уравнение так называемых *интегральных кривых* на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (14)$$

Мы видим, что, в то время как зависимость x от t выражается дифференциальным уравнением второго порядка (2), зависимость y от x выражается дифференциальным уравнением первого порядка. Проинтегрировав уравнение (14), мы получили бы уравнение интегральных кривых уже не в дифференциальной, а в конечной форме. В данном, простейшем случае интегральные кривые, как негрудно видеть, совпадают с фазовыми траекториями. Однако в дальнейшем нам придется различать между интегральными кривыми и фазовыми траекториями, так как может случиться, что одна интегральная кривая соответствует не одной, а сразу нескольким фазовым траекториям.

3. Особые точки. Центр. Уравнение (14) непосредственно определяет в каждой точке плоскости единственную касательную к соответствующей интегральной кривой, за исключением точки $x=0, y=0$, где направление касательной становится неопределенным. Как известно из обычной теории дифференциальных уравнений, через те точки, для которых соблюдаются условия теоремы Коши¹⁾ (в числе последних имеется условие, что дифференциальное уравнение дает определенное направление касательной к интегральной кривой), проходит одна и только одна интегральная кривая; относительно точек же, в которых направление касательной становится неопределенным и в которых, следовательно,

¹⁾ К теореме Коши и ее значению для исследования поведения интегральных кривых мы еще вернемся в дальнейшем.

условия теоремы Коши не соблюдаются, уже нельзя утверждать (на основании этой теоремы), что через них проходит одна и только одна интегральная кривая. Такие точки, в которых направление касательной неопределенно, носят название *особых точек* данного дифференциального уравнения. Эти особые точки дифференциального уравнения не следует смешивать с особыми точками отдельных интегральных кривых, т. е. с особыми точками, встречающимися в дифференциальной геометрии. В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом именно с особыми точками дифференциальных уравнений. Однако теорема Коши не дает права утверждать, что через особую точку проходит больше или меньше одной интегральной кривой (т. е. либо ни одной кривой, либо много). Но для тех простейших особых точек (особых точек первого порядка), с которыми нам придется главным образом сталкиваться, это обратное утверждение оказывается правильным. Именно, как мы убедимся при рассмотрении этих особых точек, через особую точку первого порядка либо не проходит ни одной, либо проходит больше чем одна интегральная кривая.

Дифференциальное уравнение может иметь, вообще говоря, много особых точек. В нашем случае мы имеем единственную особую точку $x=0$, $y=0$. Существуют разные типы особых точек, различаемые по характеру поведения интегральных кривых вблизи данной особой точки. В рассматриваемом нами случае через особую точку не проходит ни одна интегральная кривая. Такая изолированная особая точка, вблизи которой интегральные кривые представляют собой замкнутые кривые, не имеющие особенностей, в частности, например, эллипсы, «вложенные» друг в друга и охватывающие особую точку, называется *центром*. С другими типами простейших особых точек мы познакомимся при рассмотрении дальнейших примеров. Пока же мы ограничимся только указанием, что поскольку разным типам интегральных кривых соответствуют различные типы движений системы, классификация особых точек непосредственно связана с поведением системы вблизи особой точки.

4. Изоклины. Итак, уравнение (14) определяет «поле» касательных на фазовой плоскости. Нетрудно отдать себе отчет в характере этого поля, если построить семейство изоклин¹⁾, которые в данном случае будут просто прямыми, проходящими через начало координат (рис. 13). Действительно, пусть мы ищем все те точки фазовой плоскости, где наклон интегральных кривых равняется κ . Тогда уравнение соответствующей изоклины будет:

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y} = \kappa \quad \text{или} \quad y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{\kappa}. \quad (15)$$

1) Изоклина — это геометрическое место точек, в которых касательные ко всем интегральным кривым имеют одинаковый наклон, т. е. образуют одинаковые углы с осью абсцисс.

Нетрудно видеть (давая σ различные значения при фиксированном ω_0^2), что исследуемое поле состоит из линейных элементов, симметрично расположенных относительно осей x и y , постепенно (с изменением наклона изоклины σ) меняющих свое направление от горизонтального (вдоль оси y , где $x=0$) до вертикального (вдоль оси x , где $x=\infty$).

Уравнение (14) не дает, однако, ответа на вопрос о том, в какую сторону и с какой скоростью будет двигаться изображающая точка на фазовой плоскости. Уравнения же (13) определяют фазовую скорость как по величине, так и по направлению; действительно:

$$\mathbf{v} = i\dot{x} + j\dot{y} = iy + j(-\omega_0^2 x). \quad (16)$$

Если принять во внимание и направление, то целесообразно вместо поля линейных элементов (рис. 13) рассматривать векторное поле

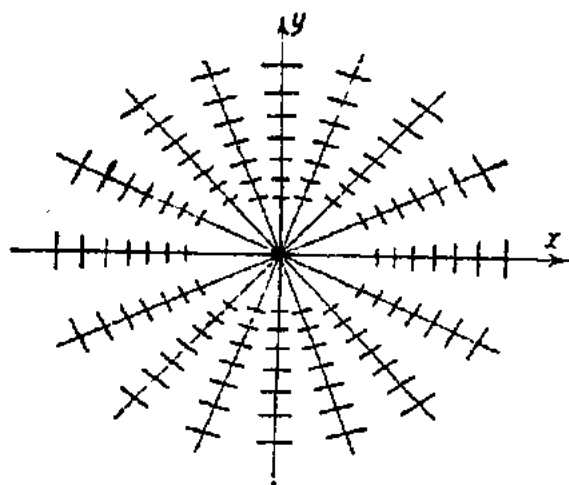


Рис. 13.

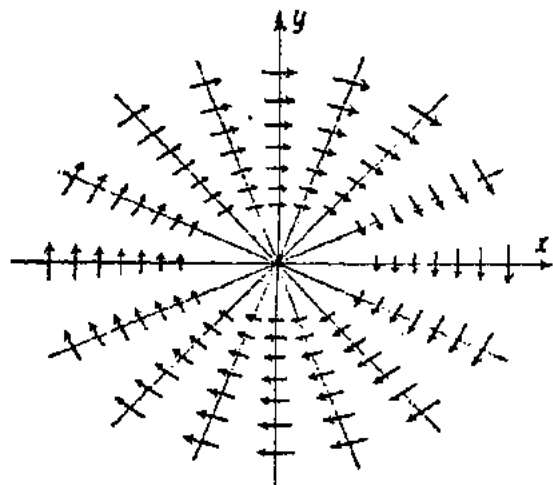


Рис. 14.

(рис. 14), которое характеризует не только направление касательной к интегральной кривой в данной точке, но и направление движения по фазовой траектории.

Как мы уже указывали, фазовая скорость $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$ обращается в нуль только в начале координат, т. е. только в особой точке.

Нетрудно, взглянув на рис. 13 и 14, убедиться, что метод изоклин в рассматриваемом случае позволяет сразу получить известное представление о характере траекторий на фазовой плоскости. Конечно, применение метода изоклин в рассматриваемом простейшем случае, когда исходное дифференциальное уравнение (14) допускает разделение переменных и, следовательно, легко интегрируется, вряд ли представляет какие-либо преимущества. В самом деле, интегрируя уравнение

$$x dx + \frac{1}{\omega_0^2} y dy = 0, \quad (17)$$

получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C, \quad (18)$$

или, полагая $2C = K^2$, находим, как и следовало ожидать, на фазовой плоскости попережнему уравнение семейства эллипсов:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega^2} = 1.$$

Не следует забывать, что сейчас мы его получили совсем другим путем, не зная решений дифференциального уравнения (2). В тех же случаях, когда уравнение, подобное (17), не может быть проинтегрировано, метод изоклин позволяет получить достаточно точное представление о характере интегральных кривых на фазовой плоскости, несмотря на то, что аналитическое выражение для этих интегральных кривых не может быть найдено. В этих более сложных случаях применение метода изоклин, как мы увидим в дальнейшем, может принести существенную пользу.

5. Состояние равновесия и периодические движения. Сделаем теперь обратные выводы по отношению к тем, которые мы делали в начале этого параграфа, когда, зная движение, зная зависимость x от t , искали вид фазовой плоскости. Посмотрим, что можно сказать о характере движения, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости.

Во-первых, мы утверждаем, что все фазовые траектории в нашем случае (кроме траектории $x = 0$, $y = 0$, которая выродилась в точку) соответствуют периодическим движениям. Действительно все эти траектории — эллипсы, т. е. замкнутые кривые. Если наша изображающая точка двигается по замкнутой кривой и если она возвращается через некоторое время, совершив «обход» в ту же самую точку фазовой плоскости, т. е. имеет через некоторое время то же самое положение и ту же самую скорость, то дальнейшее движение будет совершенно точно совпадать с предшествовавшим, процесс будет повторяться.

Нетрудно видеть, что «время возвращения» или иначе период движения является конечным. Действительно, длина нашего эллипса конечна; с другой стороны, фазовая скорость при движении по эллипсу нигде не приближается к нулю (так как она равна нулю только в начале координат, а наши эллипсы не проходят через начало координат). Поэтому изображающая точка обходит весь эллипс в конечное время, период процесса конечен. Во-вторых, мы утверждаем, что выродившаяся траектория $x = 0$, $y = 0$ или иначе особая точка $x = 0$, $y = 0$ соответствует состоянию равновесия.

Действительно, фазовая скорость для точки $x = 0$, $y = 0$ равна нулю; изображающая точка, находящаяся в исходный момент в начале координат, там и останется, если какие-либо случайные отклонения и толчки не выведут изображающую точку из точки $x = 0$, $y = 0$.

Вообще состояниям равновесия соответствуют такие точки фазовой плоскости, для которых одновременно $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$. Это нетрудно понять и из физических соображений. Например, для механического случая $\frac{dx}{dt} = 0$ говорит о том, что скорость равна нулю, а $\frac{dy}{dt}$ указывает, что ускорение или, что все равно, сила равна нулю.

Вообще говоря ¹⁾, состояниям равновесия динамической системы соответствуют на фазовой плоскости особые точки системы интегральных кривых и, обратно, особые точки соответствуют состояниям равновесия.

Таким образом, не зная еще возможных движений с количественной стороны, мы знаем качественную характеристику возможных движений. Результаты качественного исследования линейной системы без трения (гармонического осциллятора) могут быть сформулированы таким образом: *наша система при любых начальных условиях совершает периодические движения вокруг состояния равновесия $x=0$; $y=0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

§ 3. Устойчивость состояния равновесия

Интуитивно мы себе представляем смысл слов «устойчивость состояния равновесия». Однако такого интуитивного представления, конечно, недостаточно и нужно чтобы оно превратилось в строгое понятие, которым мы сможем воспользоваться в дальнейшем.

Мы начнем наше рассмотрение с простейшего примера, именно представим себе математический маятник без трения (рис. 15). Очевидно, что возможны два состояния равновесия маятника:

1) Когда мы его помещаем, не сообщая начальной скорости, в самую нижнюю точку a .

2) Когда мы его помещаем, опять-таки не сообщая скорости, в самую верхнюю точку b .

Очевидно также, что нижнее состояние равновесия устойчивое, верхнее — неустойчивое. Действительно, если маятник находится в точке b , то достаточно сколь угодно малого толчка (если даже предположить, что маятник сначала точно находился в точке b), чтобы маятник начал двигаться с возрастающей скоростью от точки b и ушел из непосредственной близости к этой точке. Иначе будет вести себя маятник, покоящийся в точке a . Получив толчок, он начнет двигаться с уменьшающейся скоростью, причем чем меньше будет толчок, тем на меньшее расстояние он отойдет от точки a , а затем повернет обратно и будет колебаться вокруг точки a . При достаточно малом толчке маятник

не выйдет из любой заданной области вокруг точки a , и скорость его не превзойдет любой заданной величины.

¹⁾ Рассмотрим динамическую систему, отображаемую уравнениями $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в нуль, то могут быть состояния равновесия, не являющиеся особыми точками системы интегральных кривых уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в бесконечность в особых точках системы интегральных кривых, то эти особые точки могут не быть состояниями равновесия.



Рис. 15.

Исходя из этого примера, мы попытаемся дать определение устойчивости состояния равновесия, используя для этой цели уже введенное нами представление о фазовой плоскости. Пусть рассматриваемая система находится в состоянии равновесия. Тогда изображающая точка на фазовой плоскости находится в неподвижности в одной из особых точек системы интегральных кривых. Если теперь мы выведем нашу систему из состояния равновесия, сообщив ей, например, некоторый толчок¹⁾, то изображающая точка сместится из особой точки и начнет двигаться по фазовой плоскости. «Выкрасим» для краткости речи изображающую точку в черный цвет, особую же точку оставим светлой (рис. 16). Мы можем тогда охарактеризовать устойчивое состояние равновесия таким образом: если при достаточно малом начальном смещении черная точка никогда не уйдет далеко от светлой, то светлая точка является устойчивым состоянием равновесия²⁾.

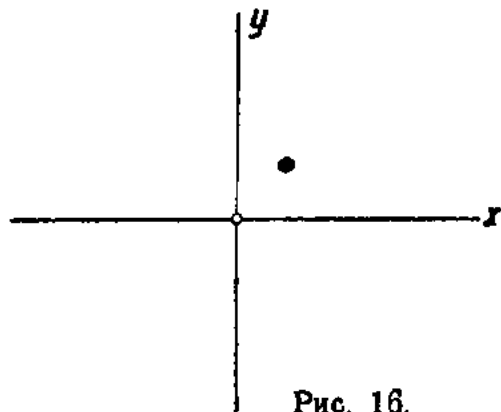


Рис. 16.

Ясно, что и эта характеристика не полна. Во-первых, назовем ли мы светлую точку устойчивой, если черная точка не уходит далеко при начальных смещениях в одних направлениях и уходит далеко, как бы мало мы ни сместили ее в других направлениях? Очевидно, что такая светлая точка не будет устойчивой, она, так сказать, лишь «условно» устойчива, при запрещении некоторого класса смещений. Нужно требовать, чтобы черная точка не уходила далеко от светлой в результате достаточно малого смещения в любом направлении.

Во-вторых, — и это самое существенное, — не являются достаточно определенными термины «не уйдет далеко», «останется вблизи» и т. д. Ясно, что понятие «близко», «далеко» зависит от конкретных физических условий задачи. Поэтому слова «далеко», «близко» не значат ничего другого, как уйдет или нет черная точка из некоторой заданной области, окружающей светлую точку, причем эта область может быть большей или меньшей в зависимости от условий задачи.

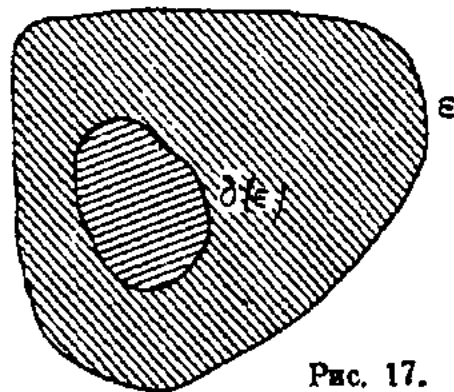


Рис. 17.

Поэтому окончательно мы остановимся на таком определении (рис. 17): *состояние равновесия является устойчивым, если при любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область ϵ) мы можем указать область $\delta(\epsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем*

1) В теории устойчивости обычно рассматриваются «мгновенные» толчки, роль которых сводится к мгновенному смещению изображающей точки на фазовой плоскости, т. е., иначе говоря, к мгновенному изменению начальных условий. Конечно, это идеализация реальных толчков.

2) Часто это же самое условие формулируют так: состояние равновесия устойчиво, если достаточно малое возмущение всегда останется малым.

свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границы области ϵ . Наоборот, состояние равновесия неустойчиво, если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область ϵ), для которой не существует области δ (ϵ), окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границы области ϵ .

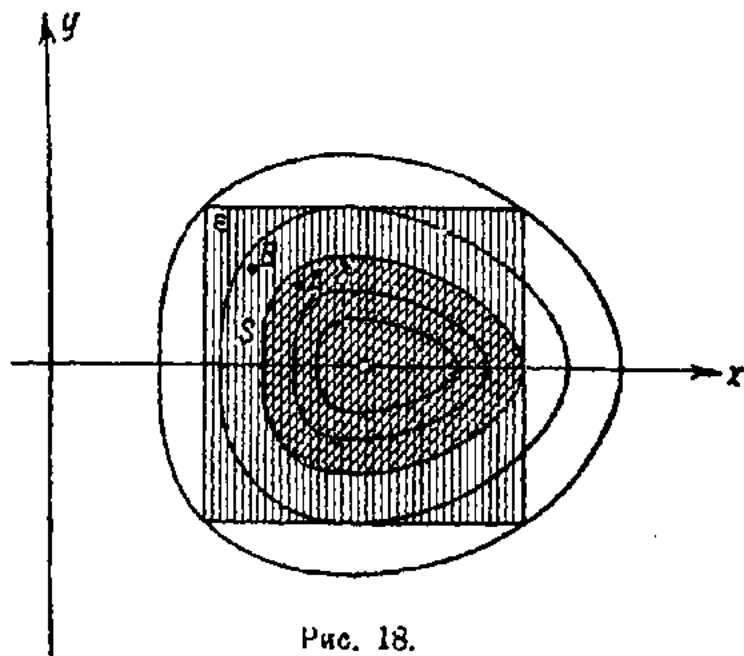


Рис. 18.

Эти определения связаны с представлением о фазовой плоскости рассматриваемой системы. Однако оно может быть сформулировано и без применения представления о фазовой плоскости.

Можно также перевести это определение устойчивости на язык математических неравенств, обозначив через $x(t)$ и $y(t)$ движение черной точки после смещения и предположив для простоты, что область допустимых отклонений представляет собой квадрат (рис. 18).

Мы получим тогда такую запись нашего определения: состояние равновесия $x = \bar{x}$; $y = 0$ называется устойчивым, если, задав наперед сколь угодно малое ϵ ($\epsilon > 0$), можно найти такое δ (ϵ), что если для $t = 0$

$$|x(0) - \bar{x}| < \delta \text{ и } |y(0)| < \delta,$$

то тогда для $0 < t < \infty$

$$|x(t) - \bar{x}| < \epsilon \text{ и } |y(t)| < \epsilon.$$

Таким образом определенную устойчивость мы будем называть «устойчивостью по Ляпунову» и именно ее мы будем иметь в виду, когда будем говорить просто об устойчивости. В последующем мы познакомимся с другими определениями устойчивости и с значением работ Ляпунова [3] в учении об устойчивости.

Сейчас мы перейдем к анализу устойчивости состояния равновесия гармонического осциллятора. Это рассмотрение кстати даст нам возможность наглядно представить, почему необходимо говорить в определении устойчивости о двух областях ϵ и δ .

Нетрудно убедиться, что особая точка типа центра соответствует устойчивому состоянию равновесия. Пусть нам задана сколь угодно малая область ϵ , например квадратная (вертикальная штриховка на рис. 18). Выберем из замкнутых кривых, окружающих особую точку, ту замкнутую кривую S , которая касается заданного квадрата и вся лежит внутри него. Заметим кстати, что это всегда можно сделать

независимо от того, имеют ли замкнутые интегральные кривые в непосредственном соседстве с особой точкой форму эллипсов или какую-либо другую.

Для наличия такой кривой необходимо лишь существование континуума замкнутых кривых, не имеющих особенностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке, что мы всегда и имеем в случае центра. Область внутри кривой S (двойная штриховка) и будет областью $\delta(\epsilon)$, так как если начальное положение черной точки будет внутри этой области (точка A), то она никогда не уйдет из квадрата ϵ , а будет совершать периодическое движение вокруг состояния равновесия. Мы могли бы, конечно, за область δ выбрать любую другую область, лежащую внутри кривой S , например область внутри квадрата, лежащего всеми своими точками внутри кривой A , кроме вершин, которые могут лежать на кривой S ¹⁾. Мы можем таким образом утверждать, что *состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия.*

§ 4. ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Для ответа на те вопросы, для которых трение играет существенную роль, мы должны отказаться от одной идеальной черты нашего гармонического осциллятора — отсутствия трения, сохранив остальную идеализацию. Мы придем, что сила трения пропорциональна скорости. Само собой понятно, что это последнее утверждение также представляет собой идеализацию — именно идеализацию реальных законов трения. Однако, как мы уже упоминали, когда идет речь о жидком трении или трении о воздух при достаточно малых скоростях, это предположение находится в удовлетворительном соответствии с опытом. С другой стороны, всякий иной закон трения нарушил бы линейность осциллятора, между тем мы пока ограничиваем наше рассмотрение только линейными системами.

Уравнение движения при сделанном предположении о законе трения напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (19)$$

где b — коэффициент трения, т. е. сила трения для скорости, равной единице. Электрическим аналогом такой механической системы с трением, пропорциональным скорости, является «томсоновский контур» с омическим сопротивлением.

Такой контур подчиняется уравнению:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (20)$$

где q — заряд на обкладках конденсатора, а L , R и C , как обычно, — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость.

1) Ясно, что нельзя за область $\delta(\epsilon)$ выбрать самую область ϵ , так как при всех начальных положениях черной точки внутри области ϵ , но вне области δ , например в точке B (рис. 18), она непременно выйдет из области ϵ .

Обозначая $\frac{b}{m} = 2h$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (или соответственно $\frac{R}{L} = 2h$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$), получим уравнения (19) и (20) в обычном виде:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид ¹⁾:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad (22)$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (23)$$

Как известно, при $h^2 > \omega_0^2$ эти корни действительные, а при $h^2 < \omega_0^2$ — комплексные.

В соответствии с этим в зависимости от знака $h^2 - \omega_0^2$ мы получим два типа решений и два различных процесса. При $h^2 < \omega_0^2$ мы получим затухающий осцилляторный процесс, при $h^2 > \omega_0^2$ — затухающий апериодический процесс.

1. Затухающий осцилляторный процесс. Обозначая $\omega_1^2 = \omega_0^2 - h^2$, получаем решение в виде:

$$x = e^{-ht} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t), \quad (24)$$

где A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, то

$$x = e^{-ht} \left\{ x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}. \quad (25)$$

Решение (24) может быть также записано в виде:

$$x = K e^{-ht} \cos (\omega_1 t + \alpha), \quad (26)$$

где

$$K = + \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega_1} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega_1 x_0}. \quad (27)$$

К аналогичному виду можно привести и выражение производной

$$\frac{dx}{dt} = -K \omega_1 e^{-ht} \sin (\omega_1 t + \alpha + \vartheta), \quad (28)$$

где ϑ определено уравнениями:

$$h = \omega_0 \sin \vartheta; \quad \omega_1 = \omega_0 \cos \vartheta; \quad (\omega_1^2 + h^2 = \omega_0^2). \quad (29)$$

¹⁾ За исключением частного случая $h^2 = \omega_0^2$.

Формулы (26) и (28) определяют один из типов затухающего колебательного движения, именно осцилляторный затухающий процесс, в котором затухание амплитуды происходит по показательному закону.

Полученные нами функции $x(t)$, равно как и функция $x(t)$, не являются периодическими функциями. Действительно, периодическими функциями называются, как известно, такие функции $f(t)$, для которых можно указать некоторую величину τ , так что

$$f(t + \tau) = f(t)$$

при любом значении аргумента t . Наименьшая величина τ называется периодом функции $f(t)$. Функции (26) и (28) не подходят под это определение, ибо для них приведенное условие не удовлетворяется для любых значений аргумента t . Поэтому периода в строгом смысле этого слова в этом случае не существует. Однако расстояние во времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия (в одном и том же направлении) постоянно и равно $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Точно так же постоянно и равно той же самой величине расстояние во времени между двумя последовательными максимальными отклонениями. Этот промежуток времени мы будем называть «условным периодом» затухающего осцилляторного процесса. Зависимость координаты от времени имеет вид, изображенный на рис. 19¹⁾.

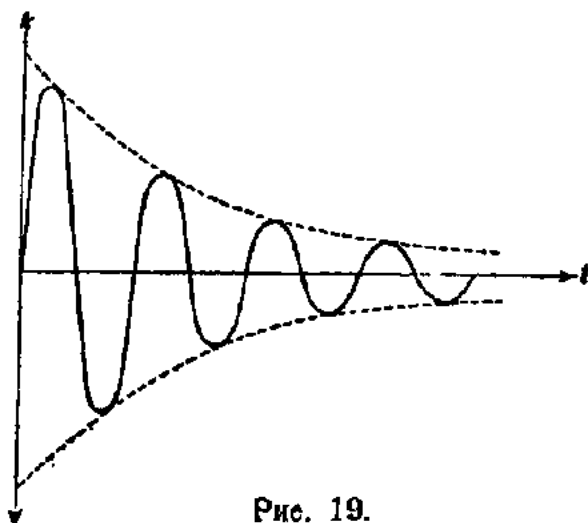


Рис. 19.

Скорость затухания рассматриваемого осцилляторного процесса может быть охарактеризована величиной h , так называемым показателем затухания. Численное значение h зависит от выбора единиц времени. Однако можно дать иную, лучшую характеристику затухания такого процесса, не зависящую от выбора единиц измерения.

Возьмем отношение двух последовательных экстремумов, направленных в одну и ту же сторону, например двух последовательных максимумов

$$\frac{x'_{\max}}{x''_{\max}} = e^{\frac{2\pi h}{\omega_1}} = e^{hT_1}. \quad (30)$$

Логарифм этой величины или, иначе говоря, разность логарифмов двух последовательных максимумов носит название логарифмического дe-времени затухания d , причем

$$d = hT_1. \quad (31)$$

¹⁾ Заметим, что все экстремумы (как минимумы, так и максимумы) не находятся на серединах временных расстояний между соответствующими нулями, а сдвинуты влево на величину $\frac{\vartheta}{\omega_1}$, где ϑ определяются формулами (29).

Чтобы еще иначе пояснить физический смысл логарифмического декремента d , заметим, что обратная величина $\frac{1}{d}$ дает число условных периодов, после которого амплитуда уменьшается в e раз (e — основание натуральных логарифмов)¹⁾.

Легко видеть, что полученный закон затухания колебаний тесно связан с принятой нами идеализацией закона трения. Только предположив, что сила трения пропорциональна скорости, мы получили закон убывания максимумов по геометрической прогрессии с показателем прогрессии e^{-d} . Ясно, с другой стороны, что самое понятие логарифмического декремента затухания имеет определенный смысл только при этом законе затухания и теряет свой смысл, если закон затухания таков, что отношение двух последовательных максимумов не остается постоянным. Следовательно, без специальных оговорок понятие о логарифмическом декременте затухания применимо только к системам линейным. Самое определение логарифмического декремента затухания может быть сделано по кривой, изображенной на рис. 19, или, что особенно удобно, по зависимости экстремумов от времени, нанесенной в полуллогарифмическом масштабе (вместо отклонений по оси ординат откладываются логарифмы наибольших отклонений). В этом последнем случае зависимость принимает вид прямой линии, угол наклона которой дает непосредственно показатель затухания h , откуда умножением на условный период T , получается логарифмический декремент затухания d (однако практически вместо этого прямого метода чаще применяется более удобный метод определения затухания по кривой резонанса).

Мы видим, что затухающее колебательное движение характеризуется четырьмя величинами: условным периодом T , (или соответствующей циклической условной частотой ω_1), логарифмическим декрементом затухания d , амплитудой K и фазой α .

Свойствами системы определяются условный период и логарифмический декремент затухания колебаний. При заданном колебательном устройстве, при заданной системе остаются произвольными амплитуда и фаза, которые определяются начальными условиями.

2. Изображение затухающего осцилляторного процесса на фазовой плоскости. Перейдем теперь к исследованию фазовой плоскости рассматриваемой системы, к построению ее «портрета», отображающего всю совокупность возможных движений.

Зная решение дифференциального уравнения (21), можно найти уравнение семейства фазовых траекторий. По (22) параметрические уравнения траекторий на фазовой плоскости имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \\ y = \dot{x} &= A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

¹⁾ Например, если $d = 0,02$, то это значит, что через 50 условных периодов амплитуда уменьшается в e раз, т. е. примерно до $\frac{1}{3}$ первоначальной величины.

Исключая из этих уравнений t , найдем координатное уравнение семейства траекторий¹⁾:

$$(y - \lambda_1 x)^{-\lambda_1} (y - \lambda_2 x)^{\lambda_2} = C_1. \quad (33)$$

Нас сейчас интересует случай, когда λ_1 и λ_2 — комплексные сопряженные величины

$$\lambda_1 = -h + i\omega_1; \quad \lambda_2 = -h - i\omega_1.$$

В этом случае, очевидно, также и $y - \lambda_1 x$, $y - \lambda_2 x$ будут комплексными сопряженными величинами. Чтобы привести выражение (33) к действительному виду, положим

$$y - \lambda_1 x = |z| e^{-i\chi}; \quad y - \lambda_2 x = |z| e^{+i\chi},$$

где $|z|^2 = (y + hx)^2 + (x\omega_1)^2$; $\operatorname{tg} \chi = \frac{x\omega_1}{y + hx}$.

Тогда выражение (33) примет вид:

$$|z|^{-\lambda_1 + \lambda_2} e^{i\chi(\lambda_1 + \lambda_2)} = C_1,$$

или иначе

$$|z|^2 = C_2 e^{-2i\chi \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = C_2 e^{-\frac{2h}{\omega_1} \chi} = C_2 e^{2\frac{h}{\omega_1} \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)}$$

(постоянный множитель $e^{\frac{\pi h}{\omega_1}}$ включен в произвольную постоянную C_2). Наконец, переходя к координатам x , y , получим искомое уравнение семейства фазовых траекторий:

$$(y + hx)^2 + \omega_1^2 x^2 = C_2 e^{2\frac{h}{\omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y + hx}{\omega_1 x}}. \quad (34)$$

Покажем, что это — семейство спиралей, имеющих асимптотическую точку в начале координат.

Для этой цели воспользуемся линейным преобразованием координат — приемом, к которому мы и в дальнейшем будем неоднократно прибегать. Именно введем новые переменные u и v , положив

$$u = \omega_1 x \quad \text{и} \quad v = hx + y. \quad (35)$$

Тогда уравнение (34) получит вид:

$$\rho = C_2 e^{\frac{h}{\omega_1} \psi}, \quad (36)$$

причем $u = \rho \cos \psi$; $v = \rho \sin \psi$.

Как известно, преобразование вида (35) можно рассматривать двояко — либо в «пассивном», либо в «активном» смысле, т. е. либо как преобразование от прямоугольных координат x , y к косоугольным

1) Исключение можно вести так: будем рассматривать систему (32) как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$. Тогда найдем: $e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{A} \frac{(y - x\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$; $e^{\lambda_2 t} = \frac{1}{B} \frac{y - x\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. После логарифмирования t исключается без затруднений.

координатам u, v с сохранением геометрических фигур (обычная, «пассивная» интерпретация аналитической геометрии), либо как деформацию фигур с сохранением прежней ортогональной системы координат («активная» интерпретация таких преобразований, характерная, например, для теории упругости)¹⁾.

Эта деформация фигур в нашем случае сводится к простому повороту и укорочениям или удлинением по двум главным²⁾ осям. Остановившись на активной интерпретации, мы можем сказать, что после линейной деформации (35) семейство интегральных кривых (34) переходит в семейство простых логарифмических спиралей (36), для которых начало координат является асимптотической точкой. Так как

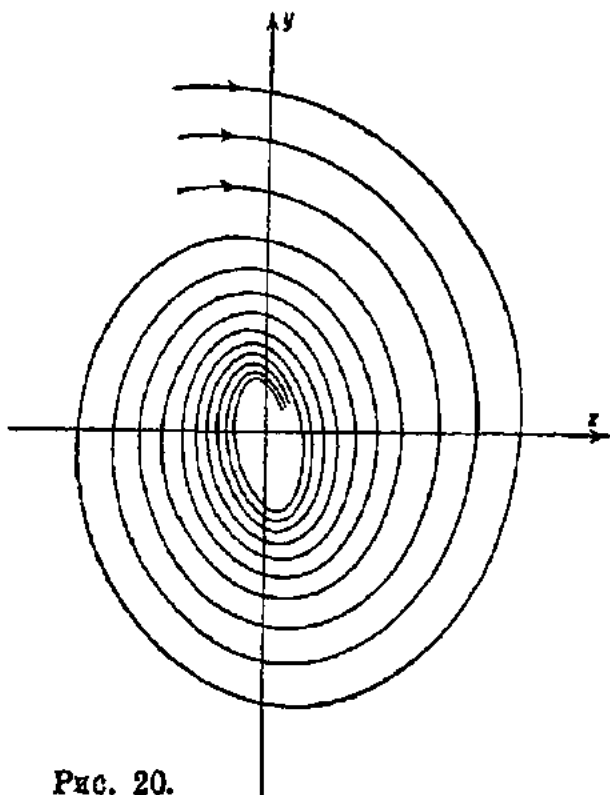


Рис. 20.

очевидно, что деформация, о которой шла речь, не может изменить качественного характера интегральных кривых, то мы можем сказать, что первоначальное семейство (34) также является семейством спиралей, для которых начало является асимптотической точкой. Относительно характера этих спиралей можно заметить следующее. При малых $\frac{h}{\omega_1}$, т. е. малых логарифмических декрементов затухания, логарифмическая спираль (36) в течение каждого оборота близка к соответствующему кругу $u^2 + v^2 = \text{const.}$

Этот круг при линейном преобразовании (35) превращается в эллипс $y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x = \text{const.}$ Отсюда мы можем заключить, что при малых $\frac{h}{\omega_1}$

исследуемая нами спираль (34) близка на протяжении каждого оборота к эллипсу (с соответствующим образом выбранным значением константы C)

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x = C. \quad (37)$$

На рис. 20 изображено семейство исследуемых нами спиралей, являющихся фазовыми траекториями на плоскости x, y . Семейство обычных логарифмических спиралей превращается в такое при линейном преобразовании (35).

3. Уравнения фазовых траекторий в полярных координатах. Двигаясь по логарифмической спирали, определяемой уравнением (36), в сторону возрастания угла ϕ , т. е. против часовой стрелки, мы получим возрастание радиуса-вектора с каждым оборотом ($h > 0$). Движе-

1) Заметим, что детерминант преобразования $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ h & 1 \end{vmatrix} = \omega_1 \neq 0$.

2) См., например, F. Klein, *Elementarmathematik vom höchsten Standpunkte aus*, Band II, S. 75, 1925.

ние в том же направлении по спирали (34) даст нам также увеличение радиуса-вектора после каждого оборота¹⁾. Однако движение изображающей точки по нашим спиральям происходит по часовой стрелке, так как при $y=x > 0$ координата x должна увеличиваться, а при $y=x < 0$ должна уменьшаться. Отсюда следует, что радиус-вектор после каждого оборота уменьшается. Подсчитаем величину этого уменьшения при полуобороте, обороте и т. д. С этой целью перейдем к полярным координатам (рис. 21)

$$x = r \cos \varphi; \quad y = -r \sin \varphi \quad (38)$$

с таким направлением возрастания углов, которое соответствует движению изображающей точки по фазовой плоскости. Вместо (34) получим тогда уравнение:

$$r^2 = \frac{C}{\Phi_1(\varphi)} e^{2 \frac{h}{\omega_1} \{-\varphi + \Phi_2(\varphi)\}}, \quad (39)$$

где $\Phi_1(\varphi)$ и $\Phi_2(\varphi)$ — периодические функции с периодом π ²⁾.

Пусть в начальном положении полярные координаты изображающей точки были (r_0, φ_0) . Тогда по формуле (39) имеем:

$$r_0^2 = r_{\varphi_0}^2 = \frac{C}{\Phi_1(\varphi_0)} e^{2 \frac{h}{\omega_1} \{-\varphi_0 + \Phi_2(\varphi_0)\}}.$$

Подсчитаем значение радиуса-вектора через пол-оборота. Полагая в формуле (39) $\varphi = \varphi_0 + \pi$ и учитывая периодичность функций Φ_1 и Φ_2 , получаем:

$$r_1^2 = r_{\varphi_0 + \pi}^2 = \frac{C}{\Phi_1(\varphi_0)} e^{2 \frac{h}{\omega_1} \{-\varphi_0 - \pi + \Phi_2(\varphi_0)\}}.$$

Следовательно,

$$r_1 = r_0 e^{-\frac{\pi h}{\omega_1}}. \quad (40)$$

Аналогично можно подсчитать, что значение радиуса-вектора после полного оборота (рис. 22) будет:

$$r_2 = r_0 e^{\frac{-2h}{\omega_1}} = r_0 e^{-d},$$

после n полных оборотов:

$$r_{2n} = r_0 e^{-nd}. \quad (41)$$

1) Обход против часовой стрелки в системе x, y соответствует обходу против часовой стрелки в системе u, v , так как детерминант $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ h & 1 \end{vmatrix} = \omega_1 > 0$

2) $\Phi_1(\varphi) = \sin^2 \varphi + \omega_0^2 \cos^2 \varphi - 2h \sin \varphi \cos \varphi,$

$$\Phi_2(\varphi) = \arctg \left[\left\{ \frac{-\operatorname{tg} \eta + h}{\omega_1} \right\} + \eta \right];$$

причем $\eta = \varphi - k\pi$ (k — целая часть отношения $\frac{\varphi}{\pi}$).

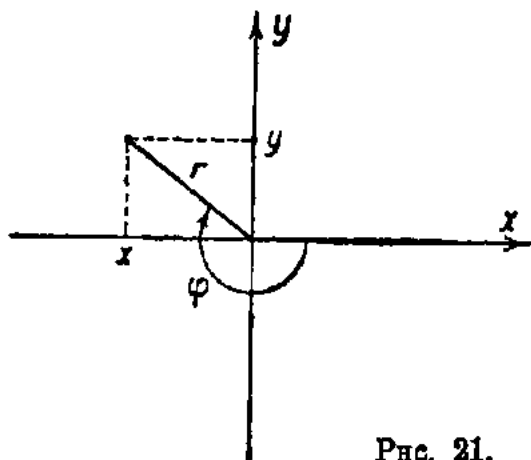


Рис. 21.

Мы видим, что уменьшение радиуса-вектора происходит по найденному уже нами показательному закону с логарифмическим декрементом затухания $d = hT_1$.

Мы выяснили таким образом характер фазовых траекторий. Можно показать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна спираль, соответствующая определенному значению константы C , или, иначе говоря, соответствующая определенным начальным условиям. Вся плоскость заполнена спиралями, вложенными друг в друга. Исключение составляет лишь точка $x = 0, y = 0$, которую следует рассматривать как отдельную фазовую траекторию. Как мы уже видели, изображающая точка движется по этим спиралям таким образом, что радиус-вектор после каждого оборота уменьшается в e^{-d} раз. Можно показать, что фазовая скорость

$$v = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt}$$

при движении изображающей точки по спирали никогда не обращается в нуль, постепенно убывая с каждым оборотом,

Рис. 22.

так, что время каждого оборота остается неизменным и равным $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Фазовая скорость всегда равна нулю для «движения», отображаемого траекторией $x = 0, y = 0$.

4. Непосредственное исследование дифференциального уравнения. Мы исследовали характер движений на фазовой плоскости для случая линейного осциллятора при наличии трения, пропорционального скорости, и выяснили, что процессам при малом затухании ($\omega_0^2 > h^2$) соответствует движение изображающей точки по спиралеобразной фазовой траектории, имеющей асимптотическую точку в начале координат. Само начало координат в этом случае является состоянием равновесия. Однако мы получили эту картину на фазовой плоскости, исходя из заранее найденного решения (22). Мы могли бы получить эту же картину непосредственно из (21), не зная решения (22).

Заменим, как мы уже это делали, исходное уравнение второго порядка (21) двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -2hy - \omega_0^2 x. \quad (42)$$

Деля одно уравнение на другое, получим дифференциальное уравнение интегральных кривых в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение, подобно уравнению (14), опре-

делает на фазовой плоскости некоторое поле касательных, а вместе с уравнениями (42) — некоторое векторное поле с единственной особой точкой $x=0$, $y=0$.

Легко исследовать приближенно с помощью изоклин характер этого поля. Уравнение изоклины, для точек которой интегральные кривые имеют наклон χ , напишется так:

$$\frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} = \chi \quad \text{или} \quad y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{\chi + 2h}, \quad (44)$$

т. е. изоклины и в этом случае представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Задав, например, достаточно большой ряд значений χ (при фиксированных h и ω_0 , которые определяются системой), получим семейство изоклин и с помощью их с нужной степенью точности сможем построить векторное поле¹⁾.

На рис. 23 изображено такое векторное поле, построенное при помощи нескольких изоклин, и уже из этого чертежа можно предугадать характер интегральных кривых.

Полученное после исключения времени уравнение (43) допускает интеграцию, так как оно принадлежит к классу однородных уравнений.

Интегрируя по обычным правилам (подстановка $z = \frac{y}{x}$), получим для нашего случая ($\omega_0^2 > h^2$) уравнение интегральных кривых:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = Ce^{2\frac{h}{\omega_0} \arctg \frac{y+hx}{\omega_0 x}}, \quad (45)$$

исследованиям которого мы уже занимались. Теперь мы это уравнение получили иным путем, не зная решения уравнения (21). Выражение фазовой скорости v находится из уравнений (11) и (42):

$$v = i(y) + j(-2hy - \omega_0^2 x) \quad (46)$$

и

$$|v|^2 = \omega_0^4 x^2 + 4h\omega_0^2 xy + (1 + 4h^2)y^2. \quad (47)$$

Мы видим при этом способом рассмотрения сразу, почти без всяких вычислений, что фазовая скорость нигде не обращается в нуль, за исключением начала координат $x=0$, $y=0$, но уменьшается по мере приближения представляющей точки к началу координат.

Что можно сказать о характере движений в нашей системе, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости?

1) Заметим, что метод изоклин является не только методом приближенного численного интегрирования, но и методом, с помощью которого можно строго доказывать различные утверждения, относящиеся к интегральным кривым.

Во-первых, можно утверждать, что все фазовые траектории соответствуют осциллирующим, но затухающим, стремящимся к положению равновесия движениям (за исключением «движения» по траектории $x=0$, $y=0$). Действительно, все эти траектории — спирали; так как при движении представляющей точки по спирали координата и скорость системы многократно проходят через нуль, то спирали на фазовой

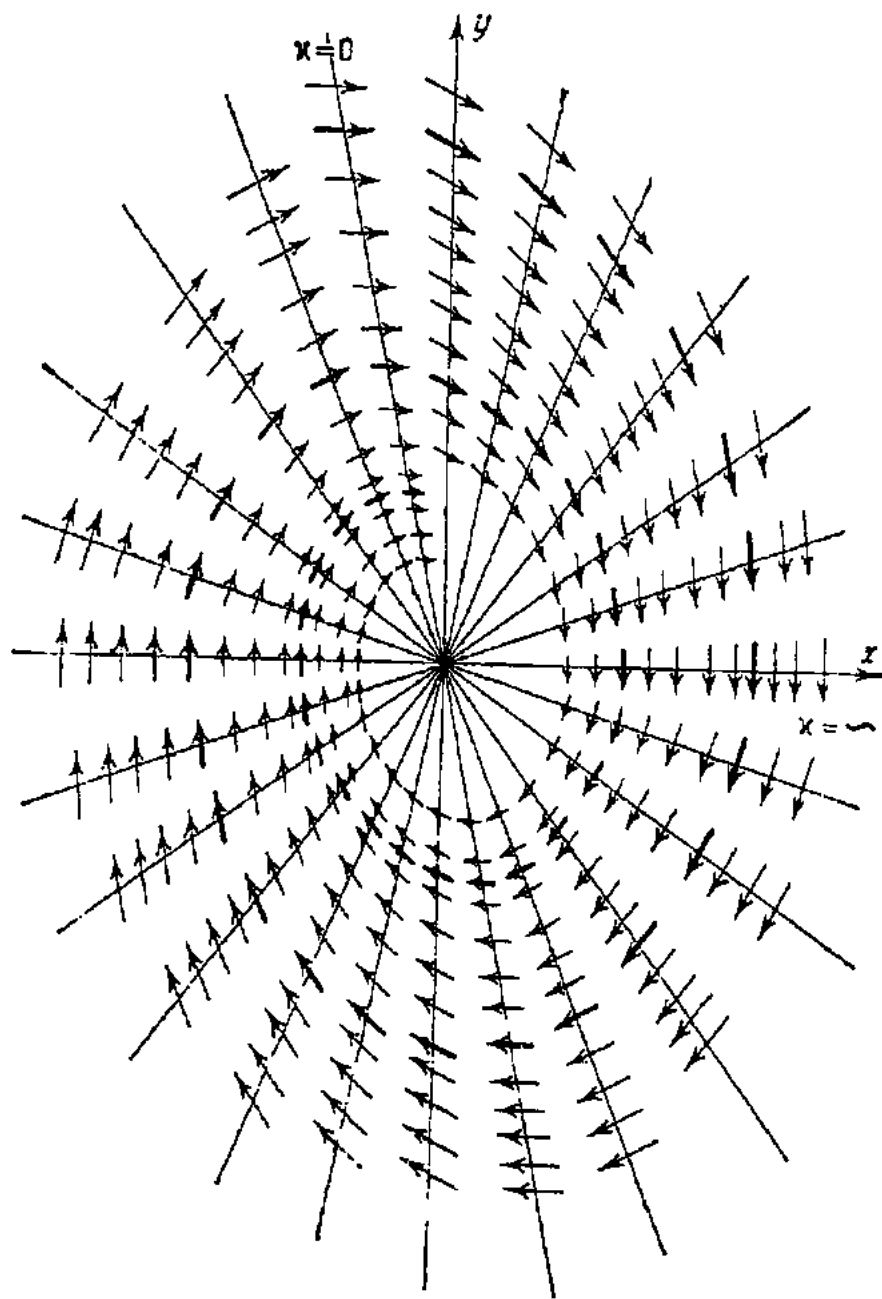


Рис. 23.

плоскости отображают осцилляторный процесс. Далее радиус-вектор представляющей точки, двигающейся по спирали, уменьшается после каждого оборота; это значит, что мы имеем дело с затухающим процессом, максимальные значения x и y уменьшаются от оборота к обороту. Во-вторых, очевидно, что особая точка $x=0$, $y=0$ соответствует состоянию равновесия.

Результаты, полученные из анализа характера движений на фазовой плоскости, можно сформулировать так: *наша система при любых начальных условиях совершает затухающие осцилляторные движения*

вокруг положения равновесия $x=0$, $y=0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.

В рассматриваемом случае мы имеем только одну особую точку системы интегральных кривых, являющуюся асимптотической точкой для всех интегральных кривых.

Такая особая точка, которая является асимптотической точкой всех интегральных кривых, имеющих вид спиралей, вложенных друг в друга, называется *фокусом*.

Выясним теперь вопрос, является ли в рассматриваемом случае особая точка типа фокуса устойчивой. Принимая во внимание, что представляющая точка по всякой интегральной кривой будет двигаться приближаясь к особой точке, легко убедиться в том, что условие устойчивости состояния равновесия, сформулированное нами выше, в этом случае соблюдается. Действительно, мы всегда можем выбрать такую область δ (рис. 24, двойная штриховка), чтобы представляющая точка не вышла за пределы области ϵ (простая штриховка). Следовательно, в рассматриваемом нами случае состояние равновесия устойчиво, и особая точка — устойчивый фокус.

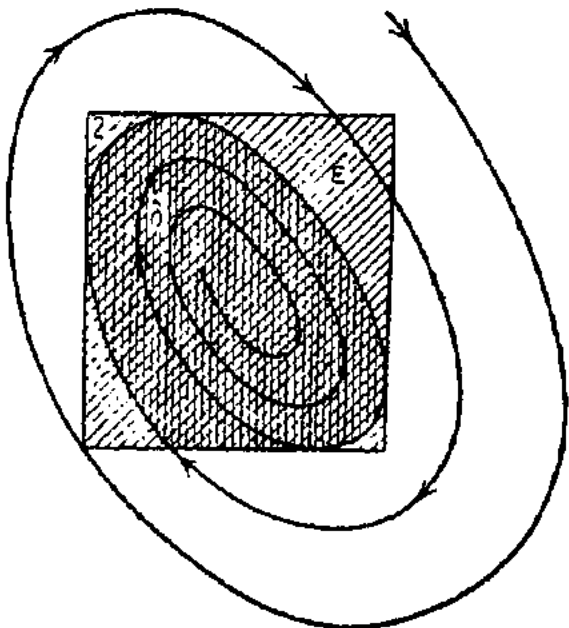


Рис. 24.

Устойчивость особой точки типа фокуса, очевидно, связана с тем раскручиваются или скручиваются интегральные кривые, считая по направлению движения представляющей точки. Так как направление движения представляющей точки однозначно определено выбором координат (точка должна двигаться по часовой стрелке), то вместе с тем (так как направление отсчета времени не может быть изменено) устанавливается и устойчивость особой точки в рассматриваемом случае. Наоборот, если бы спирали раскручивались (считая в том же направлении), то особая точка была бы неустойчива. Как легко убедиться, например, из уравнения (36), скручивание интегральных кривых обусловлено тем, что $h > 0$, так как только в этом случае радиус-вектор при движении по часовой стрелке убывает (само собой разумеется, что мы считаем ω положительным и действительным). Таким образом особая точка типа фокуса, вообще говоря, может быть как устойчивой, так и неустойчивой (в отличие от особой точки типа центра, которая, как мы видели, всегда устойчива). В рассматриваемом случае фокус устойчив, потому что $h > 0$. Физический смысл этого условия устойчивости ясен — трение должно быть положительно, т. е. должно препятствовать движению и потреблять энергию. Такое положительное, препятствующее движению трение, на преодоление которого затрачивается работа, не может вызвать неустойчивости, и если положение равновесия в системе было устойчиво при отсутствии трения (в гармоническом осцилляторе), то оно останется устойчивым и при наличии положительного трения,

При дальнейшем рассмотрении мы встретимся с неустойчивыми особыми точками типа фокуса.

Рассмотренный нами устойчивый фокус обладает «более сильной» устойчивостью, чем рассмотренный в предыдущем параграфе центр. Действительно, в случае устойчивого фокуса будет выполнено не только условие устойчивости по Ляпунову, но и более жесткое требование. Именно, при любых начальных отклонениях система по прошествии достаточно длинного промежутка времени вернется как угодно близко к положению равновесия. Такую устойчивость, при которой начальные отклонения не только не нарастают, но, наоборот, затухают, мы будем называть *абсолютной устойчивостью*. В рассмотренном нами случае линейного осциллятора фокус абсолютно устойчив.

5. Затухающий аperiodический процесс. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения действительны, т. е. когда $h^2 > \omega_0^2$.

В этом случае, обозначая $q^2 = h^2 - \omega_0^2$, получим решение в виде:

$$x = e^{-ht} (Ae^{qt} + Be^{-qt}) \quad (48)$$

или, вводя обозначения:

$$\lambda_1 = -h + q = -q_1; \quad \lambda_2 = -h - q = -q_2$$

(так что $q_2 > q_1 > 0$), — в виде:

$$x = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (49)$$

Здесь A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, то

$$x = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t}. \quad (50)$$

Нашей задачей является исследовать характер возможных движений в зависимости от начальных условий.

Во-первых, очевидно, что при всяких начальных условиях движение затухает, так как $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ и, значит, при $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$. Чтобы выяснить подробнее характер затухания, найдем t_1 и t_2 — моменты времени (т. е. промежутки времени после начального момента), для которых соответственно обращаются в нули x и \dot{x} . Воспользовавшись (50), находим следующие уравнения для определения t_1 и t_2 :

$$e^{(q_2 - q_1)t_1} = \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{x_0 + q_2 x_0} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{x_0 + q_2 x_0}, \quad (51)$$

$$e^{(q_2 - q_1)t_2} = \frac{q_2(\dot{x}_0 + q_1 x_0)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0(q_2 - q_1)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)}. \quad (52)$$

Из этих уравнений сразу видно, что каждое из них имеет не более одного корня; таким образом осцилляторное затухание невозможно; мы имеем дело с так называемым аperiodическим процессом

Выясним, когда уравнение, определяющее t_2 , не имеет ни одного положительного корня. В этом случае движение монотонно затухает, асимптотически стремясь к нулю. Как видно из выражения для t_2 (52), это будет, если

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 + q_2 x_0} < 0. \quad (53)$$

На рис. 25 указана область начальных значений, которые удовлетворяют этому неравенству (область II). Для остальных начальных значений

значений $\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 + q_2 x_0} > 0$ уравнение,

определяющее t_2 , имеет положительный корень; это значит, что смещение не убывает монотонно, а сперва возрастает по абсолютной величине и, лишь достигнув некоторого экстремума, начинает убывать, асимптотически стремясь к нулю.

Здесь следует различать два случая, смотря по тому, имеет ли при рассматриваемых начальных условиях уравнение, определяющее t_1 , положительный корень или такого корня нет. Если такого корня нет, то смещение в течение всего времени движения ($0 < t < \infty$) сохраняет свой знак; система отдаляется от положения равновесия, достигает некоторого максимального отклонения и затем монотонно приближается к положению равновесия (но не проходит через положение равновесия). По (51) этот случай имеет место, если

$$\frac{x_0}{\omega_0 + q_2 x_0} > 0. \quad (54)$$

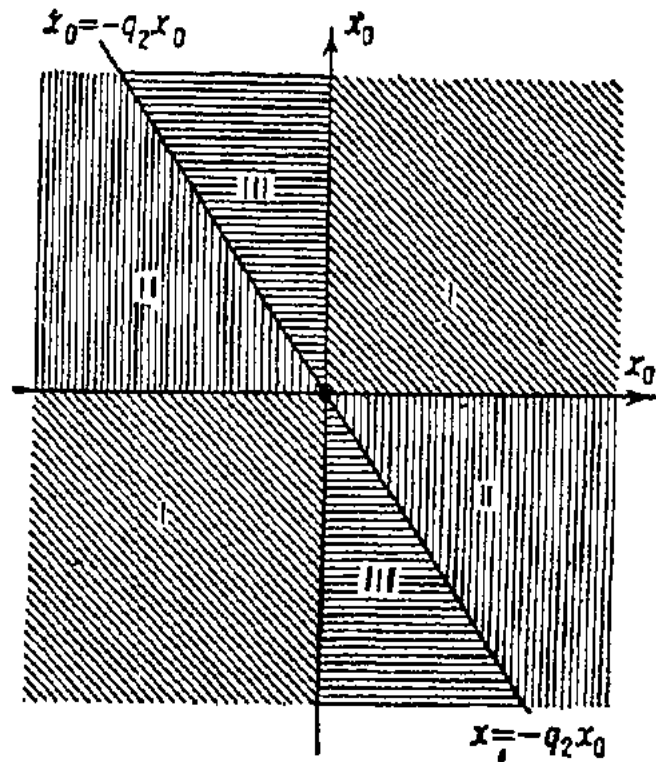


Рис. 25.

На рис. 25 цифрой I отмечены области начальных значений, приводящих к движениям такого типа.

Если уравнение, определяющее t_1 , имеет положительный корень, то система сначала приближается к положению равновесия, в момент $t = t_1$ проходит через положение равновесия¹⁾, далее в момент $t = t_2$ достигает некоторого максимального отклонения в направлении, противоположном начальному отклонению, и, наконец, монотонно приближается к положению равновесия, не достигая, однако, его в конечное время.

На рис. 25 область III соответствует начальным значениям, приводящим к такого рода движениям.

¹⁾ Нетрудно видеть из уравнений (51) и (52), что $e^{(q_2 - q_1)(t_2 - t_1)} = \frac{q_2}{q_1}$ и, следовательно, непременно $t_2 > t_1$.

Связь между характером движения и начальными условиями можно представить графически еще и в другом виде, именно изобразить зависимость смещения от времени для всех трех случаев I, II, III; это и выполнено на рис. 26, причем предполагается, что во всех случаях начальное смещение $x_0 > 0$.

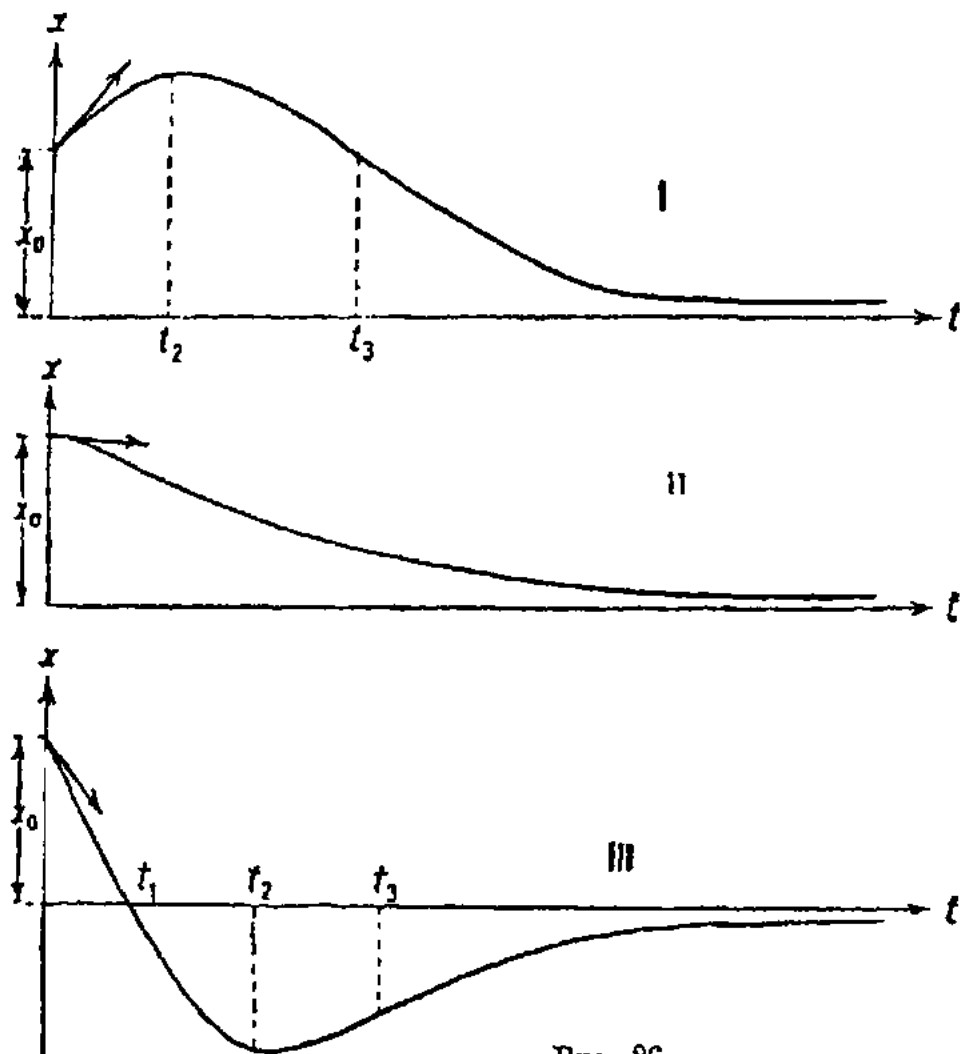


Рис. 26.

6. Изображение аперiodического процесса на фазовой плоскости. Перейдем теперь к исследованию интегральных кривых на фазовой плоскости. Мы уже нашли координатное уравнение семейства интегральных кривых. Оно имеет вид:

$$(y - \lambda_1 x)^{-\lambda_1} (y - \lambda_2 x)^{\lambda_2} = C_1 \quad (33)$$

или в принятых нами сейчас обозначениях:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2}. \quad (55)$$

Чтобы исследовать это семейство кривых, опять воспользуемся линейным преобразованием координат:

$$y + q_1 x = v; \quad y + q_2 x = u.$$

После этого преобразования уравнение (55) примет в новых переменных простой вид:

$$v = C u^a, \quad \text{где } a = \frac{q_2}{q_1} > 1. \quad (56)$$

Будем истолковывать u и v как прямоугольные координаты. Мы можем сказать, что после преобразования мы получили семейство «парабол», тип которых определяется характером показателя $a = \frac{q_2}{q_1}$. Однако независимо от характера показателя (т. е. независимо от того, будет ли он числом целым или дробным, четным или нечетным и т. д.) мы можем утверждать следующее: 1) все интегральные кривые, за исключением кривой, соответствующей $C = \infty$, касаются в начале координат оси u , так как $\frac{dv}{du} = C au^{a-1}$, следовательно, $\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=0} = 0$; 2) интегральные кривые при $C_1 = 0$ и $C_1 = \infty$ вырождаются в прямые: при $C_1 = 0$ имеем $v = 0$, т. е. ось u ; при $C_1 = \infty$ имеем $u = 0$, т. е. ось v ; 3) интегральные кривые обращены выпуклостью к оси u ¹⁾, ординаты их монотонно возрастают по абсолютной величине при увеличении u . Семейство таких парабол изображено на рис. 27.

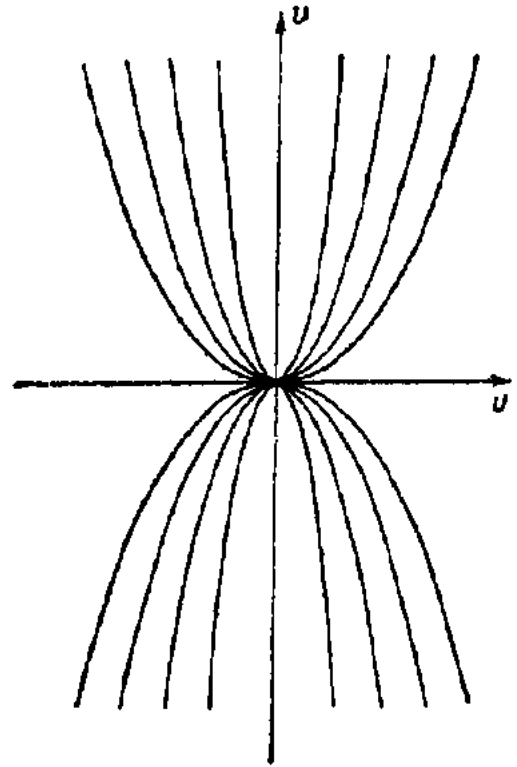


Рис. 27.

Перейдем теперь обратно на плоскость x, y . Оси v на плоскости u, v соответствует прямая $y + q_2 x = 0$ на плоскости x, y ; оси u — прямая $y + q_1 x = 0$. Остальные интегральные кривые или точнее остальные кривые семейства (55) на плоскости x, y представляют собой деформированные параболы, касающиеся прямой $y = -q_1 x$ («бывшей» оси u). Для того чтобы примерно изобразить это семейство кривых, нужно учесть еще следующие обстоятельства: 1) кривые семейства имеют параболические бесконечные ветви, параллельные прямой $y = -q_2 x$; 2) кривые семейства имеют горизонтальные касательные (параллельные оси x) в точках встречи с прямой $y = -\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} x$ ($\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} < q_1$); 3) кривые семейства имеют вертикальные касательные (параллельные оси y) в точках встречи с осью x . Это семейство кривых грубо изображено на рис. 28.

Подобно предыдущему случаю, мы можем и в этом случае прийти к полученным результатам, не интегрируя дифференциального уравнения (21), а заменяя это уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка и исключая из них время. Мы получим то же уравнение интегральных кривых, как и в предыдущем случае:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} \quad (43)$$

1) Так как: $\frac{v''}{v} = \frac{a(a-1)}{u^2}$.

Единственная особая точка этого семейства кривых есть точка $x=0, y=0$, соответствующая состоянию равновесия системы. Изоклины и в этом случае будут прямыми, определенными уравнениями (44). Но так как в рассматриваемом случае $h^2 > \omega^2$, то самое расположение изоклин будет несколько иным (рис. 29). Точно так же при интегрировании уравнения (43) подстановкой $z = \frac{y}{x}$ мы получим (вслед-

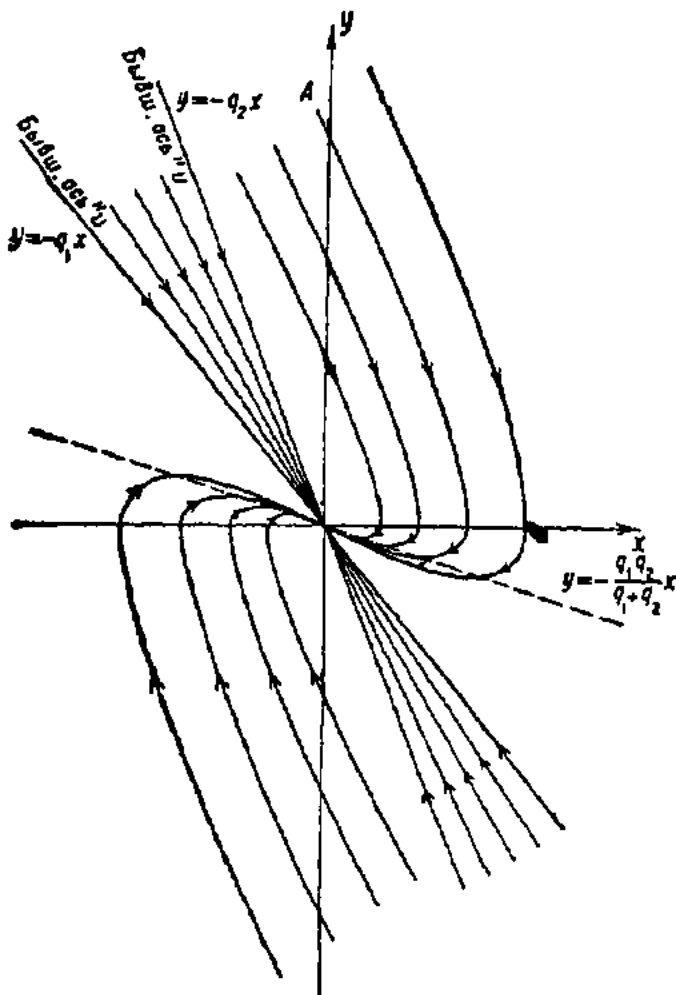


Рис. 28.

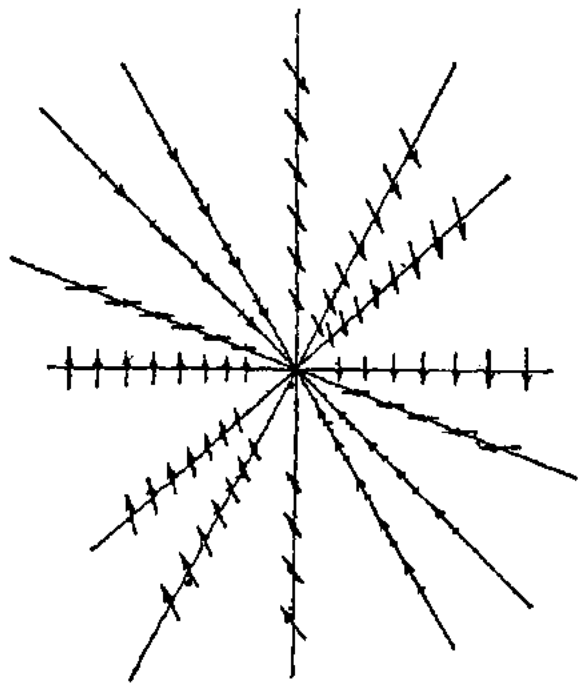


Рис. 29.

ствие того, что $h^2 > \omega_0^2$) результат, отличный от предыдущего случая, именно уравнение семейства интегральных кривых «параболического типа»:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C \left[\frac{\frac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}{\frac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - \omega_0^2}}}$$

или

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2}, \quad (55)$$

где $q_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ и $q_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$, т. е. то же уравнение, которое было нами выше получено иным путем (исключением t из решений исходного дифференциального уравнения).

Направление движения представляющей точки определяется с помощью тех же соображений, что и в предыдущих случаях, именно из

условия, что при $y = \dot{x} > 0$ значение x должно возрастать. Так как тангенс угла касательной к интегральной кривой с осью x изменяет знак только один раз при пересечении с осью x , то сразу видно, что представляющая точка будет двигаться по интегральным кривым в направлениях, указанных на рис. 28 стрелками, т. е. всегда будет приближаться к началу координат. Скорость движения представляющей точки, как и в предыдущих случаях, обращается в нуль только там, где одновременно $x = 0$ и $\dot{y} = 0$, т. е. в особой точке рассматриваемого дифференциального уравнения.

Как мы уже говорили, мы будем делать различие между *интегральными кривыми* и *фазовыми траекториями*, так как одной интегральной кривой может соответствовать несколько существенно различных движений или, иначе говоря, несколько различных фазовых траекторий. Например, в рассматриваемом случае, задавая определенное значение константы C , мы еще не фиксируем единственную траекторию, так как в нашем случае каждая интегральная кривая проходит через особую точку и, следовательно, состоит из трех фазовых траекторий (две из них соответствуют движениям, асимптотическим к состоянию равновесия, третьей является само состояние равновесия). В нашем случае все интегральные кривые проходят через особую точку. Такая особая точка, через которую проходят интегральные кривые, подобно тому, как семейство парабол $y = cx^2$ ($a > 0$) проходит через начало координат, носит название *узла*. Нетрудно видеть, что состояние равновесия, соответствующее в нашем случае особой точке — узлу, — является устойчивым по Ляпунову, так как изображающая точка по всем интегральным кривым движется по направлению к началу координат. Устойчивое состояние равновесия, которое соответствует особой точке типа узла, мы в дальнейшем будем называть *устойчивым узлом*. Как мы убедимся в дальнейшем, узел может быть и неустойчивым, для чего достаточно, чтобы h было отрицательно. Как и в случае фокуса, физический смысл этого обстоятельства заключается в том, что если состояние равновесия в системе без трения с одной степенью свободы устойчиво, то прибавление положительного трения, т. е. трения, на преодоление которого должна затрачиваться работа, не может нарушить устойчивости (даже более того — положительное трение сообщает положению равновесия абсолютную устойчивость).

Рассмотрим несколько подробнее физические черты трех типов аperiodических движений, изображенных на рис. 26. Прежде всего, если начальная скорость и начальное отклонение одного знака (т. е. если представляющая точка лежит в области I на рис. 25), то система сначала будет удаляться от положения равновесия, причем скорость ее будет постепенно убывать (начальная кинетическая энергия расходуется на увеличение потенциальной энергии и на преодоление трения). Когда скорость падает до нуля (точка t_2), система начнет двигаться назад к положению равновесия, причем сначала скорость будет возрастать, так как восстанавливающая сила больше силы трения. Но при движении сила трения возрастает (так как скорость возрастает), а восстанавливающая сила убывает (так как система приближается

к положению равновесия), и, следовательно, начиная с какого-то момента (точка t_2 на рис. 26, I), скорость, достигшая к этому моменту максимума, начнет снова убывать. Система будет асимптотически приближаться к положению равновесия.

Другой случай, когда начальная скорость и начальное отклонение разных знаков, т. е. начальный толчок направлен в сторону, противоположную начальному отклонению, приводит к двум различным типам движений (II и III). Если начальный толчок мал по сравнению с начальным отклонением, то система вследствие наличия большого трения не может перейти через положение равновесия и будет асимптотически приближаться к положению равновесия (кривая II). Если же начальная скорость достаточно велика, то система в некоторый момент t_1 пройдет через положение равновесия (кривая III) и после этого еще будет обладать некоторой скоростью, направленной от положения равновесия, т. е. в ту же сторону, в которую отклонена система. При этом получается уже рассмотренное движение типа I; система достигает некоторого наибольшего отклонения и затем асимптотически приближается к положению равновесия. Таким образом движение типа III только в первой своей части (до точки t_1) отличается от движения типа I. После же точки t_1 движение III аналогично движению типа I. С другой стороны, движение типа I после точки t_2 аналогично движению типа II. И действительно, движение представляющей точки по некоторым фазовым кривым, проходящим через все три области I, II и III (например по кривой, отмеченной буквой A на рис. 28), будет принадлежать либо к III, либо к I, либо ко II типу в зависимости от того, в какой области будет лежать представляющая точка в начальный момент.

Предельного случая (когда $h^2 = \omega_0^2$) мы не будем рассматривать подробно, а ограничимся лишь краткими указаниями, ибо этот случай (как, впрочем, и всякий случай, когда соотношение между параметрами системы точно фиксировано) не может быть точно реализован в физической системе и имеет значение только как граница между двумя различными типами затухающих процессов — осцилляторным и апериодическим. В случае $h^2 = \omega_0^2$, как известно, решение исходного дифференциального уравнения (21) нужно искать в виде:

$$x = (A + Bt) e^{-at}.$$

Можно и в этом случае не искать решения дифференциального уравнения второго порядка, а перейти к уравнению первого порядка, определяющему фазовые кривые (43). Мы и в этом случае получим семейство интегральных кривых параболического типа и устойчивую особую точку типа узла. Так что с точки зрения поведения интегральных кривых и типа особой точки этот граничный случай следует отнести к случаю $h^2 > \omega_0^2$, а не к случаю $h^2 < \omega_0^2$. Случай $h^2 = \omega_0^2$, не имея физического значения, все же имеет известный расчетный интерес, так как часто бывает выгодно так подобрать затухание системы, чтобы h^2 было возможно ближе к ω_0^2 . Этим, с одной стороны, устраняются колебания в системе, которые неизбежны при h^2 , много

меньшем, чем ω_0^2 , а с другой стороны, скорость аperiodического возвращения системы к нулю получается наибольшая (больше, чем при больших величинах h). Такие именно условия являются наивыгоднейшими для целого ряда измерительных приборов, например для гальванометров. Но при сколь угодно малом изменении параметров системы этот предельный случай превратится в один из двух других, рассмотренных ранее. Поэтому он не представляет физического интереса и не отражает характерных черт реальной физической системы. Предельный случай имеет значение только как граница, формально разделяющая системы на колебательные и аperiodические. Необходимо, однако, иметь в виду, что разделение систем на колебательные и аperiodические, которое в случае линейной системы хотя и может быть математически проведено вполне строго, в сущности говоря, не имеет большого физического содержания, ибо при больших значениях h система теряет свои наиболее характерные «колебательные черты» еще до того, как h^2 достигает величины ω_0^2 . Действительно, если h^2 лишь немного меньше ω_0^2 , то затухание системы весьма велико, и уже второй максимум, следующий за начальным отклонением, может быть практически совершенно не заметен. Точно так же становится незаметным и явление резонанса — одно из наиболее характерных явлений в колебательных системах. Таким образом, хотя формально случай $h^2 = \omega_0^2$ и является граничным, но фактически граница между колебательным и аperiodическим процессом размыта и не может быть проведена резко. Заметим кстати, что для некоторых нелинейных систем (например систем с постоянным трением), как мы увидим, разделение на колебательные и аperiodические теряет смысл.

§ 5. Вырожденная линейная система

1. Полное и «укороченное» уравнение. Рассматривая линейный осциллятор при наличии трения, мы предполагали, что все три параметра осциллятора — масса (самоиндукция), коэффициент трения (сопротивление) и коэффициент упругости (величина, обратная емкости) — играют одинаково существенную роль и заметно влияют на свойства и поведение системы. В тех случаях, когда трение мало, можно, как мы уже указывали, вовсе не учитывая влияния трения на движения в системе, ответить на некоторые вопросы, для которых трение играет второстепенную роль. Если же трение велико¹⁾, то может встретиться другой случай, когда вследствие своей малости играет второстепенную роль один из двух других «колебательных» параметров системы — масса или коэффициент упругости (самоиндукции или величина, обратная емкости).

Действительно, в уравнение, описывающее линейную систему с трением

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (19)$$

1) Мы говорим «мало» и «велико», не указывая, по сравнению с чем. Как было отмечено во введении, в таком виде эти утверждения не имеют большого содержания. Но из дальнейшего рассмотрения станет ясно, по сравнению с чем должно быть велико трение или сопротивление.

входят три коэффициента, и любой из этих трех коэффициентов может быть столь мал, что содержащий его член мало отличается от нуля, если соответствующая переменная (x , \dot{x} или \ddot{x}) не приобретает слишком больших значений. При таких движениях, когда один из трех членов уравнения (19) весьма мал по сравнению с двумя другими его членами, во все время движения приблизительно соблюдается равенство (по абсолютной величине) между этими двумя другими членами уравнения. Такие движения мы можем попытаться охватить, отбрасывая тот член, который мал, т. е. описать эти движения при помощи уравнения, содержащего только два члена из трех, входящих в уравнение (19). При такой идеализации мы упрощаем стоящую перед нами математическую задачу, но зато, как и при всякой идеализации, мы отказываемся от возможности ответить на те или иные вопросы, для решения которых как раз должно быть учтено влияние отбрасываемого члена. Поэтому решить, насколько такая идеализация законна (вернее, насколько она целесообразна), мы можем, только установив, какие именно вопросы нас интересуют. С другой стороны, мы должны выяснить, на какие именно вопросы мы не можем получить ответа, если мы отбросим тот или иной параметр системы. Для этой цели мы сравним те решения, которые были нами получены выше при учете всех трех параметров системы, с теми, которые получаются, если одним из этих трех параметров пренебречь. Если мал член hx , то мы получаем уже рассмотренное выше уравнение второго порядка, описывающее гармонический осциллятор. Если же мал один из двух других членов $m\ddot{x}$ (мала масса) или kx (мал коэффициент упругости), то, отбрасывая этот член, мы получаем уравнение первого порядка:

$$b\dot{x} + kx = 0 \quad (57)$$

или

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0. \quad (58)$$

Рассмотрим сперва первый случай, к которому мы приходим, полагая в уравнении (19) $m=0$. Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = Ae^{-\frac{k}{b}t}$$

или, вводя начальные условия $t=0$, $x=x_0$, вид:

$$x = x_0 e^{-\frac{k}{b}t}, \quad \dot{x} = -\frac{k}{b} x_0 e^{-\frac{k}{b}t}. \quad (59)$$

Естественно, что решение содержит только одну произвольную постоянную, так как исходное уравнение есть дифференциальное уравнение первого порядка. Вместо двух величин, необходимых для определения состояния системы, описываемой уравнением второго порядка, в рассматриваемом случае для однозначного определения состояния системы необходимо задание только одной величины. Такие системы с «половиной степенью свободы», к которым мы приходим, отбрасы-

вая один из колебательных параметров обычной системы, иногда называют *вырожденными* системами. Для вырожденных систем фазовое пространство является одномерным — представляет собой не плоскость, а линию, и положение представляющей точки на «фазовой линии» однозначно определяется заданием одной координаты.

Сопоставим полученное решение (59) с тем, которое мы получили в § 4 для «полной» (т. е. невырожденной) системы, предполагая, что m мало, но отлично от нуля. Задаваясь начальными условиями $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, имеем, согласно (50), решение в виде:

$$x = x_0 \left[\frac{q_2}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} - \frac{q_1}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t} \right] + \frac{\dot{x}_0}{q_2 - q_1} [e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}], \quad (60)$$

где

$$q_1 = \frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad q_2 = \frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \quad (61)$$

Для удобства сопоставления заменим точное решение (60) уравнения (19) приближенным решением $x_1(t)$, таким, что разность между $x_1(t)$ и $x(t)$ и их производными \dot{x}_1 и \dot{x} могла быть сделана сколь угодно малой (равномерно относительно t) за счет выбора достаточно малого m .

Пользуясь разложением корня

$$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{b}{2m} \sqrt{1 - \frac{4km}{b^2}} = \frac{b}{2m} \left(1 - \frac{2km}{b^2} + \dots \right),$$

без труда получаем:

$$x_1(t) = x_0 \left[e^{-\frac{k}{b} t} - \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{b}{m} t} \right] + \dot{x}_0 \frac{m}{b} \left[e^{-\frac{k}{b} t} - e^{-\frac{b}{m} t} \right]. \quad (62)$$

Можно показать, что это приближенное решение аппроксимирует точное решение в том смысле, что, сколь бы ни было мало ε , всегда можно найти столь малое m , что

$$|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon \quad (63)$$

для всех значений t в интервале $0 \leq t < +\infty$ ¹⁾.

Сравним теперь (59) и (63). Обозначая решение вырожденного уравнения через \bar{x} и принимая, что начальные значения координаты для решений полного и вырожденного уравнения совпадают, имеем:

$$x_1(t) - \bar{x}(t) = -x_0 \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{b}{m} t} + \dot{x}_0 \frac{m}{b} \left[e^{-\frac{k}{b} t} - e^{-\frac{b}{m} t} \right]. \quad (64)$$

1) Заметим, что неравенства (63) не могут быть заменены неравенствами вида

$$\left| \frac{x_1(t)}{x(t)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}(t)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (\alpha)$$

пригодными для всех значений t , если m достаточно мало. Однако на всяком сколь угодно большом заданном промежутке значений t можно добиться соблюдения неравенств (α), выбрав достаточно малое m .

Отсюда сразу видно, что и эта разность может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого m , причем опять-таки равномерно относительно t (для всех $0 \leq t < +\infty$). Однако не трудно заметить, что для производных ситуация будет иной. Действительно,

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t) = -x_0 \frac{k}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \dot{x}_0 \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{k}{b}t} + \dot{x}_0 e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (65)$$

При малых t и m эта разность будет близка к $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0$. Эта последняя величина не уменьшается с уменьшением m и мы не можем распорядиться малостью этой величины, выбирая m . Но, исследуя структуру выражения (65) и обращая внимание на быстрое уменьшение $e^{-\frac{b}{m}t}$ при фиксированном $t \neq 0$ и уменьшающемся m , приходим к следующему заключению: выбором достаточно малого m всегда можно добиться для всех t , начиная с некоторого, сколь угодно малого, по определенному моменту $\tau \neq 0$ ($\tau \leq t < +\infty$), выполнения неравенства

$$|\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon$$

(где $\varepsilon > 0$, как и раньше, — любая наперед заданная сколь угодно малая величина). Сформулируем теперь полученные нами результаты прямо для точного решения полного уравнения и решения вырожденного уравнения; приближенное решение полного уравнения послужит нам в качестве инструмента сравнения.

При достаточно малом m значения для координаты, получаемые из точного решения полного дифференциального уравнения при произвольных начальных условиях ($t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$), сколь угодно мало отличаются от соответствующих значений координаты, получаемых из решения вырожденного дифференциального уравнения для всех t ($0 \leq t < +\infty$), при условии, что начальные значения координаты в решениях полной и вырожденной систем совпадают. Что же касается значений скоростей, получающихся при этих условиях из решений полного и вырожденного уравнений, то они сколь угодно мало отличаются друг от друга для всех t , лишь начиная с некоторого определенного момента времени $\tau \neq 0$ ($\tau \leq t < +\infty$), малостью которого также можно распорядиться, выбирая достаточно малое m ¹⁾.

Поясним несколькими словами найденный результат. Очевидно, что различие в начальных скоростях решений полной и вырожденной систем представляет собой отличие начальной скорости в невырожденной системе, которая может быть задана по произволу, от той

¹⁾ Заметим, что для $\tau \leq t \leq T$, где τ и T — заданные положительные числа ($T > \tau$), можно добиться, выбором достаточно малого m , выполнения неравенств

$$\left| \frac{x(t)}{\dot{x}(t)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое заданное сколь угодно малое число.

скорости, которая соответствует заданному начальному отклонению в вырожденной системе.

Если эта сумма $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0$ достаточно мала, то при надлежаще выбранном m разность скоростей, получаемых из полного и вырожденного уравнений, останется малой для всех t . Если же эта разность не мала, то имеем следующую картину. Если m достаточно мало, то скорость в согласии с полными уравнениями движения весьма быстро меняется, так, чтобы через малый промежуток времени τ почти совпасть со скоростью, которая получается из решения вырожденного уравнения. Это быстрое изменение скорости будет нами подробно исследовано в дальнейших частях этого параграфа и приведет нас к формулировке так называемых «условий скачка». Заметим в связи с этим дальнейшим, что изменение координаты за промежуток времени τ (определенное, например, при помощи полного уравнения), само собой разумеется, стремится к нулю вместе с τ .

Рассмотрим теперь кратко другой случай вырождения, когда не m , а k обращается в нуль.

Решение вырожденного уравнения при обычных начальных условиях в этом случае имеет вид:

$$\bar{x}(t) = x_0 + \frac{m}{b} \dot{x}_0 (1 - e^{-\frac{b}{m} t}). \quad (66)$$

Составляя по-прежнему приближенное решение полного уравнения (при тех же начальных условиях), будем иметь:

$$x_1(t) = x_0 e^{-\frac{k}{b} t} + \frac{m}{b} \dot{x}_0 (1 - e^{-\frac{b}{m} t}). \quad (67)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малом k для всех t ($0 < t < +\infty$) будем иметь, как и раньше:

$$|x_1(t) - x(t)| < \epsilon, \quad |\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)| < \epsilon$$

(здесь $x(t)$ — точное решение полного уравнения). Сравним теперь приближенное решение полного уравнения с решением вырожденного уравнения. В отличие от предыдущего случая неравенство

$$|\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t)| < \epsilon$$

будет соблюдаться для достаточно малого k при всех t ($0 < t < +\infty$). Однако теперь выбором достаточно малого k нельзя распорядиться малостью разности

$$x_1(t) - \bar{x}(t) = x_0 (1 - e^{-\frac{k}{b} t})$$

для всех t , так как эта разность при достаточно большом t стремится к x_0 .

По легко видеть, что, задавши ε и T , всегда можно выбрать такое k , чтобы неравенство

$$|x_1(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$$

было соблюдено для всех значений t в промежутке $0 \leq t \leq T$.

Мы предоставляем читателю сделать выводы, относящиеся к связи точного решения полного уравнения при малом k и решения вырожденного уравнения.

2. **Связь с начальными условиями.** Решение для полной системы содержит две произвольных постоянных, между тем как решение для вырожденной системы содержит только одну произвольную постоянную. Поэтому, если мы задаем по произволу два начальных значения x_0 и \dot{x}_0 , то они, вообще говоря, не удовлетворяют уравнению первого порядка. Возникает «конфликт» между возможными состояниями идеализированной системы и заданным нами начальным состоянием этой системы. Для того чтобы возможность такого конфликта была исключена, система, в которой мы задали два начальных значения, должна описываться уравнением второго, а не первого порядка. Между тем во многих случаях число начальных условий, которое может быть произвольно задано в той или иной реальной физической системе, не зависит от малости того или другого параметра системы. Значит, если мы рассматриваем такую систему, в которой могут быть произвольно заданы два начальных значения x_0 и \dot{x}_0 , то даже в случае малости одного из колебательных параметров мы все же, казалось бы, не можем рассматривать систему как вырожденную, т. е. описывать ее одним дифференциальным уравнением первого порядка, так как начальные условия, вообще говоря, несовместимы с этим уравнением.

Мы уже видели, что если мы откажемся от рассмотрения движений в начальный период времени, то мы можем удовлетвориться для описания системы одним уравнением первого порядка. При этом, однако, возникает вопрос о том, как ликвидировать конфликт и примирить с этим уравнением, вообще говоря, несовместимые с ним начальные условия; другими словами, возникает вопрос — как происходит переход от заданных начальных условий к тому состоянию, которое допустимо с точки зрения уравнения первого порядка, описывающего систему. Совершенно понятно, почему такой вопрос возник. Отказываясь от рассмотрения движения в начальный промежуток времени, мы должны заменить это рассмотрение известным предположением о том, в какое состояние придет система к концу этого промежутка времени. Мы уже рассматривали этот вопрос аналитически; подойдем теперь к нему с точки зрения физики.

В качестве примера рассмотрим тело малой массы, движущееся в сильно сопротивляющейся среде под действием пружины. Уравнение движения этой системы имеет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (19)$$

причем параметр m мал. В начальный момент мы можем задать произвольно координату x_0 и скорость \dot{x}_0 . С другой стороны, мы уже

убедились в том, что по прошествии некоторого промежутка времени (тем меньшего, чем меньше m) движение в системе может быть описано уже известным нам уравнением первого порядка:

$$b\dot{x} + kx = 0. \quad (57)$$

Но при этом \dot{x} уже не может быть задано произвольно, а однозначно определяется заданием координаты x . В начальный момент система находится в состоянии, которое, вообще говоря, не совместимо с уравнением (57). Но затем, если m достаточно мало, отклонение от решения уравнения (57) быстро затухает, и система приходит в такое состояние, которое уже совместимо (конечно, с известной точностью) с уравнением (57). Пусть, например, в начальный момент $x = x_0$, а $\dot{x} = 0$ [эти начальные условия, очевидно, несовместимы с уравнением первого порядка (57)]. Пока x очень мало, член $b\dot{x}$ не играет роли, и, как следует из полного уравнения (19), ускорение определяется приблизительно выражением:

$$\ddot{x} \approx -\frac{k}{m}x, \quad (68)$$

и так как m очень мало, то ускорение в системе очень велико — скорость чрезвычайно быстро возрастает. Вместе с тем возрастает и сила трения, и все большая и большая часть силы пружины расходуется на преодоление трения. Вследствие этого ускорение системы становится все меньше и меньше, и в конце концов член $m\ddot{x}$ перестает играть заметную роль. Дальнейшее движение системы уже может быть удовлетворительно описано уравнением первого порядка (57). К этому времени скорость приобретает такое значение, которое связано со значением координаты уравнением (57), так как при исчезновении члена $m\ddot{x}$ устанавливается приблизительное равенство между членами kx и $(-b\dot{x})$. Так совершается этот быстрый переход от состояния, не совместимого с уравнением (57), к состоянию, которое этим уравнением допускается. Мы проследили этот переход аналитически, пользуясь полным уравнением второго порядка (19) и его решением (62).

При этом мы убедились, что если m достаточно мало, то ускорения вначале очень велики и скорость изменяется очень быстро: система за очень короткий промежуток времени переходит в состояние, совместимое (конечно, с известной степенью точности) с уравнением первого порядка, причем этот промежуток времени настолько мал, что, несмотря на большие ускорения, координата системы не успевает сколько-нибудь заметно измениться.

3. Условия скачка. Как мы видели, при переходе к состоянию, совместимому с уравнением первого порядка, скорость системы изменяется очень быстро, координата же системы остается почти неизменной. Но если самый переход совершается достаточно быстро, нас часто не интересуют его подробности. Мы можем рассматривать этот быстрый

переход как мгновенный скачок и ограничиться только определением того конечного состояния, в которое «перескакивает» система и начиная с которого поведение системы определяется уравнением первого порядка (57). Мы можем, следовательно, рассматривать систему как не обладающую массой, но должны применить иной метод рассмотрения всего процесса и ввести новое условие, которое заменило бы нам прежнее рассмотрение, именно *условие скачка*.

Это условие скачка мы могли бы для рассматриваемого частного случая сформулировать следующим образом: скорость системы изменяется мгновенно, координата же системы остается при этом неизменной. При этом мы в сущности руководствуемся результатами строгого рассмотрения, и наш постулат сводится только к известной идеализации этих результатов. Однако такая формулировка условия скачка очень специальна и пригодна только для рассматриваемого случая. В случае, например, системы с малым k из того же рассмотрения вытекает, что ускорение системы вначале изменяется очень быстро, а скорость за это время не успевает заметно измениться. В этом случае нужен был бы другой постулат, — именно, что ускорение системы изменяется скачком, а скорость во время этого скачка остается неизменной. Точно так же для вырожденных электрических систем мы должны были бы сформулировать специальные условия скачка. Целесообразно, конечно, попытаться сформулировать более общие условия скачка, которые были бы одинаково применимы ко всем случаям очень быстрого изменения состояний системы. Само собой разумеется, что это более общее условие должно охватывать те специальные формулировки, которые приведены выше. Это условие скачка мы сформулируем следующим образом: энергия системы не может изменяться скачком, и, следовательно, система может переходить скачком из одного состояния в другое только в том случае, когда в конечном состоянии она обладает той же энергией, что и в начальном состоянии. Смысл этого постулата можно иллюстрировать следующими соображениями. Чем меньше тот промежуток времени, которому соответствует возрастание энергии на определенную величину, тем соответственно больше мощность, развиваемая системой; поэтому скачкообразное изменение энергии системы возможно только при наличии бесконечно большой мощности. Принимая постулат, мы, следовательно, полагаем, что рассматриваемые нами физические системы не могут развивать бесконечно большой мощности. Следует, однако, заметить, что при рассмотрении явлений удара в механике иногда приходится вводить понятие о неконсервативных скачках (например в случае неупругого удара), при которых энергия меняется мгновенно. Как мы увидим дальше, аналогичные явления могут иметь место и в электрических системах (см. теорию генератора с Γ -характеристикой и колебательным контуром в цепи сетки). В этих случаях соответствующее условие скачка должно заключать в себе количественную характеристику этого мгновенного изменения энергии. Поскольку мы рассматриваем процессы, не имеющие такого характера, предположение о том, что энергия не может изменяться мгновенно, является вполне целесообразным.

Условие скачка позволяет с той или иной точностью определить конечный результат этого процесса¹⁾.

При рассмотрении отдельных примеров будем иллюстрировать наш постулат наглядными физическими примерами. Конкретно, в рассматриваемом случае вся энергия системы сосредоточена в потенциальной энергии пружины и равна $\frac{kx^2}{2}$. Кинетической же энергией система не обладает, поскольку мы предположили, что $m=0$. Следовательно, общее условие скачка в этом случае сводится к тому частному условию, что координата системы при скачке должна оставаться неизменной, а может изменяться скачком только скорость.

Точно так же, если бы мы в системе «без массы» допустили скачкообразное изменение координаты, то это значило бы, что пружина мгновенно совершает конечную работу, т. е. развивает бесконечно большую мощность.

Итак, применяя условие скачка для рассматриваемого случая, мы можем утверждать, что при скачке координата системы остается неизменной, и изменяется только скорость системы, причем система переходит скачком от той скорости, которой она обладает в начальный момент, к той скорости, которую она при данном начальном отклонении x_0 должна была бы иметь согласно уравнению первого порядка (57). После такого скачка начинается уже непрерывное движение системы, определяемое этим уравнением.

Поясним наглядно, при помощи чертежей, смысл введенного нами условия скачка. Так как в рассматриваемом случае скачком меняется скорость, то сопоставим диаграмму скорости по времени для случая $m \neq 0$ (уравнение второго порядка) с такой же диаграммой для $m=0$ (уравнение первого порядка плюс условие скачка).

В начальный момент произвольно могут быть заданы x и \dot{x} . Пусть, например, при $t=0$, $x=x_0$ ($x_0 > 0$), $\dot{x}=0$. Зависимость скорости от времени, как нетрудно выяснить, следуя уравнению второго порядка, имеет вид, изображенный на рис. 30, А (при построении принято, что $m \ll \frac{b^2}{k}$).

Если же мы будем пользоваться уравнением первого порядка, то начальное значение $x=x_0$ автоматически дает начальное значение $\dot{x} = -\frac{k}{b}x_0$ и дальнейшее изменение скорости со временем, согласно рис. 30, В.

1) Подобным приемом — введением постулатов, которые заменяют более детальное рассмотрение процессов, — пользуются часто. Например, в задаче об упругом ударе мы считаем, что скорость тел, обладающих массой, изменяется мгновенно, т. е. что на тела действуют бесконечно большие силы. Эти силы суть силы упругости, которые по существу имеют некоторую конечную величину, вследствие чего процесс удара происходит не мгновенно. Но так как изменение скоростей происходит очень быстро, то, поскольку нас не интересует самый механизм удара, мы можем отказаться от рассмотрения процесса удара и ограничиться только некоторыми постулатами, которые позволяют, не рассматривая процесса в деталях, установить те конечные состояния, в которых находятся шары после соударения.

Скачок, уничтожающий конфликт между начальными условиями $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ и дифференциальным уравнением первого порядка, изображен на рис. 30, В отрезком OO_1 .

Легко видеть сходство рисунков 30, А и 30, В; физический смысл этого сходства подробно нами выяснен в конце пункта 2.

В качестве второго примера вырожденной системы рассмотрим электрический контур, обладающий емкостью, самоиндукцией и сопротивлением (рис. 31), причем сопротивление контура велико, а самоиндукция мала. В уравнении, описывающем поведение этого контура:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = 0, \quad (69)$$

параметр L мал, а R велик. В начальный момент произвольно могут быть заданы q_0 и \dot{q}_0 (заряд на конденсаторе и ток в контуре). Отбрасывая самоиндукцию, т. е. полагая $L = 0$, мы получим контур, изображенный на рис. 32 и описываемый уравнением:

$$R\dot{q} + \frac{q}{c} = 0, \quad (70)$$

и \dot{q}_0 уже однозначно определяется начальным значением q_0 . Однако в начальный момент мы можем задать произвольно как q , так и \dot{q} . Пусть, например, в начальный момент $q = q_0$ и $\dot{q}_0 = 0$. Между тем из уравнения (70) следует, что, при $q = q_0$ ($q_0 > 0$), $\dot{q}_0 = -\frac{q_0}{RC}$. В начальный момент сила тока может быть задана произвольно и, вообще го-

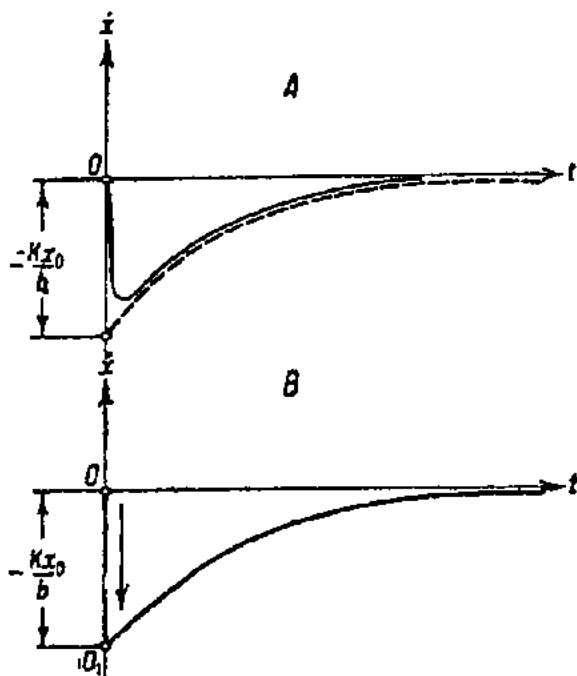


Рис. 30.

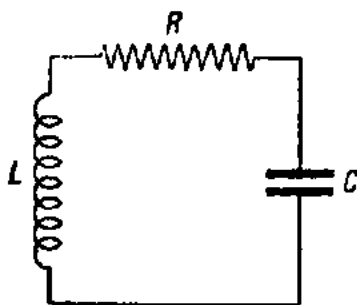


Рис. 31.

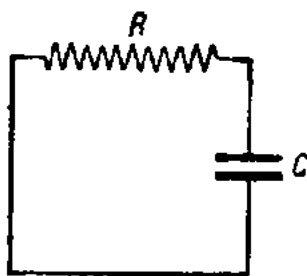


Рис. 32.

воря, не соответствует той, которая должна получиться из этого уравнения, но так как самоиндукция системы очень мала, то изменения силы тока происходят очень быстро, и очень скоро ток достигает приблизительно того значения, которое он должен иметь по уравнению первого порядка (70). Заряд же на обкладках конденсатора за это время почти не успевает измениться. Рассматривая движение при помощи под-

ного уравнения (69), мы можем проследить эти быстрые изменения силы тока и получить зависимость q от времени, аналогичную той, которая приведена для x на рис. 30, А. Но если нас не интересуют подробности изменения силы тока при t малом, мы можем не принимать во внимание самоиндукцию системы и вместо рассмотрения начальной стадии движения ввести условие скачка. Поскольку мы считаем, что контур обладает только емкостью и не обладает самоиндукцией, то мы должны принять, что вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе, поэтому условие скачка для этого случая допускает скачкообразные изменения силы тока при неизменном заряде конденсатора. Рассматривая систему без самоиндукции, мы должны считать, что, какова бы ни была сила тока в начальный момент, она скачком изменяется до величины, определяемой уравнением первого порядка (70). Мы получим в этом случае для q такую же зависимость, которая приведена для x на рис. 30, В. Конечно, всякий электрический контур и вообще всякий проводник обладает некоторой самоиндукцией, и поэтому в реальном контуре мгновенные скачки силы тока невозможны. Но если самоиндукция очень мала и сила тока изменяется очень быстро, то для решения целого ряда вопросов можно считать, что эти изменения силы тока происходят мгновенно.

Если бы мы допустили мгновенные изменения силы тока в цепи с самоиндукцией, т. е. допустили бы, что в некоторые моменты $\frac{d^2q}{dt^2} = \infty$, то на концах катушки самоиндукции мы должны были бы допустить возникновение бесконечно большой ЭДС самоиндукции $L \frac{d^2q}{dt^2}$. С другой стороны, если бы мы допустили мгновенные изменения заряда на обкладках конденсатора, то это вынудило бы нас допустить возникновение бесконечно больших токов в контуре (так как если q изменяется скачком, то $\frac{dq}{dt} = i = \infty$). Как те, так и другие изменения запрещаются установленным нами постулатом о характере скачка.

Аналогичное рассмотрение мы можем применить для случая, когда в контуре присутствуют самоиндукция и сопротивление, а емкость отсутствует (рис. 33). Конечно, к представлению о таком контуре мы приходим также в результате целой цепи пренебрежений. В результате этих пренебрежений в контуре оказалось возможным скачкообразное изменение напряжения на концах сопротивления и ЭДС самоиндукции, так как изменение этих напряжений не связано с изменением зарядов на обкладках конденсатора, а значит, и с изменением энергии в системе. Уравнение для этого контура имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (71)$$

В начальный момент мы можем задать по произволу $i = i_0$ и $\frac{di}{dt} = \left(\frac{di}{dt}\right)_0$.

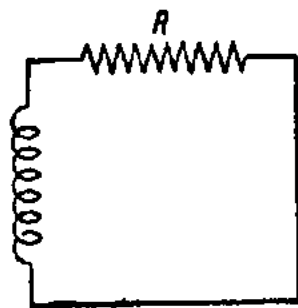


Рис. 33.

Но уравнением (71) i и $\frac{di}{dt}$ связаны между собой вполне однозначно. Следовательно, мы должны допустить возможность скачкообразного изменения $\frac{di}{dt}$ в начальный момент, но при соблюдении условия скачка, в силу которого i должно оставаться неизменным (так как вся энергия контура сосредоточена в катушке и равна $\frac{Li^2}{2}$). Дальнейшее движение определяется уравнением (71) и происходит уже непрерывно (без скачка).

4. Паразитные параметры. Не следует думать, что пренебрежение самоиндукцией представляет собою какую-то более далеко идущую идеализацию, чем пренебрежение емкостью. Дело в том, что к представлению об электрическом контуре с одной степенью свободы мы, как уже указывалось, пришли в результате весьма существенной идеализации свойств системы, так как всякое представление реальной системы

в виде системы с определенным числом степеней свободы уже представляет собою идеализацию. Но и после этой идеализации мы должны сделать еще целый ряд шагов, для того чтобы прийти к тем схемам, которые мы рассматриваем. В этой цепи шагов по идеализации системы лишь случайно (вернее не случайно, а в результате выбранного нами порядка изложения) пренебрежение самоиндукцией для системы, изображенной на рис. 32, оказалось последним шагом,

впервые приведшим нас к представлению о скачках. Этот последний шаг мог бы состоять в пренебрежении емкостью, а не самоиндукцией. И хотя практически сделать контур, в котором второстепенную роль играют самоиндукции, гораздо легче, чем контур, в котором второстепенную роль играет взаимная емкость между отдельными проводниками, но принципиально оба пренебрежения совершенно равноправны. И то и другое пренебрежение может привести к представлению о скачках, и, наоборот, присутствие малой самоиндукции или малой емкости может запретить эти скачки. Такие малые емкости и самоиндукции присутствуют во всякой реальной системе и не могут быть полностью устранены. Эти малые емкости и самоиндукции, которые не введены в схему сознательно, а присутствуют в ней в силу неустранимых свойств самих проводников, часто называют паразитными емкостями и самоиндукциями. Обычно при рассмотрении нам приходится пренебрегать всеми или почти всеми такими паразитными емкостями и самоиндукциями. Так, например, для того чтобы прийти к контуру с одной степенью свободы, изображенному на рис. 33, мы должны пренебречь той «паразитной» емкостью, которой обладают всякая катушка самоиндукции и всякое сопротивление. Если мы учтем эту паразитную емкость хотя бы в виде некоторой «сосредоточенной» емкости C_0 (рис. 34), то сразу окажется, что $\frac{di}{dt}$ не может изменяться скачком (напряжение на «обкладках» этой паразитной емкости есть $L \frac{di}{dt}$; оно не может изменяться скачком, так

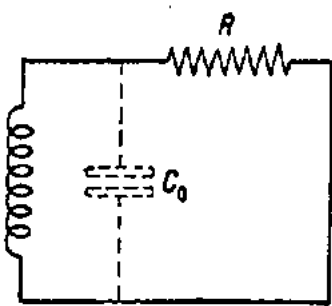


Рис. 34.

как при этом изменялась бы скачком энергия заряда конденсатора C_0). Точно так же, если мы учтем в виде «сосредоточенной» емкости C_0 ту «паразитную» емкость, которой обладает сопротивление в контуре, изображенном на рис. 32, то мы приходим к схеме, приведенной на рис. 35. Сразу видно, что в этой схеме скачки в силе тока становятся уже невозможными, так как напряжение на «обкладках» емкости C_0 есть Ri , но оно не может изменяться скачком, следовательно, не может изменяться скачком и сила тока i . Отметим кстати одно обстоятельство, которое в первый момент кажется не вполне понятным. Ведь емкости C и C_0 на рис. 35 включены параллельно, что как будто можно рассматривать просто как увеличение емкости C . Почему же наличие емкости C не делает скачков невозможными, между тем как емкость C_0 исключает возможность скачков? Это кажущееся затруднение сразу отпадает, если принять во внимание, что емкость C_0 есть паразитная емкость, обусловленная взаимной

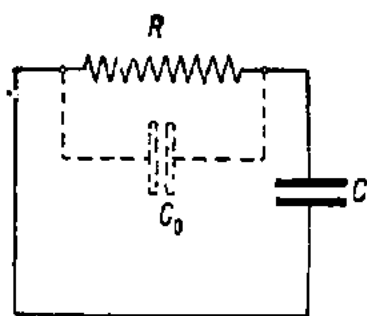


Рис. 35.

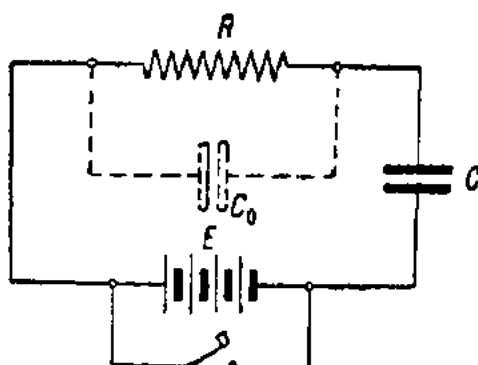


Рис. 36.

емкостью витков сопротивления, и, значит, мы ее не можем ни устранить, ни отсоединить от сопротивления R (в этом ее «паразитность» и заключается). Поэтому в «контуре» C_0R мы не можем задать произвольно никаких начальных значений. Для всей схемы можно задать лишь начальное значение силы тока i_0 и начальное значение напряжения q_0 на обкладках C . Мы сумеем задать независимые значения i_0 и q_0 , если, например, отсоединим C от R и включим между ними некоторое напряжение E (рис. 36). Уже таким простым способом мы для момента, когда выключатель замыкается накоротку, зададим начальные условия, несовместимые в уравнении первого порядка:

$$Ri + \frac{q_1}{C} = 0.$$

Но мы не можем так отсоединить паразитную емкость, и, следовательно, в схеме рис. 35, которая описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, допускающими две константы интегриации, могут быть заданы произвольно только два начальных значения. Таким образом в этой схеме исключается возможность конфликта, возникающего вследствие несовместимости начальных условий с уравнением и приводящего, как мы видели, к скачкообразным изменениям в состоянии системы. Учитывая паразитную емкость, мы не только

вводим некоторую добавочную емкость C_0 , но и некоторое добавочное условие (связь между q_0 и q_{00}), вследствие чего скачки оказываются невозможными, но вместе с тем исключается опасность конфликта.

Рассмотренный нами пример «ликвидации конфликта» в результате «вмешательства» паразитной емкости тесно связан с тем общим положением, которое было высказано во введении. Идеализируя систему и отказываясь от учета того или иного числа степеней свободы этой системы, мы должны соответствующим образом ограничить себя в праве выбора начальных условий. Только тогда мы избежим конфликта между нашей идеализацией и начальными условиями. Мы можем, например, распределенную в катушке самоиндукцию рассматривать как сосредоточенную, но при этом должны отказаться от права задавать по произволу распределение тока в катушке. Только при этом ограничении будет исключена возможность конфликта между нашей идеализацией и начальным состоянием системы.

Иначе говоря, причиной конфликта, а значит, и причиной скачков, является «недостаток» в числе констант уравнения по сравнению с числом *независимых* начальных значений в реальной системе. Учитывая паразитную емкость, мы увеличиваем число констант уравнения, не увеличивая при этом числа независимых начальных значений, которые могут быть заданы (так как i и q_2 не могут быть заданы независимо), вследствие чего скачки и оказываются невозможными.

Приведенными примерами в достаточной степени поясняется все сказанное нами относительно вырожденных систем. Мы можем теперь резюмировать основные выводы.

Если сопротивление системы велико, то может случиться, что один из колебательных параметров системы в некоторых стадиях процесса играет второстепенную роль¹⁾. Тогда эти стадии процесса мы можем исследовать, не учитывая роли второстепенного параметра, рассматривая систему как вырожденную и описывая ее одним уравнением первого порядка. При этом, однако, начальные условия, вообще говоря, оказываются несовместимыми с этим уравнением, и поэтому для рассмотрения в деталях начальной стадии процесса нужно было бы учитывать и второй (отброшенный) параметр и рассматривать уравнение второго порядка. Если нас детали этой начальной стадии процесса (весьма кратковременной) не интересуют, мы можем отказаться от рассмотрения уравнения второго порядка, но ввести предположение о том, что состояние, совместимое с уравнением первого порядка, устанавливается мгновенно (скачком). При этом мы должны ввести новый постулат, определяющий, как происходит скачок системы из данного начального состояния в состояние, совместимое с уравнением первого порядка.

Это условие может быть сформулировано следующим образом: *скачок происходит так, что энергия системы при этом не изменяется.*

1) Если сопротивление системы мало, то процесс в ней будет колебательным и оба колебательных параметра играют одинаково существенную роль. Поскольку δ мало, то из уравнения $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ следует, что оба члена $m\ddot{x}$ и kx примерно одного порядка.

После того как скачок произошел, дальнейшее движение системы определяется уравнением первого порядка. Условие скачка и это уравнение вместе определяют поведение системы уже при любых начальных условиях.

К представлению о скачках в системе, т. е. о скачкообразном изменении состояния системы, мы приходим в результате значительной идеализации свойств системы. Целесообразность данной идеализации зависит от того, на какие именно вопросы мы хотим получить ответ; для решения целого ряда вопросов оказывается вполне правильной именно такая идеализация, которая приводит к представлению о скачках. В реальной системе скачки, конечно, невозможны; те «распределенные» параметры, которые мы частью «сосредоточили», а частью вовсе отбросили при идеализации свойств системы, запрещают скачки в системе. В реальной системе состояния изменяются хотя и очень быстро, но все же не скачком, а с некоторой конечной скоростью. Следует, однако, заметить, что весьма часто рассмотрение при помощи уравнения первого порядка и условий скачка является неизбежным. Дело в том, что часто мы не знаем сколько-нибудь точно величины тех малых «паразитных» параметров, которые должны быть учтены при написании соответствующего уравнения второго порядка; кроме того — и это самое важное — во многих случаях знание этих параметров не является необходимым для ответа с требуемой точностью на вопросы, поставленные физикой колебаний.

Помимо вопроса о том, как изменяется характер движений при переходе от полной системы к вырожденной, вполне естественным является вопрос о том, как изменяются при этом состояния равновесия и в частности не происходит ли изменения характера устойчивости состояний равновесия. В тех случаях, которые были рассмотрены в предыдущих параграфах, для ответа на этот вопрос не требовалось специального рассмотрения. Сразу видно, что если в решении (60) один из показателей и возрастает беспрестанно (что происходит при вырождении системы), то, поскольку оба показателя всегда отрицательны, состояния равновесия устойчивы и в вырожденной и в невырожденной системах, и смены устойчивости при вырождении не происходит. В дальнейшем, однако, нам придется встретиться и с такими случаями, когда при вырождении системы происходит изменение характера устойчивости состояний равновесия.

Мы потому так подробно остановились на вопросе о скачках, что представление о скачкообразных изменениях состояний системы будет нами широко использовано при изучении некоторых типов стационарных колебательных движений.

§ 6. Линейные системы с «отрицательным трением»

В обычных системах с трением, примеры которых мы рассмотрели выше, коэффициент $h = \frac{b}{2m}$ (или в электрических системах $h = \frac{R}{2L}$) является всегда положительной величиной, ибо трение всегда препятствует движению и $b > 0$ (точно так же и $R > 0$). Положительный

коэффициент трения и положительное сопротивление соответствуют тому, что на преодоление сил трения (или сопротивления в электрической цепи) расходуется энергия. Действительно, если в уравнении движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (19)$$

умножить все члены на $\frac{dx}{dt}$ и затем взять интеграл за некоторый промежуток времени от 0 до τ , то мы получим:

$$m \int_0^\tau \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt + \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \int_0^\tau kx \frac{dx}{dt} dt = 0. \quad (72)$$

Произведя интегрирование, получаем:

$$\left| \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right|_0^\tau + \left| \frac{kx^2}{2} \right|_0^\tau = - \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (73)$$

Слева стоят члены, выражающие изменение кинетической и потенциальной энергии системы за время от 0 до τ ; сумма их, очевидно, определяет изменение полной энергии системы за этот промежуток времени. Если $b > 0$, то интеграл, стоящий справа, положителен, и изменение энергии отрицательно, т. е. энергия системы убывает. Эта убыль энергии обусловлена потерями энергии на трение.

Если бы b , а вместе с тем и k было отрицательно, то энергия системы возрастала бы и «трение» в этом случае явилось бы источником энергии. Ясно, что в системе, не обладающей собственным источником энергии, это невозможно, и b , а вместе с тем и k , всегда положительно. Но если система обладает собственным резервуаром энергии, то, вообще говоря, можно допустить, что $k < 0$ и что энергия системы возрастает за счет «трения» или «сопротивления». Конечно, это уже не будет трение или сопротивление в обычном смысле. Но поскольку оно характеризуется тем же членом дифференциального уравнения, что и обычное трение, именно членом, содержащим $\frac{dx}{dt}$, мы будем и в случае отрицательного k применять термины «трение» и «сопротивление» и будем говорить об «отрицательном трении» и «отрицательном сопротивлении».

1. Механический пример. Простейшим примером такой механической системы, в которой «трение» в известной области отрицательно, может служить устройство, изображенное на рис. 37. На движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте лежит масса m , укрепленная пружинами k_1 и k_2 . Сила трения ленты о груз есть некоторая, вообще говоря, довольно сложная функция относительной скорости ленты и тела. Если мы обозначим смещения груза через x , а его скорость через \dot{x} , то сила трения, действующая на массу m как функция отно-

сительной скорости $(v_0 - \dot{x})$ может быть записана таким образом: $F(v_0 - \dot{x})$. Если обозначить «результатирующий» коэффициент упругости через k и считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах), то уравнение движения массы m напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}), \quad (74)$$

где, как уже было указано, $F(u) = F(v_0 - \dot{x})$ — функция, характеризующая зависимость силы трения от относительной скорости u , или иначе — характеристика трения. Не прецизируя вида функции $F(v_0 - \dot{x})$, мы можем ограничить наше рассмотрение областью, в которой $\dot{x} \ll v_0$ (например, выбрав достаточно большое v_0), в этой области разложить функцию F в ряд вблизи значений v_0 и ограничиться одним первым членом ряда. Тогда $F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) + \dots$, и при этом ограничении уравнение движения примет вид:

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + kx = F(v_0). \quad (75)$$

Стоящий справа постоянный член обуславливает только смещение положения равновесия на величину $\frac{F(v_0)}{k}$ в направлении движения ленты. Что же касается коэффициента $b + F'(v_0)$, стоящего при \dot{x} , то его знак и величина зависят от вида характеристики трения; величина $F'(v_0)$ представляет собой угол наклона характеристики трения в точке v_0 и в случае падающей характеристики трения $F'(v_0) < 0$. Если характеристика трения в области v_0 спадает достаточно круто, то $b + F'(v_0) < 0$ и уравнение (75) описывает систему с «отрицательным трением». Практически этот случай довольно легко реализовать, так как характеристики трения сухих поверхностей имеют обычно вид, изображенный на рис. 38, и, значит, почти всегда имеют вначале, при малых скоростях, более или менее значительный участок достаточно крутого спада. В этой области наше устройство и будет представлять собой линейную систему с «отрицательным трением». Нужно, однако, иметь в виду, что мы пришли к линейной системе с отрицательным трением, ограничившись областью, где $\dot{x} \ll v_0$. Это ограничение, как мы увидим в дальнейшем, является весьма принципиальным и при рассмотрении интересующих нас вопросов будет играть очень существенную роль.

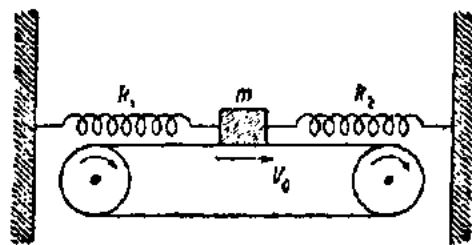


Рис. 37.

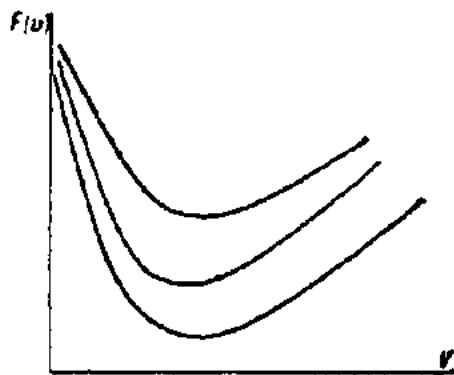


Рис. 38.

Другим примером механической системы, в которой «трение» в известной области отрицательно, может служить так называемый маятник Фруда [14] и [96]. Устройство этого маятника таково: на равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω валу подвешен с некоторым трением обычный маятник (рис. 39). Уравнение движения этого маятника будет отличаться от уравнения движения обычного маятника только тем, что в этом уравнении должен быть учтен момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, т. е. в нашем случае от относительной угловой скорости вала и маятника ($\Omega - \dot{\varphi}$), то момент силы трения можно написать так: $F(\Omega - \dot{\varphi})$. Уравнение движения маятника будет иметь вид (мы ограничиваемся, как обычно, малыми углами φ , заменяем $\sin \varphi$ через φ и помимо трения маятника о вал учитываем сопротивление воздуха, считая, что оно пропорционально угловой скорости):

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\varphi = F(\Omega - \dot{\varphi}). \quad (76)$$

Ограничиваясь, как и в предыдущем примере, рассмотрением только той области, в которой $\dot{\varphi} \ll \Omega$, разлагая $F(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряд вблизи значения Ω и ограничиваясь первым членом ряда, мы получим:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\varphi = F(\Omega) - \dot{\varphi}F'(\Omega). \quad (77)$$

Постоянный член $F(\Omega)$ вызывает только смещение положения равновесия (подобно члену $F'(x_0)$ в предыдущем примере)¹⁾. При новой угловой координате, отсчитываемой от нового смещенного положения равновесия, уравнение движения примет вид:

$$I\ddot{\varphi} + [b + F'(\Omega)]\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0. \quad (78)$$

Если $F'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше b , то коэффициент при $\dot{\varphi}$ будет отрицателен. В некоторой области значений Ω , где характеристика трения спадает достаточно круто, при достаточно малом b можно достигнуть того, что $b + F'(\Omega)$ станет отрицательным, и мы получим уравнение, аналогичное уравнению обычной системы с трением:

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (79)$$

¹⁾ Нужно, однако, иметь в виду, что $F(\Omega)$ можно считать постоянным только постольку, поскольку при изменении положения маятника можно считать неизменным давление подшипника на вал и не учитывать перераспределения давления при отклонении маятника от отвесного положения, например, когда подшипник зажат настолько сильно, что давлением, обусловленным весом маятника, можно пренебречь.

но с той разницей, что коэффициент h будет отрицателен, т. е. мы снова получим линейную систему с «отрицательным трением». Мы видим, следовательно, что при надлежащем выборе r_0 в первой системе и Ω во второй мы можем осуществить механическую систему, которую в определенной ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с отрицательным трением.

2. Электрический пример. Вполне возможно также осуществить и электрическую систему, «сопротивление» которой в известной области отрицательно. Примером такой системы может служить ламповый генератор, т. е. схема с электронной лампой, колебательным контуром и «обратной связью» (рис. 40). Особенностью этой схемы является наличие в том или ином виде связи между цепью сетки и цепью анода приемной лампы. Эта связь, которая носит название «обратной связи», может быть осуществлена разными способами. Мы остановимся на простейшей схеме с индуктивной обратной связью, которую мы только и будем рассматривать¹⁾, так как рассмотрение схем с емкостной или смешанной обратной связью либо не дает ничего принципиально нового, либо приводит к дифференциальным уравнениям третьего порядка, т. е. к системам с «полупорными степенями свободы», и таким образом выходит за пределы этой части курса. Для простоты мы будем считать, что сеточный ток в схеме отсутствует²⁾.

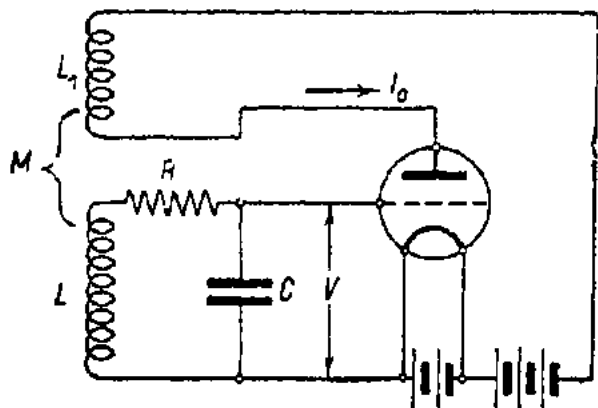


Рис. 40.

Для колебательного контура, находящегося в цепи сетки (в схеме с обратной связью), мы получим уравнение, отличающееся от обычного уравнения для колебательного контура тем, что справа в уравнении будет стоять ЭДС, создаваемая в контуре благодаря воздействию на контур анодного тока, протекающего по катушке L_1 . Эта ЭДС обратной связи есть $M \frac{dI_a}{dt}$, и уравнение для контура будет иметь вид:

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (80)$$

Если пренебречь сопротивлениями в емкостной цепи контура, то приближенно можно считать, что напряжение V на конденсаторе есть вместе с тем напряжение на сетке лампы, значит I_a есть функция от V . Вообще говоря, анодный ток I_a есть довольно сложная функция от напряжения на сетке и анодного напряжения. Но мы для упрощения

1) Заметим, что аналогичное рассмотрение можно провести для схемы с индуктивной обратной связью, но с колебательным контуром в цепи анода.

2) Более подробные указания относительно идеализации схем с электронными лампами и аппроксимирования характеристик лампы см. в дополнительной главе «Электронная лампа».

задачи будем пренебрегать анодной реакцией и считать, что I_a есть функция только V .

При сделанных предположениях (отсутствие сеточного тока и анодной реакции) мы можем написать:

$$I_a = f(V).$$

Тогда

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{df}{dV} \frac{dV}{dt} = S \frac{dV}{dt}, \quad (81)$$

где $\frac{df}{dV} = S$ есть крутизна характеристики электронной лампы. S есть величина, вообще говоря, переменная и довольно сложным образом зависящая от V . Примерная характеристика электронной лампы приведена на рис. 41.

Подставляя выражение (81) в уравнение (80), мы получим:

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + (RC - MS) \frac{dV}{dt} + V = 0. \quad (82)$$

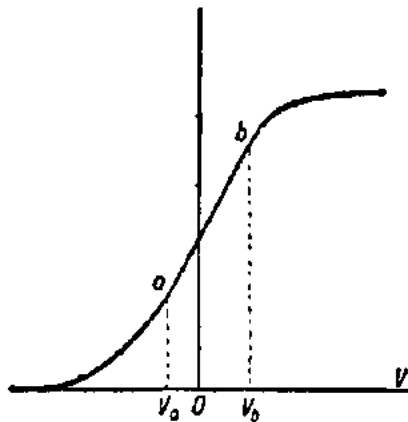


Рис. 41.

Мы получили таким образом уравнение, в котором вместо R стоит более сложное выражение. Это выражение есть, вообще говоря, величина переменная, так как S , как уже сказано, зависит от V . Но если мы выберем некоторый участок характеристики, который

с достаточной степенью точности можно считать прямолинейным, например участок от a до b (рис. 41), и ограничимся рассмотрением поведения системы в ограниченной области изменения напряжений от V_a до V_b , то мы можем считать S постоянным. Иначе говоря, мы можем выбрать столь ограниченную область изменений V , чтобы при разложении функции $f(V)$ в ряд можно было с известной степенью точности ограничиться только первым линейным членом ряда. Тогда S_0 есть $\frac{\partial f}{\partial V}$ при $V = V_0$, т. е. крутизна характеристики в рабочей точке.

Знак M определяется относительным расположением витков катушек L_1 и L (см. рис. 40). Мы предположим, что расположение катушек соответствует положительному M . В таком случае при достаточно большом абсолютном значении M мы можем достигнуть того, что величина $RC - MS_0$ станет отрицательной. Мы получаем таким образом электрическую систему, описываемую также линейным уравнением

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2h \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0,$$

причем $h < 0$. Таким образом мы можем надлежащим выбором величины и знака M осуществить электрическую систему, которую в из-

вестной, ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с «отрицательным сопротивлением».

Все рассмотренные системы приводят нас к линейному дифференциальному уравнению вида: $\ddot{x} + 2hx + \omega_0^2 x = 0$, причем в отличие от прежних случаев h в этом уравнении отрицательно (ω_0^2 попрежнему положительно). Для исследования поведения этих систем мы можем приме-

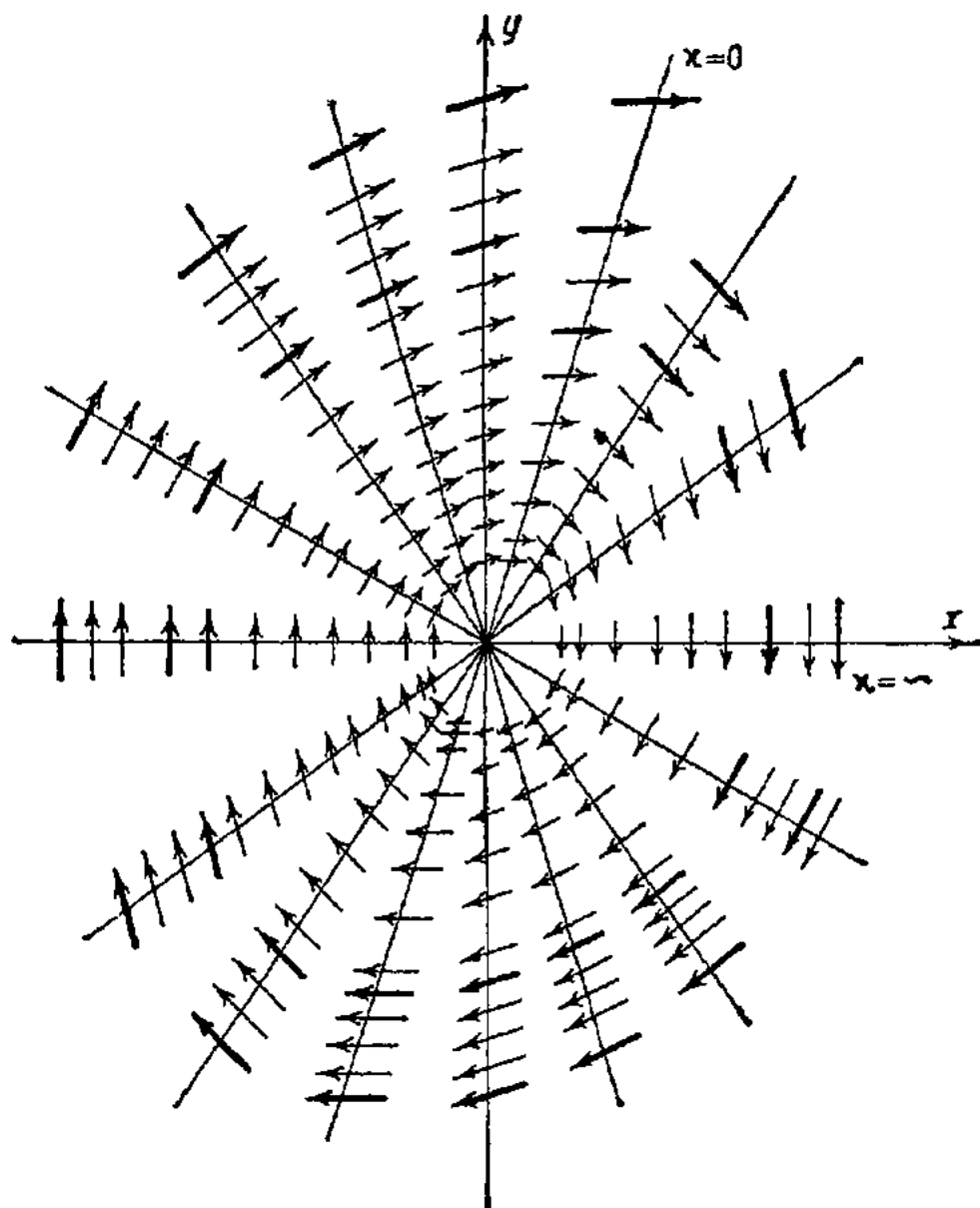


Рис. 42.

нить те методы, которые развиты выше. Но поскольку эти методы применимы независимо от знака h , мы не будем повторять всех выкладок, а просто используем результаты, полученные в прошлом параграфе для случая $h < 0$.

3. Картина на фазовой плоскости. Для того чтобы выяснить характер интегральных кривых на фазовой плоскости в случае $h < 0$, достаточно в обоих рассмотренных случаях линейного осциллятора (при малом и большом трении) проследить, как изменится установленная нами раньше картина при изменении знака h .

Для случая $h^2 < \omega_0^2$, т. е. для случая не слишком большого «отрицательного трения», мы получим снова семейство спиралей, определяемых уравнением:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = Ce^{2 \frac{h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} \arctg x \frac{y + hx}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}} \quad (34)$$

или в наших «полярных» координатах:

$$\rho = Ce^{\frac{h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} \psi} \quad (36)$$

Но так как $h < 0$, то с возрастанием ψ значение ρ будет убывать, т. е. ход спиралей изменится на обратный по сравнению с тем, который мы получили для систем с положительным h , считая в направлении положительных ψ (против часовой стрелки), и спирали будут скручиваться (рис. 42 и 43), а не раскручиваться, как в случае

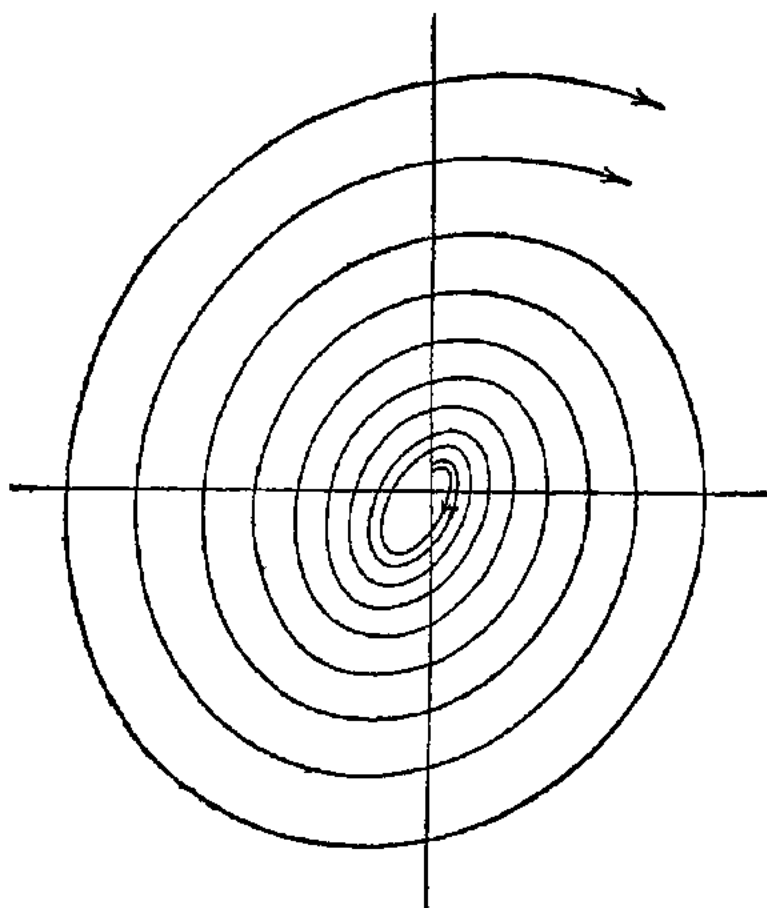


Рис. 43.

$h > 0$. Направление же движения представляющей точки по интегральной кривой поперечному должно совпадать с направлением движения часовой стрелки (так как оно однозначно определено тем, что, при $\dot{x} = \dot{y} > 0$, x должно возрастать). Следовательно, двигаясь по интегральной кривой, представляющая точка будет удаляться от состояния равновесия (особой точки $x=0$, $y=0$). Особая точка и в этом случае представляет собой асимптотическую точку семейства вложенных друг в друга спиралей, т. е. является особой точкой типа фокуса.

Скорость движения изображающей точки по фазовой плоскости поперечному обращается в нуль

только в начале координат и возрастает по мере удаления представляющей точки от начала координат. Так как, кроме того, эта скорость везде направлена по интегральной кривой в направлении от начала координат, то при любом (но отличном от нуля) начальном отклонении системы от состояния равновесия система через достаточный промежуток времени уйдет как угодно далеко от этого единственного состояния равновесия, а следовательно, мы не можем уба-

зять такую область $\delta(\epsilon)$, чтобы находящаяся в ней в начальный момент представляющая точка не ушла никогда за пределы заданной области ϵ . Следовательно, единственное положение равновесия в этом случае неустойчиво — особая точка представляет собой неустойчивый фокус. Совершенно ясно, что неустойчивость этого фокуса обусловлена именно тем, что $h < 0$. Мы видим таким образом, что в случае $h < 0$ и $h^2 < \omega_0^2$ движение системы представляет собой также осцилляторный процесс, как и в случае малого положительного h , но уже процесс не затухающий, а *нарастающий*. Максимальные отклонения системы со временем нарастают (рис. 44), и зависимость отклонений от времени определяется выражением вида $x = Re^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha)$. Закон нарастания максимумов — геометрическая прогрессия с знаменателем $e^{-hT_1} = e^{-d}$, причем, так как $h < 0$, то $d < 0$ и $e^{-d} > 1$. Величина $d_1 = -d > 0$ в этом случае носит название *логарифмического инкремента* нарастания колебаний.

Те оговорки, которые сделаны выше относительно декремента, целиком относятся к инкременту — понятие логарифмического инкремента применимо также только в линейным системам.

Итак, поскольку мы ограничиваемся линейной трактовкой системы, мы получаем беспрерывно нарастающий осцилляторный процесс.

Таким же образом мы можем проследить характер поведения интегральных кривых, для случая большого трения ($h^2 > \omega_0^2$), в том случае, когда h отрицательно. При $h^2 > \omega_0^2$ семейство интегральных кривых определяется уравнением (55):

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2},$$

где

$$q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad \text{и} \quad q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

Если $h < 0$, то $q_1 < q_2 < 0$, между тем как в случае $h > 0$ мы имеем $q_2 > q_1 > 0$. Поэтому изменится положение прямых $y + q_1 x = 0$ и $y + q_2 x = 0$, т. е. новых осей u и v .

Обе эти прямые будут в этом случае проходить через первый и третий квадранты, так как x и y одного знака (рис. 45).

Мы снова получаем семейство интегральных кривых «параболического» типа, причем все кривые проходят через единственную особую точку, лежащую в начале координат. Это особая точка типа узла.

Определяя направление движения представляющей точки по ф. зовой плоскости, мы легко убедимся в том, что движения эти происходят в направлениях, указанных на рисунках стрелками, и, следовательно, представляющая точка в своем движении по любой из интегральных кривых стремится уйти от состояния равновесия. О скорости движения представляющей точки мы можем повторить все то, что сказано выше.

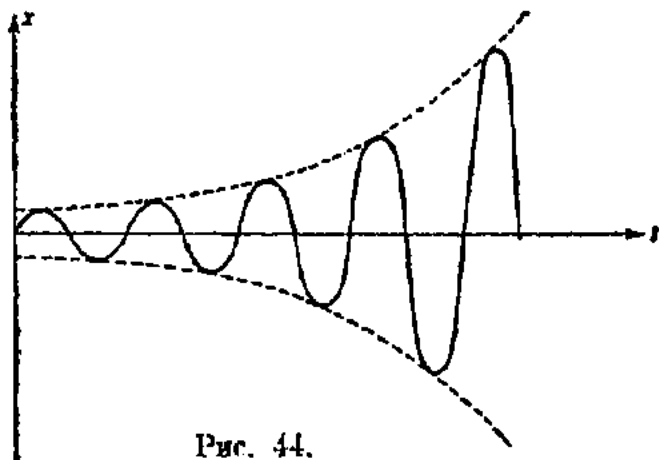


Рис. 44.

Следовательно, как бы мало ни было начальное отклонение системы от состояния равновесия ($x=0$, $y=0$), она по прошествии достаточно длинного промежутка времени уйдет достаточно далеко от состояния равновесия, и, значит, это состояние равновесия неустойчиво. Мы снова не можем указать такой конечной области начальных значений $\delta(\epsilon)$, чтобы представляющая точка не вышла из заданной области ϵ .

Рассматриваемая особая точка есть неустойчивый узел, причем опять-таки неустойчивость обусловлена тем, что $h < 0$. Мы получили апериодический процесс, нарастающий по закону: $x = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}$, где $(-q_1)$ и $(-q_2)$ положительны, так как q_1 и q_2 меньше нуля. И по-

скольку мы рассматриваем систему как линейную, это нарастание в ней будет продолжаться беспределенно.

Рассматривая систему как линейную, мы не находим в ней устойчивых стационарных состояний; она не может остаться в области, близкой к состоянию равновесия, — отклонения в линейной системе должны непрерывно возрастать. Между тем при описании механической и электрической систем, которые привели нас к этим случаям, для того чтобы прийти к линейным уравнениям, мы должны были ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия (малое x и малое y). Значит, с одной стороны, мы должны ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия, а с другой стороны, рассматривая движение системы в этих об-

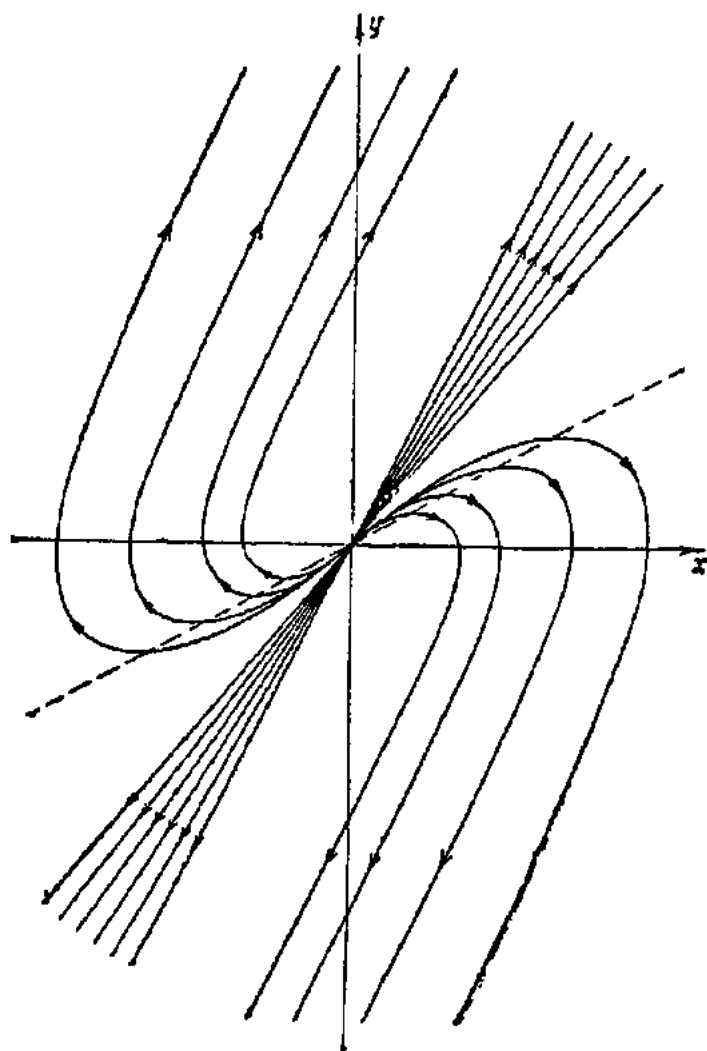


Рис. 45.

ластях, мы убедились в том, что система не останется в этой области, но неизбежно выйдет за ее пределы. Другими словами, линейная трактовка позволяет правильно изобразить поведение фазовых траекторий только в некоторой ограниченной области фазовой плоскости, вблизи положения равновесия. Но, с другой стороны, все фазовые траектории уходят за пределы этой ограниченной области. Чтобы исследовать дальнейшее поведение системы, мы должны, очевидно, учесть какие-то обстоятельства, которые до сих пор нами не учитывались, и рассматривать систему уже как нелинейную.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае *линейная трактовка принципиально не может дать ответа на целый ряд во-*

просов о поведении системы, например на вопрос о том, какие движения будет совершать система по прошествии достаточно длинного промежутка времени.

4. Поведение системы при изменении обратной связи. Итак, мы пришли к следующим результатам (мы ограничимся только формулировкой результатов для лампового генератора; для груза на движущейся ленте и для маятника Фруда выводы, конечно, будут совершенно аналогичны).

Пока обратная связь достаточно мала¹⁾ (мы считаем, что выбрано такое направление витков катушек, что $M > 0$), мы имеем в контуре либо апериодическое затухание, либо затухающие колебания в зависимости от того, будет ли h^2 больше или меньше, чем ω_0^2 . Если сам по себе контур обладает таким большим сопротивлением, что в нем происходит апериодическое затухание, то, выбрав достаточно сильную обратную связь, мы можем достигнуть того, что эта обратная связь будет «компенсировать» большую часть сопротивления контура, т. е.

$h = \frac{RC - MS_0}{2L}$ будет малая положительная величина. Тогда в случае не слишком больших начальных отклонений (таких, что система не выходит за пределы линейной области) будет происходить колебательное, а не апериодическое затухание. Увеличивая обратную связь, мы должны пройти через положение, когда $RC - MS_0 = 0$, и затем перейти в область, где $RC - MS_0 < 0$, т. е. достигнуть такого положения, при котором состояние равновесия станет неустойчивым (так как $h < 0$) и будет происходить уже не затухание, а нарастание колебаний. Чем больше будет абсолютная величина h , тем больше будет шаг спирали на фазовой плоскости, тем быстрее будут раскручиваться эти спирали и тем больше будет возрастать величина максимального отклонения в системе за время одного колебания. Наконец, при дальнейшем увеличении обратной связи система пройдет через положение, в котором $h^2 = \omega_0^2$, и перейдет в область, где $h^2 > \omega_0^2$ (причем h у нас все время отрицательно). В этой области мы снова получим апериодический процесс, но уже не затухающий (как при большом положительном h), а нарастающий. Скорость нарастания процесса, характеризуемая величинами q_1, q_2 , будет тем больше, чем больше $|h|$, следовательно, чем больше обратная связь.

Итак, одним только изменением величины h , характеризующей «сопротивление» системы (от больших положительных до больших отрицательных h), можно перевести систему последовательно через пять различных областей, соответствующих различным типам движений и состоя-

¹⁾ В рассмотренных нами механических системах нет элемента, аналогичного переменной обратной связи. Поэтому для изменения режима нужно изменять какой-то другой параметр, например крутизну характеристики трения. В регенеративной схеме мы также могли бы вместо изменения величины обратной связи изменять крутизну характеристики лампы в рабочей точке, т. е. изменять величину S_0 . Из-за отсутствия обратной связи в рассмотренных механических системах нет полной аналогии между этими системами и обычным ламповым генератором. Аналогом маятника Фруда является так называемый диатрионный генератор, в котором нет обратной связи и самовозбуждение наступает вследствие работы на подающем участке характеристики лампы.

ний равновесия, а именно: устойчивый узел, устойчивый фокус, центр, неустойчивый фокус и неустойчивый узел. В следующем параграфе мы познакомимся еще с одним типом состояний равновесия, который не может быть изменен путем изменения затухания в системе. Рассмотренные же пять типов состояний равновесия отличаются один от другого только величиной и знаком трения в системе.

Однако не все эти пять типов равновесия представляют одинаковый физический интерес. Всем состояниям равновесия, кроме центра ($h = 0$), соответствуют конечные области значений параметров системы, в частности параметра M . Другими словами, значениям M , заключенным между заданными конечными пределами, может соответствовать всякое состояние равновесия, кроме центра, а этому последнему состоянию равновесия соответствует только одно единственное значение $M_{кр}$, получающееся из условия $MS_0 - RC = 0$. Если это условие хоть немного нарушается, т. е. если хотя бы немного изменяется какой-либо из параметров системы, то система переходит в область $h > 0$ или $h < 0$. Это значит, что состояние равновесия типа центра неустойчиво по отношению к малым изменениям параметров системы. Другие же состояния равновесия сохраняют свой тип при небольших изменениях параметров системы, т. е. обладают устойчивостью по отношению к малым изменениям параметров системы, а так как небольшие изменения параметров системы всегда неизбежны, то неустойчивые по отношению к ним состояния не отражают поведения реальной физической системы. Поэтому состояние равновесия типа центра физически имеет значение лишь как граница между двумя другими состояниями — устойчивым и неустойчивым фокусом, точно так же как случай $h^2 = \omega_0^2$ имеет смысл лишь как граница между узлом и фокусом. Однако этим границам, как уже указывалось, не следует придавать слишком большого физического смысла. В реальных системах переход от одного типа движений к другому происходит постепенно, и физическая граница между колебательным и аperiodическим затуханием не слишком резка, так как при увеличении затухания система теряет свои колебательные свойства не сразу, а постепенно. Другими словами, в реальных системах мы не в состоянии отличить «сильный» фокус, т. е. фокус с очень большим h (когда h^2 только немного меньше ω^2), от «слабого» узла, т. е. узла, для которого h^2 только немного больше ω^2 . Точно так же мы не можем отличить очень слабое затухание от очень слабого нарастания, ибо, чтобы обнаружить разницу между этими двумя процессами, нам бы пришлось ждать чрезвычайно долго.

Мы убедились выше, что соответствующим выбором направления и величины обратной связи можно не только добиться уменьшения затухания собственных колебаний в системе, но и достигнуть того, что эти колебания станут нарастающими. Физический смысл этого явления совершенно ясен. Уменьшение затухания системы обусловлено, очевидно, тем, что вместо части энергии, рассеиваемой в контуре, поступает некоторое количество энергии из внешнего источника (в нашем случае из анодной батареи), которое частично компенсирует потери энергии в контуре и тем самым замедляет затухание в системе.

Чем сильнее обратная связь, тем больше энергии поступает из батареи в контур за период, тем большая часть потерь компенсируется и тем слабее затухают колебания. При дальнейшем увеличении обратной связи энергия, поступающая в контур, может оказаться больше, чем потери энергии в нем, и тогда энергия в контуре будет возрастать — в контуре будут происходить нарастающие колебания, а при дальнейшем увеличении поступающей в контур энергии — даже аперодическое нарастание. О том, как долго будет продолжаться нарастание колебаний, прекратится ли оно и когда именно, мы, как уже указывалось, ничего не можем сказать, оставаясь на линейной точке зрения.

Исследуя линейные уравнения, мы не можем также ничего сказать о том, какой процесс установится в системе по прошествии достаточно длинного промежутка времени и в частности возможен ли в данной системе периодический процесс. Мы можем лишь утверждать, что в рассматриваемой нами линейной системе периодический процесс невозможен. Для ответа на вопрос о дальнейшей судьбе реальной системы, после того как она выйдет за пределы области, которой мы ограничили наше рассмотрение, нужно, очевидно, рассматривать эту систему уже как нелинейную. Такое нелинейное рассмотрение и составляет нашу дальнейшую задачу. Пока мы лишь укажем, что отсутствие колебательных движений вблизи положения равновесия отнюдь не доказывает вообще невозможности колебательных движений в данной системе. В частности, если вблизи положения равновесия происходит аперодическое нарастание (неустойчивый узел), то это вовсе не значит, что в дальнейшем в системе не может установиться колебательный процесс. Как мы увидим, и в случае особой точки типа узла вполне возможно существование периодического процесса (незатухающих колебаний).

Вернемся, однако, к вопросу об энергии, компенсирующей потери в системе. Как для электрических, так и для механических систем картина с этой точки зрения получается одна и та же. В случае генератора энергия поступает в контур из анодной батареи, а электронная лампа является лишь тем механизмом, который регулирует нужным образом поступление энергии в контур. В механических же системах, к которым могут быть применены все наши выводы, источником энергии является мотор, приводящий в действие ленту или вал, а передача этой энергии в колебательную систему обусловливается соответствующим видом характеристики трения. Именно вид характеристик трения таков, что лента или вал больше «помогает» телу при движении в ту же сторону, чем «мешает» при движении навстречу. Если бы в регенеративном приемнике мы взяли $M < 0$ (неправильная обратная связь) или в механических моделях установили бы рабочую точку не на падающий, а на поднимающийся участок характеристики трения, то энергия из батареи или мотора не переходила бы в колебательную систему, а, наоборот, часть энергии колебаний рассеивалась бы во вспомогательном механизме (в лампе — на аноде или в подшипнике — на преодоление трения). Затухание колебаний в системе не только не уменьшилось бы, но, наоборот, возросло, если бы направление обратной связи было выбрано неправильно,

В заключение отметим (хотя эти вопросы и не будут рассматриваться в нашей книге), что в случае действия внешней силы на систему с обратной связью (например, на регенеративный приемник) также можно получить ответ на некоторые вопросы, оставаясь на почве линейной идеализации. Например, в случае $h < 0$, т. е. в случае недозвужденного регенератора, и слабых сигналов, т. е. в случае воздействия, не выводящего систему из области, в которой ее можно рассматривать как линейную, можно считать, что обратная связь только уменьшает затухание системы (увеличивает ее чувствительность и избирательность), не изменяя «линейных» свойств системы. Однако для достаточно сильных сигналов это утверждение будет уже неправильно.

§ 7. Линейная система с отталкивающей силой

До сих пор мы рассматривали линейные системы, в которых действует квази-упругая сила, т. е. сила, *притягивающая* к положению равновесия и пропорциональная смещению системы. Во всех рассмотренных случаях варьировался характер трения, но сила оставалась притягивающей. Между тем часто приходится сталкиваться с системами (и с точки зрения теории колебаний эти системы представляют значительный интерес), в которых действует сила, не притягивающая к положению равновесия, а, наоборот, *отталкивающая* систему от положения равновесия, причем величина этой отталкивающей силы возрастает с возрастанием смещения системы. При рассмотрении этих систем прежде всего возникает вопрос о том, какова зависимость отталкивающей силы от смещения. Как мы увидим ниже при рассмотрении некоторых частных примеров (и как это вытекает из общих соображений о разложении произвольной функции в ряд), в области достаточно малых отклонений можно считать, что отталкивающая сила пропорциональна смещению. При таком предположении мы приходим к линейным системам, в которых действует не притягивающая, а отталкивающая сила. Поведение этих систем (характер их движений) существенно отличается от поведения линейных систем, рассмотренных нами выше.

В качестве первого примера, приводящего к линейной системе с отталкивающей силой, мы рассмотрим поведение математического маятника в непосредственной близости к верхнему (неустойчивому) положению равновесия. При этом мы сначала для простоты будем считать, что трение в маятнике отсутствует. В этом случае, если угол φ отсчитывать от верхнего положения равновесия (рис. 46), уравнение движения маятника напишется так:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi. \quad (83)$$

Ограничивая рассмотрение областью, достаточно близкой к положению равновесия, мы можем $\sin \varphi$ заменить через φ . Тогда уравнение принимает вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (84)$$



Рис. 46.

Мы получили опять линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Это уравнение, как и уравнение, полученное для области, близкой к нижнему положению равновесия, конечно, не описывает движения маятника при любых углах φ и пригодно только для достаточно малых значений φ .

1. Картина на фазовой плоскости. Уравнение, к которому приводит рассматриваемый нами случай, в общем виде может быть написано так:

$$m\ddot{x} - kx = 0, \quad (85)$$

где m и k — положительные числа. Для исследования поведения системы, описываемой этим уравнением, мы могли бы выбрать любой из путей, использованных в предыдущих задачах, именно либо найти решение уравнения (85) и затем рассматривать найденное решение $x = f(t)$ и $\dot{x} = f'(t)$ как параметрическое уравнение интегральных кривых, либо, не интегрируя уравнения (85), исключить из него время, затем проинтегрировать и рассматривать полученное уравнение как уравнение интегральных кривых. Мы используем сейчас этот второй путь. Полагая $x = y$, мы можем заменить это уравнение второго порядка двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{k}{m} x; \quad (86)$$

исключая время, получим одно уравнение первого порядка, связывающее x и y :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x}{y}. \quad (87)$$

Состояние равновесия в этой системе (определяемое из условий $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$) только одно, именно точка $x = 0, y = 0$. Изоклиной $x = 0$ ($\frac{dy}{dx} = 0$) является ось ординат ($x = 0$), а изоклиной $x = \infty$ ($\frac{dy}{dx} = \infty$) служит ось абсцисс ($y = 0$). Для того чтобы точно определить вид траекторий представляющей точки на фазовой плоскости, нужно проинтегрировать уравнение (87). Переменные разделяются, и интегрирование дает:

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{m} = C. \quad (88)$$

Это — уравнение семейства равносторонних гипербол, отнесенное к главным осям. При $C = 0$ мы получаем две асимптоты этого семейства: $y = -\sqrt{\frac{k}{m}} x$ и $y = \sqrt{\frac{k}{m}} x$, которые проходят через начало координат. Начало координат является единственной особой точкой рассматриваемого семейства интегральных кривых. Все же остальные интегральные кривые суть гиперболы, не проходящие через начало координат (рис. 47). Такая

особая точка, через которую проходят только две интегральных кривых, являющихся асимптотами (все остальные интегральные кривые, имеющие вид гипербол, через особую точку не проходят), называется особой точкой типа седла.

Какие же заключения мы можем вывести из полученной картины на фазовой плоскости? Прежде всего, имея в виду, что при положительной скорости координата системы должна возрасти, а при отрицательной убывать, мы получим во всех четырех квадрантах такие направления движения представляющей точки по фазовой плоскости, которые указаны на рис. 47 стрелками.

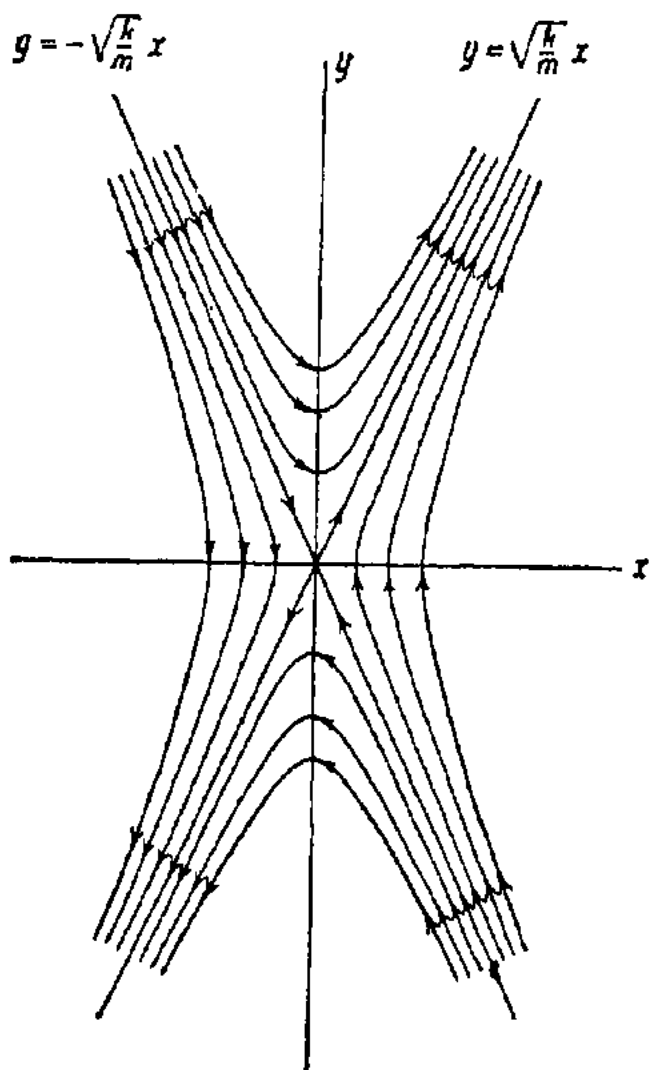


Рис. 47.

движения представляющей точки, легко убедиться, что, где бы ни находилась представляющая точка в начальный момент (за исключением особой точки и точек на асимптоте $y = -\sqrt{\frac{k}{m}}x$, прохо-

дящей через второй и четвертый квадранты), она всегда в конечном счете будет удаляться от состояния равновесия, причем движение ее всегда будет не колебательным, а аperiodическим.

Скорость движения представляющей точки в этом случае обращается в нуль также только в особой точке, в остальных же точках фазовой плоскости она отлична от нуля. Таким образом, если даже представляющая точка движется по какой-либо из интегральных кривых вначале по направлению к особой точке (движения во втором и четвертом квадранте), все же в конце концов она уйдет как угодно далеко от состояния равновесия во всех случаях, кроме движения по асим-

птоте $y = -\sqrt{\frac{k}{m}}x$. Следовательно, в рассматриваемом случае состояние равновесия неустойчиво, ибо мы не можем выбрать область $\delta(\epsilon)$ так, чтобы представляющая точка, находящаяся в начальный момент в этой области, не вышла в конце концов за пределы заданной области ϵ . Очевидно, что особая точка типа седла всегда неустойчива, и эта неустойчивость связана с самим типом особой точки и характером интегральных кривых, а не с направлением движения представляющей точки по интегральной кривой (если бы направления движений изменились на обратные, то особая точка все же была бы неустойчива).

Что касается движений по асимптоте $y = -\sqrt{\frac{k}{m}}x$, то они представляют собой некоторый особый случай, когда система может только приближаться к состоянию равновесия. При этом движении представляющая точка будет приближаться к началу координат со стремящейся к нулю скоростью, но не достигнет начала координат в конечный промежуток времени. Этот случай так называемого *лимитационного* движения мы рассмотрим подробно в дальнейшем. Однако самая возможность такого движения, направленного к состоянию неустойчивого равновесия, ясна из элементарных соображений. Действительно, при любом начальном отклонении маятника от верхнего состояния равновесия мы всегда можем выбрать такую, и притом вполне определенную, начальную скорость, чтобы кинетическая энергия маятника в начальный момент была точно равна той работе, которую он должен совершить, чтобы как раз достигнуть состояния равновесия. Если эта начальная скорость направлена в сторону положения равновесия, то маятник будет двигаться к этому положению и должен в него притти. Но, как мы увидим в дальнейшем, если бы нам удалось совершенно точно задать так подобранную начальную скорость, то маятник достиг бы состояния равновесия только через бесконечно большой промежуток времени.

Однако этот специальный случай движения к положению равновесия, конечно, не нарушает утверждения о том, что состояние равновесия в данном случае неустойчиво. Действительно, при любых начальных условиях, а не при тех специально выбранных, которые точно соответствуют асимптоте $y = -\sqrt{\frac{k}{m}}x$, система будет всегда удаляться от

состояния равновесия. Это движение по асимптоте не может быть никогда точно реализовано, так как оно соответствует одному начальному состоянию, а не конечной области начальных состояний. Такое начальное состояние (вернее «одна линия начальных состояний») не образует конечной области начальных состояний и не может быть совершенно точно задано в системе. Другими словами, если считать, что все начальные состояния равновероятны, то вероятность такого начального состояния, которое соответствует движению по направлению к особой точке, равно нулю. Поэтому всякое реальное движение в системе будет удалять систему от состояния равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда помимо отталкивающей силы в системе существует и трение, причем это трение может быть и положительным и отрицательным. К первому из этих случаев приводит рассмотрение маятника вблизи верхнего положения равновесия при наличии силы трения, пропорциональной скорости. В этом случае уравнение, описывающее систему, будет иметь вид:

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} - k\varphi = 0, \quad (89)$$

где $h > 0$ и $k > 0$.

2. Электрическая модель. Ко второму случаю, т. е. в случае $h < 0$, в уравнении (89) нас привело бы рассмотрение маятника Фруда в области, близкой к верхнему состоянию равновесия (конечно,

при линейной идеализации). Однако вместо этого случая мы рассмотрим электрическую систему (рис. 48), которая при соответствующей идеализации приводит нас к той же задаче.

Рассматриваемая схема (рис. 48) по существу представляет собой схему, отличающуюся от обычного лампового генератора только своеобразным методом осуществления обратной связи. Вместо обычно применяемой индуктивной и емкостной обратной связи в приведенной схеме обратное воздействие анодной цепи на сеточную осуществляется через сопротивление r , входящее в анодную цепь. Нужный для создания неустойчивости (соблюдения условий возбуждения) знак обратного воздействия обеспечивается применением второй лампы L_{II} , изменяющей знак подводимого к ее сетке напряжения¹⁾. В обычной схеме с индуктивной обратной связью нужный знак обратного действия обеспечивается соответствующим поворотом катушки обратной связи (выбором знака M). В рассматриваемой же схеме такой метод обо-

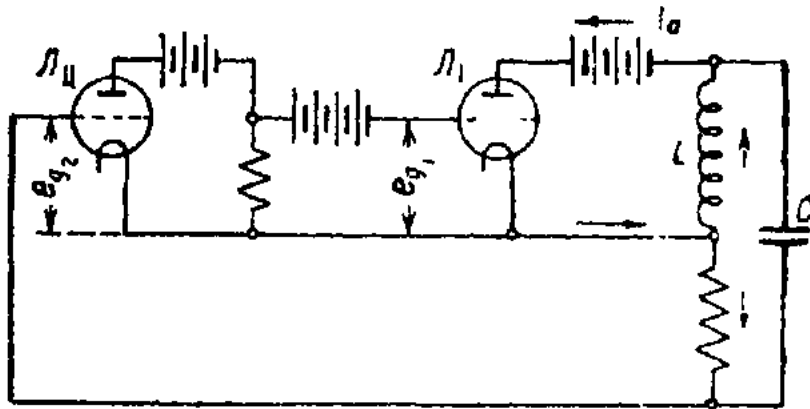


Рис. 48.

рота фазы не может быть применен, и для этой цели применяется электронная лампа. Для того чтобы эта лампа только оборачивала фазу и в определенное число раз усиливала подводимые напряжения, не изменяя их формы, характеристика лампы должна быть прямолиней-

ной. Предположив, что это условие соблюдается, легко установить связь между напряжениями на сетке второй и первой ламп, т. е. напряжениями e_{g_2} и e_{g_1} .

При выбранных направлениях токов (эти направления указаны на рис. 48 стрелками) мы получим для сеточных напряжений, т. е. для напряжения на сетке лампы, относительно нити следующие выражения:

$$e_{g_2} = -ri$$

и

$$e_{g_1} = -ke_{g_2} = kri, \quad (90)$$

где k — коэффициент усиления каскада с лампой L_{II} — есть некоторая постоянная величина, следующим образом зависящая от параметров лампы L_{II} и величины анодного сопротивления R :

$$k = \frac{SR}{1 + SDR},$$

¹⁾ Об изменении лампой фазы подводимого напряжения на 180° смотрите подробнее в дополнительной главе «Электронная лампа».

причем S — крутизна характеристики лампы и D — ее проницаемость¹⁾. Установив зависимость между e_{g_1} и e_{g_2} и пользуясь правилами Кирхгофа для контура $L-C-r$, мы легко получим уравнение рассматриваемой схемы. Прежде всего, пренебрегая сеточными токами (в сеточных цепях обеих ламп), мы получим:

$$L \frac{dI_a}{dt} - L \frac{di}{dt} - ri - \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (91)$$

Если пренебречь анодной реакцией, как мы это уже делали раньше, то можно считать, что

$$I_a = \varphi(e_{g_1}) = \varphi(krv),$$

а

$$\frac{dI_a}{dt} = kr \varphi' \frac{di}{dt},$$

и окончательно:

$$L (kr \varphi' - 1) \frac{di}{dt} - ri - \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (92)$$

Здесь φ' это $\frac{dI_a}{de_{g_1}}$, т. е. крутизна характеристики лампы M_1 . Ограничиваясь областью малых значений i , мы можем (как уже делали при рассмотрении регенеративного приемника) считать характеристику прямолинейной. Тогда $\varphi' = S_0$ — крутизна характеристики в рабочей точке, и мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L (kr S_0 - 1) \frac{di}{dt} - ri - \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (93)$$

или после дифференцирования по t :

$$L (kr S_0 - 1) \frac{d^2i}{dt^2} - r \frac{di}{dt} - \frac{i}{C} = 0. \quad (94)$$

Если $kr S_0 < 1$, то мы получаем обычное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее систему с «притягивающей силой» и положительным трением. Если же $kr S_0 > 1$, а этого мы всегда можем достигнуть соответствующим выбором k и r , то знаки перед i и $\frac{di}{dt}$ отрицательны, и мы получаем уравнение, которое можно трактовать как уравнение, описывающее систему с «отталкивающей силой» и отрицательным трением. Как и в предыдущих случаях, наше линейное уравнение пригодно для описания системы только в некоторой ограниченной области, в которой значения i достаточно малы, и поэтому характеристики ламп, как первой, так и второй, можно считать прямолинейными.

1) Подробнее об этом см. в дополнительной главе «Электронная лампа».

Итак, оба рассмотренных нами случая — маятник в верхнем положении равновесия и ламповый генератор с «омической обратной связью» — привели нас при соответствующих упрощениях к уравнению вида:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k_1x = 0, \quad (95)$$

причем $k_1 = -\frac{k}{m} < 0$, а h в первом случае положительно, а во втором отрицательно.

Для исследования поведения системы, описываемой этим уравнением, мы можем применить любой из применявшихся ранее методов, причем оба эти метода приведут нас к уравнениям фазовых траекторий, аналогичным тем, которые уже были получены при рассмотрении систем с притягивающей силой и большим трением (случай узла), т. е. при рассмотрении того же уравнения, но при условии, что $k_1 > 0$ и $h^2 > k$. Остановимся сначала на первом методе — исключения времени непосредственно из дифференциального уравнения (95). Полагая $\frac{dx}{dt} = y$ и деля $\frac{dy}{dt}$ на $\frac{dx}{dt}$, получим уже известное нам уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -2h - k_1 \frac{x}{y}, \quad (96)$$

с той, однако, разницей, что в этом случае $k_1 < 0$ (h может быть и положительным и отрицательным). Попрежнему единственной особой точкой семейства является начало координат ($x=0, y=0$). Уравнение изоклин, соответствующих тангенсу угла наклона χ , — также уже известное нам уравнение прямых:

$$2h + k_1 \frac{x}{y} = \chi$$

или

$$k_1 x = +(\chi - 2h)y. \quad (97)$$

Изоклина $\chi = 0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$ есть прямая

$$y = -\frac{k_1}{2h}x.$$

Изоклина $\frac{dy}{dx} = \infty$ есть ось абсцисс ($y=0$). Для определения вида интегральных кривых мы можем, как и прежде, проинтегрировать уравнение (96) как однородное, подстановкой $z = \frac{y}{x}$. Мы получим такой же результат, как и в случае $k_1 > 0$ и $h^2 > k_1$, так как вид выражений, получающихся в результате интегрирования этого уравнения, зависит только от знака выражения $h^2 - k_1$. Но в обоих рассматриваемых случаях $h^2 - k_1 > 0$, так как в первом случае $h^2 > k_1$,

а во втором случае $k_1 < 0$. Поэтому уравнение (55), полученное нами в § 4 в результате интегрирования дифференциального уравнения фазовых траекторий (96), остается в силе и для этого случая. Мы имеем, следовательно, уравнение фазовых траекторий:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C (y + q_2 x)^{q_2}, \quad (55)$$

где попрежнему

$$q_1 = h - \sqrt{h^2 - k_1}$$

и

$$q_2 = h + \sqrt{h^2 - k_1}.$$

Однако между рассматриваемым случаем и случаем узла существует та разница, что в случае узла ($k_1 > 0$) q_1 и q_2 одного знака (и их знак совпадает со знаком h), в рассматриваемом же случае ($k_1 < 0$) q_1 и q_2 разных знаков.

Если бы мы пошли другим путем, именно сначала нашли решение вида $Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}$, а затем исключили бы время, то получили бы снова уже известный результат, именно уравнение $(y + q_1 x)^{q_1} = C (y + q_2 x)^{q_2}$, опять-таки с той разницей, что в случае $k_1 > 0$ оба корня q_1 и q_2 были действительны и одинаковых знаков, а в случае $k_1 < 0$ корни q_1 и q_2 также действительны, но разных знаков, причем $q_1 < 0$ и $q_2 > 0$.

В случае, когда q_1 и q_2 разных знаков, уравнение (55) или, что то же самое, уравнение

$$(y + q_1 x)^{q_1} (y + q_2 x)^{-q_2} = C \quad (98)$$

определяет семейство кривых гиперболического типа с асимптотами

$$y = -q_1 x$$

и

$$y = -q_2 x, \quad (99)$$

причем эти асимптоты проходят через разные квадранты.

Можно показать, что наличие сопротивления, как положительного, так и отрицательного, не изменяет принципиально картины, полученной нами выше для случая без трения. Рассмотрим сначала для определенности случай $h > 0$. Обе асимптоты при увеличении h вращаются в направлении по часовой стрелке (рис. 49). В ту же сторону вращается при увеличении h и изоклина $\frac{dy}{dx} = 0$ (ее уравнение $y = -\frac{k_1}{2h} x$, причем $h > 0$ и $k_1 < 0$, при $h = 0$ она совпадает с осью ординат). Изоκлина же $\frac{dy}{dx} = \infty$ остается неподвижной — она совпадает с осью абсцисс.

Влияние положительного трения сказывается таким образом в том, что картина на фазовой плоскости сжимается так, как указано на рис. 49. В случае же $h < 0$ обе асимптоты при возрастании h по абсолютной величине вращаются против часовой стрелки. Также против часовой стрелки вращается с возрастанием h и изо-

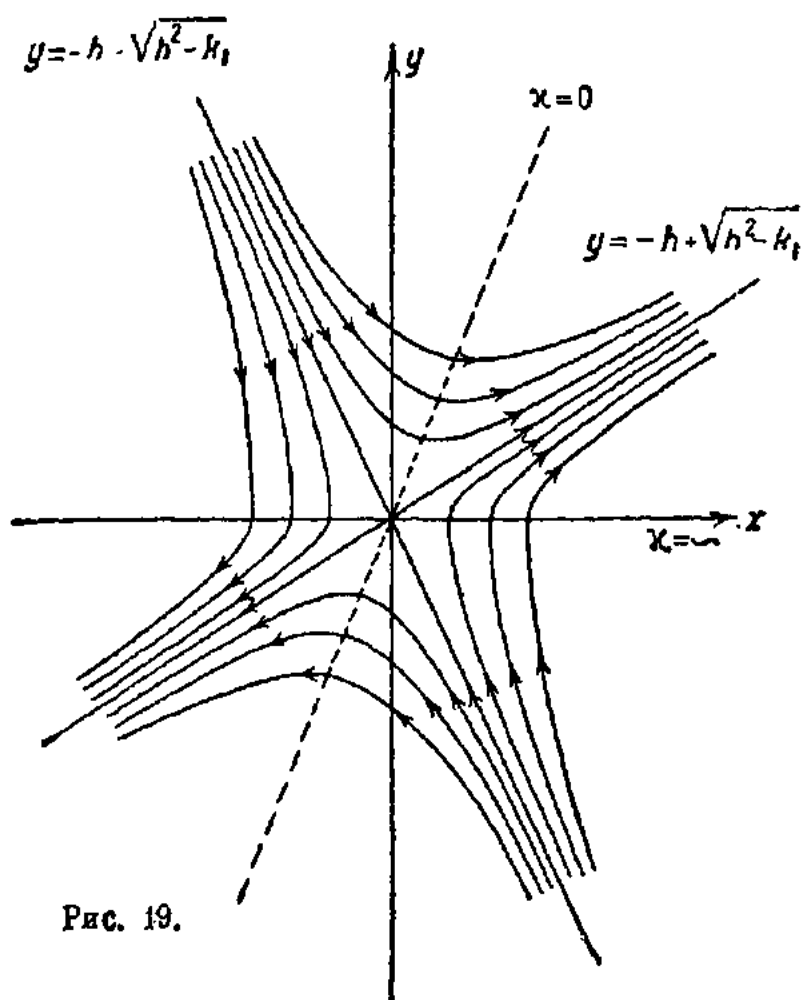


Рис. 19.

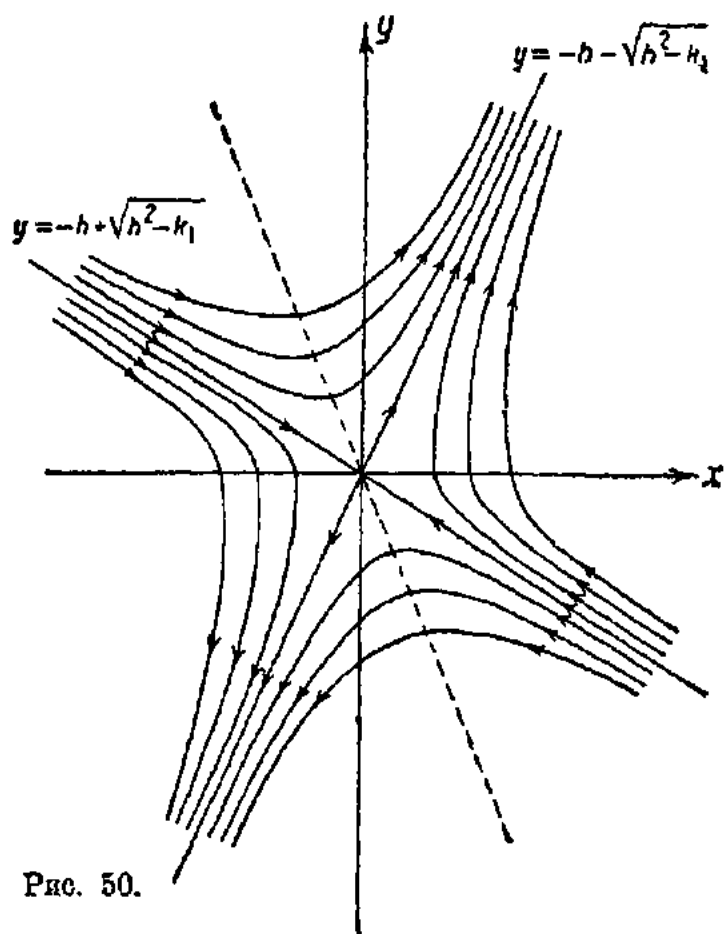


Рис. 50.

ОПЕЧАТКИ

| <i>Стр.</i> | <i>Строки</i> | <i>Напечатано</i> | <i>Следует читать</i> | <i>По чьей вине</i> |
|-------------|---------------|--|--------------------------------|---------------------|
| 84 | Рис. 49 и 50 | $y = -h - \sqrt{h^2 - k_1}$ и т. д. | $y = (-h - \sqrt{h^2 - k_1})x$ | Авт. |
| 85 | 5 снизу | $y = q_2x$ | $y = -q_2x$ | Тип. |
| 85 | 3 снизу | $y = q_1x$ | $y = -q_1x$ | Тип. |

клина $\kappa = 0$. Изоклина же $\kappa = \infty$ остается на месте. Влияние отрицательного трения приводит таким образом к скашиванию всей картины в обратном направлении, так, как это указано на рис. 50.

Вместо этого рассмотрения мы могли бы так же, как и в ранее рассмотренных случаях, ввести новые переменные

$$u = y + q_1 x$$

и

$$v = y + q_2 x$$

и преобразовать уравнение интегральных кривых (98) к виду:

$$v = C u^{\frac{q_1}{q_2}}.$$

Так как в этом случае q_1 и q_2 разных знаков, то полученное уравнение можно переписать так:

$$v = \frac{C}{u^\alpha}, \quad (100)$$

где $\alpha = \left| \frac{q_1}{q_2} \right|$ и, следовательно, $\alpha > 0$. Это уравнение определяет семейство кривых «гиперболического типа», причем более точно характер этих кривых определяется характером показателя α , именно дробный он или целый, четный или нечетный (при $\alpha = 1$ это обычные гиперболы). Для двух значений константы C (нуль и бесконечность) кривые семейства вырождаются в две прямые $u = 0$ и $v = 0$, совпадающие с осями координат. Кривые семейства, соответствующие конечным значениям константы C , через начало координат не проходят. Но при конечном C для $u = 0$ мы получаем $v = \infty$ и, наоборот, для $v = 0$, $u = \infty$; следовательно, «кривые» $u = 0$ и $v = 0$ являются асимптотами остальных кривых семейства. Далее, так как

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\alpha C}{u^{\alpha+1}} = C_1 v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

то все кривые семейства имеют горизонтальные касательные при $u = \infty$ и $v = 0$ и вертикальные при $v = \infty$ и $u = 0$. На основании всего сказанного легко построить приблизительно картину семейства кривых, определяемых уравнением (100), — она изображена на рис. 51.

Картина сохраняет свой общий характер и при обратном переходе к координатам x и y . При этом оси u и v превращаются в прямые

$$y = q_2 x$$

и

$$y = q_1 x,$$

и вся картина искажается так, как мы уже указывали, сохраняя, однако, в основных чертах свой характер.

Во всяком случае, так или иначе, мы убеждаемся в том, что характер поведения системы в области, близкой к состоянию равновесия, не изменяется при наличии трения (как положительного, так и отрицательного). Особая точка попрежнему седло, она всегда неустойчива, и все движения в системе в конечном счете удаляют систему от состояния равновесия. По прошествии достаточно длинного промежутка времени система уйдет как угодно далеко и, следовательно, наверно, выйдет за пределы той области, которой мы ограничили

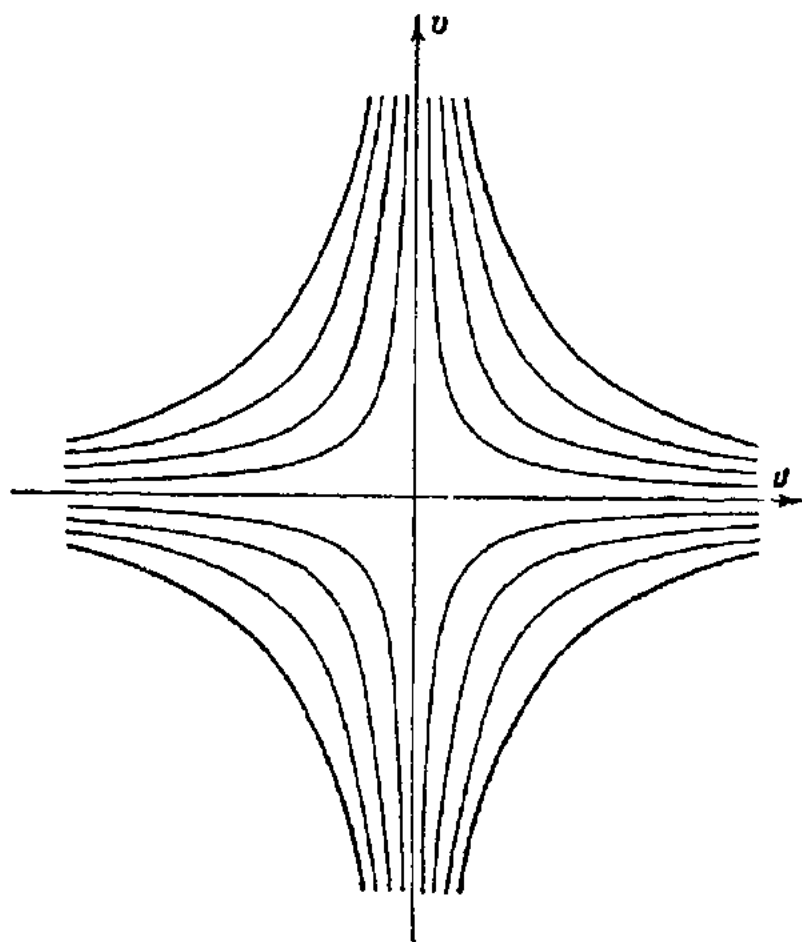


Рис. 51.

наше рассмотрение и в которой систему можно было рассматривать как линейную. Значит, и в этом случае, так же как и в случае отрицательного трения, т. е. вообще во всех случаях неустойчивости состояния равновесия, мы можем при помощи линейной идеализации описать поведение системы только в течение определенного промежутка времени и то при небольших начальных отклонениях, пока система не успела уйти за пределы «линейной области».

Рассмотрение линейных систем мы закончим весьма важным для дальнейшего замечанием. Ни одна из рассмотренных

нами картин на фазовой плоскости для различных линейных систем, кроме гармонического осциллятора без трения (т. е. кроме консервативной линейной системы), не дала на фазовой плоскости замкнутых интегральных кривых, и все интегральные кривые имели ветви, уходящие в бесконечность. Между тем периодическим процессам на фазовой плоскости должны соответствовать замкнутые интегральные кривые. Мы можем поэтому вывести из нашего рассмотрения линейных систем следующее важное заключение: *в линейных неконсервативных системах периодические процессы вообще невозможны.*

ГЛАВА II

КОНСЕРВАТИВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Введение

При макроскопическом рассмотрении мы встречаемся всегда с неконсервативными системами, т. е. системами, в которых полная энергия не остается постоянной, а рассеивается при движении. Однако во многих случаях этот процесс рассеяния энергии происходит настолько медленно и влияние его на характер движения системы столь незначительно, что на целый ряд интересующих нас вопросов мы можем ответить, не учитывая этого влияния и считая, что сумма потенциальной и кинетической энергии в системе остается постоянной. В результате такой идеализации мы приходим к представлению о консервативных системах.

В других же случаях рассеяние энергии в системе происходит столь быстро, что мы уже не можем пренебрегать этим обстоятельством и должны рассматривать систему как неконсервативную, для того чтобы (с заданной степенью точности) ответить на те же самые вопросы, на которые в первом случае мы могли ответить, считая систему консервативной. Как уже неоднократно указывалось, к разделению систем на консервативные и неконсервативные мы приходим в результате идеализации свойств реальных физических систем, а характер допустимой идеализации зависит не только от свойств системы, но и от самого характера тех вопросов, которые нас интересуют. Так, например, для решения вопроса о движении маятника, испытывающего очень малое трение (маятник подвешен на очень острых призмах и помещен в сосуд, из которого удален воздух), мы можем для не слишком больших промежутков времени (например, сотен периодов) с очень большой точностью рассматривать его как систему консервативную, т. е. считать, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной. Если же нас интересует вопрос о характере движений маятника в течение очень большого промежутка времени, то, рассматривая систему как консервативную, мы уже не сможем получить правильного ответа на данный вопрос. Несмотря на то, что энергия рассеивается очень медленно, за достаточно большой промежуток времени ее рассеется столько, что энергия, оставшаяся в системе, будет заметно меньше той, которую имела система в начальный момент. Точно так же движение планет, например земли, мы можем рассматривать как движение консервативное, опять-таки если интересующие нас промежутки времени не слишком велики. При очень

больших промежутках времени, охватывающих геологические эпохи, мы для рассмотрения движения земли должны учитывать так называемое приливное трение, при учете которого мы уже не можем считать систему консервативной.

Допустимость консервативной идеализации, как уже указывалось, зависит как от характера вопроса, так и от свойств системы. На тот же вопрос о движении маятника в течение промежутка времени, равного сотне периодов, мы при консервативной идеализации ничего не сможем ответить, если маятник движется в среде с большим сопротивлением. В этом случае он уже в течение одного размаха расходует значительную долю сообщенной ему вначале энергии; и для промежутка времени, равного 100 периодам, сумму кинетической и потенциальной энергии маятника даже приблизительно нельзя считать постоянной.

Рассмотрение консервативных систем помимо того, что оно сможет дать непосредственный ответ на целый ряд вопросов, представляет для нас особый интерес в силу следующих причин. Во-первых, мы здесь получим возможность уже довольно глубоко подойти к выяснению тех понятий (фазовой плоскости, особых точек, периодических движений, устойчивости, зависимости динамической системы от параметра), которые нам понадобятся для рассмотрения нашей основной задачи — теории автоколебательных систем. Во-вторых, консервативные системы интересны еще и потому, что мы в некоторых случаях сможем изучать автоколебательные системы только постольку, поскольку они близки к консервативным системам¹⁾.

Заметим, что для физики в целом теория консервативных систем имеет весьма большую самостоятельную ценность²⁾.

§ 2. Простейшая консервативная система

Рассмотрим простейшую автономную консервативную систему с одной степенью свободы: движение материальной точки по прямой под действием силы, зависящей только от расстояния. Положение материальной точки вполне определяется заданием одного числа — абсциссы x . Механическое состояние системы определяется заданием положения точки x и скорости точки $\dot{x} = y$. Массу точки для простоты выкладок

1) Точнее, в некоторых случаях мы сможем изучать только такие стационарные движения в автоколебательных системах, которые близки к некоторым движениям в консервативных системах.

2) Прежде всего для теории строения материи. Еще со времен Лапласа и в особенности после того, как был открыт закон сохранения энергии, с тех пор как стали рассматривать теплоту как вид кинетической энергии, физики принимали, что в микромире действуют консервативные силы. На этом пути были достигнуты большие успехи кинетической теорией газов, теорией кристаллической решетки и др. Так называемая старая квантовая механика для определения стационарных состояний атома пользовалась консервативной моделью, лишь постулируя определенный рецепт для определения произвольных постоянных. Даже в новой квантовой механике, отказавшейся от пространственно-временного описания движения отдельных частиц, нужно знать гамильтонову функцию «идеальной модели атома», прежде чем написать уравнение Шредингера. С некоторой точки зрения можно рассматривать все развитие механики атома как развитие консервативной гамильтоновой механики.

мы примем равной единице; совершенно очевидно, что это предположение не уменьшит общности нашего исследования. Уравнение движения такой системы может быть написано по второму закону Ньютона в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} = f(x), \quad (101)$$

(где $f(x)$ — сила), или в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = f(x). \quad (102)$$

Во всем дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, мы будем предполагать, что $f(x)$ — аналитическая функция на всей прямой x ($-\infty < x < +\infty$) или, иначе говоря, что $f(x)$ — голоморфна в каждой точке прямой x ¹⁾.

Дифференциальное уравнение, определяющее кривые на фазовой плоскости, как мы уже знаем, получается в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (103)$$

где $\varphi(x, y) = \frac{f(x)}{y}$. Как будет двигаться изображающая точка по интегральным кривым на фазовой плоскости? Мы уже указывали, что так как y есть скорость, то при $y < 0$, т. е. в верхней фазовой полуплоскости, изображающая точка движется так, что x возрастает, а при $y > 0$, т. е. в нижней полуплоскости, так, что x убывает. Таким путем определится направление движения по фазовым траекториям. Скорость движения изображающей точки v можно выразить так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}.$$

Напомним еще раз, что следует различать скорость изменения положения — скорость материальной точки и скорость изменения состояния — скорость движения изображающей точки на фазовой плоскости. Первая скорость $\frac{dx}{dt} = y$ равняется ординате, вторая

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (104)$$

равняется длине нормали к рассматриваемой интегральной кривой в выбранной точке. Из выражения (104) непосредственно вытекает уже отмеченное нами обстоятельство, что во всякой точке фазовой плоскости изо-

1) Мы будем пользоваться такой терминологией: будем называть функцию $f(x)$ аналитической в данной области значений x , если она голоморфна в каждой точке этой области, т. е. если в окрестности этой точки она может быть разложена в степенной ряд с радиусом сходимости, отличным от нуля.

бражающая точка имеет конечную и отличную от нуля скорость, за исключением состояний равновесия (особых точек), в которых одновременно

$$y=0 \text{ и } f(x)=0. \quad (105)$$

В силу этих условий все состояния равновесия расположены на фазовой плоскости на оси x , причем их абсциссы удовлетворяют уравнению $f(x)=0$.

Пусть нам задана точка на фазовой плоскости x_0, y_0 . Спрашивается, можно ли всегда найти интегральную кривую, которая проходила бы через заданную точку, и будет ли такая кривая единственной? Уравнение (103) определяет в каждой точке фазовой плоскости единственное направление касательной, за исключением особых точек, где $y=0$ и $f(x)=0$.

Докажем, что в нашем случае через каждую неособую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая. Мы знаем, что такая кривая существует и будет единственной, если соблюдены условия теоремы Коши¹⁾. Мы рассматривали y как функцию x и имели дело с уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$; в этом случае $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{f(x)}{y^2}$, и, следовательно, $y=0$ есть геометрическое место точек на фазовой плоскости, где условия Коши нарушены. Будем рассматривать теперь x как функцию y . Тогда дифференциальное уравнение (103) следует записать в виде $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x)}$. В этом случае $\varphi(x, y) = \frac{y}{f(x)}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{yf'(x)}{[f(x)]^2}$. Условие $f(x)=0$ дает нарушение условий непрерывности, и, следовательно, для этого уравнения условия теоремы Коши нарушены на прямых $f(x)=0$. Мы рассматриваем одно и то же дифференциальное уравнение (103), только с различных точек зрения. Полученные нами при этом различные результаты отнюдь не противоречивы, так как условия Коши только достаточны, но не необходимы для единственности.

1) Теорема Коши о существовании и единственности решения, о которой мы уже упоминали раньше, может быть сформулирована следующим образом. Пусть нам дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная и непрерывная функция в данной области значений x, y , имеющая в той же области непрерывную производную $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Тогда, какую бы точку x_0, y_0 внутри рассматриваемой области мы ни взяли, всегда найдется одна и только одна функция $y=y(x)$, обращающаяся в y_0 при $x=x_0$ и удовлетворяющая рассматриваемому дифференциальному уравнению для всех значений x в интервале $|x-x_0| < \alpha$ ($\alpha > 0$), где α — число, зависящее от вида функции φ и точки x_0, y_0 ; геометрически это означает, что через каждую точку x_0, y_0 внутри рассматриваемой области проходит одна и только одна интегральная кривая. Заметим, что если $\varphi(x, y)$ — аналитическая функция в рассматриваемой области значений x, y , то, очевидно, для такой области выполнены сформулированные выше условия теоремы Коши. Сформулированные здесь условия существования и единственности решения дифференциального уравнения могут быть заменены другими, более легкими, условиями (например, так называемыми условиями Липшица); однако для наших целей эти более легкие условия не представляют существенного интереса.

Следовательно, мы можем утверждать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая, за исключением, может быть, точек, где одновременно $y=0$ и $f(x)=0$, т. е. за исключением особых точек. Как мы увидим дальше, для рассматриваемого случая консервативной системы, в особых точках интегральные кривые либо пересекаются и имеют, вообще говоря, различные касательные, либо вырождаются в изолированные точки и совсем не имеют касательных. Скорость изображающей точки

$$\mathbf{v} = iy + jf(x) \quad (106)$$

всюду определена однозначно и, как мы уже видели, обращается в нуль только в особой точке. Отсюда в силу непрерывности следует, что вблизи особой точки изображающая точка замедляет свое движение.

Пусть для системы уравнений (102) в некоторой области (при нашем предположении об аналитичности $f(x)$ на всей прямой x этой областью является вся плоскость) выполнены условия теоремы Коши¹⁾. Отсюда вытекает, что для рассматриваемой динамической системы прошедшее и будущее однозначно определяется настоящим, так как значение начальных условий однозначно определяет движение, или, иначе говоря, решение системы (102).

Останется ли это справедливым при движении по интегральным кривым, *пересекающимся* в особых точках? Или — что то же самое — может ли изображающая точка, помещенная в начальный момент на интегральную кривую, проходящую через особую точку (но не в особую

1) Теорема Коши в случае системы уравнений формулируется совершенно аналогично случаю одного уравнения. Пусть, например, мы имеем систему двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, t);$$

пусть $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$ — функции, непрерывные в некоторой области значений x, y, t и имеющие в этой области непрерывные частные производные по x и по y . Тогда, какую бы точку x_0, y_0, t_0 внутри рассматриваемой области мы ни взяли, всегда найдется одна и только одна система функций $x=x(t), y=y(t)$, обращающихся соответственно в x_0, y_0 при $t=t_0$ и удовлетворяющих данной системе дифференциальных уравнений для всех значений t в интервале $|t-t_0| < a$ ($a > 0$), где a — число, зависящее от вида функций P и Q и от точки x_0, y_0, t_0 . Геометрически это означает, что через каждую точку пространства x, y, t , лежащую внутри рассматриваемой области, проходит одна и только одна интегральная кривая.

Если правые части дифференциальных уравнений не зависят от t (что как раз имеет место в интересующем нас случае) и в некоторой области значений x, y (области G) непрерывны и имеют непрерывные частные производные, то условия теоремы Коши будут, очевидно, выполняться во всей цилиндрической области пространства x, y, t , соответствующей всевозможным значениям t ($-\infty < t < +\infty$) и значениям x, y внутри области G . Поэтому начальное значение t_0 мы в этом случае можем брать любым. Нетрудно также показать, что в этом случае траектории на фазовой плоскости являются проекциями интегральных кривых пространства x, y, t на плоскость x, y . При этом все интегральные кривые, проходящие через точки, имеющие одни и те же координаты x_0, y_0 и различные координаты t (т. е. через разные точки одной и той же прямой, параллельной оси t), проектируются в одну и ту же траекторию фазовой плоскости.

точку) достигнуть этой особой точки в конечное время? Мы покажем, что это невозможно: изображающая точка, находящаяся в начальный момент в точке фазовой плоскости, не являющейся особой точкой для уравнения (103), может лишь асимптотически приближаться к особой точке, при неограниченно возрастающем t .

Сделаем прежде всего следующее замечание. Картину кривых на фазовой плоскости мы можем — как мы уже видели — описывать либо одним уравнением (103) и изучать с его помощью интегральные кривые, либо описывать системой уравнений (102) и изучать фазовые траектории. В сущности можно сказать, что во втором случае мы, после решения, получаем уравнения тех же интегральных кривых, но в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, — иначе получаем закон движения изображающей точки по интегральной кривой на фазовой плоскости. Различие этих двух способов изображения одного и того же семейства кривых особенно ярко проявляется в следующем. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — координаты ¹⁾ особой точки уравнения (103), т. е. координаты точки, в которой нарушаются условия теоремы Коши для одного уравнения (103); тогда $x = x_0$, $y = y_0$ в нашем случае будет точкой, в которой выполняются условия теоремы Коши для системы уравнений (102).

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что система функций $x = x_0$, $y = y_0$ есть решение системы уравнений (102), т. е., как об этом мы уже говорили, что точка x_0 , y_0 является для системы (102) состоянием равновесия. Заметим, что так как в этом случае решение системы (102) (соответствующее состоянию равновесия) не зависит от t , то, задавая начальные значения $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, мы при любом t_0 получим решение в виде $x = x_0$, $y = y_0$.

Рассмотрим изображающую точку,двигающуюся по интегральной кривой, проходящей через особую точку, по направлению к особой точке. Скорость ее движения, как мы уже говорили, уменьшается и стремится к нулю при неограниченном приближении к состоянию равновесия. Спрашивается, может ли изображающая точка в конечное время достигнуть состояния равновесия или же она, как мы указали, может лишь асимптотически к нему приближаться, никогда его не достигая? Предположим, что имеет место первый случай, т. е. что изображающая точка, двигаясь по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, находится вне состояния равновесия в момент времени $t = t_0$ и достигает состояния равновесия с координатами $x = x_0$, $y = y_0$ в некоторый определенный момент времени t_1 ($t_1 > t_0$), т. е. что $x_0 = x(t_1)$, $y_0 = y(t_1)$. Но тогда мы получили бы два решения, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям: при $t = t_1$, $x = x_0$, $y = y_0$ — одно $x = x_0$, $y = y_0$, другое $x = x(t)$, $y = y(t)$. Последнее невозможно, так как в точке x_0 , y_0 — как это только что отмечалось для системы уравнений (102) — выполняются условия теоремы Коши.

Заметим, что в дальнейшем нам придется встретиться с системами уравнений [подобных (102) или более общего вида], для которых условия теоремы Коши в некоторых точках фазовой плоскости нару-

¹⁾ Как нетрудно видеть по уравнению (103), x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, а $y_0 = 0$.

шаются, например с такими идеальными моделями реальных физических систем, для которых ускорение не всегда остается конечным, а при приближении к некоторым точкам фазовой плоскости стремится к бесконечности. Само собой разумеется, что для таких идеальных моделей наши утверждения об однозначном определении прошедшего и будущего настоящим, вообще говоря, несправедливы. Точно так же мы уже не можем в таких случаях, вообще говоря, утверждать, что система не достигает состояния равновесия в конечное время. Заметим еще, что в таких случаях особые точки одного уравнения [подобного (103)] не всегда соответствуют состояниям равновесия.

§ 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия

Если мы знаем совокупность интегральных кривых на фазовой плоскости для какой-нибудь динамической системы, то мы получаем возможность сразу охватить всю картину возможных движений при различных начальных условиях. Для консервативной системы исследование этих интегральных кривых чрезвычайно облегчается тем, что уравнение (103) легко может быть проинтегрировано, так как переменные разделяются. Полученный интеграл имеет вид:

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h, \quad (107)$$

где $V(x)$ таково, что $V'(x) = -f(x)$, а h — константа интегрирования. Это уравнение выражает для нашего случая закон сохранения энергии. Дей-

ствительно, $\frac{y^2}{2} = \frac{mx^2}{2}$ есть кинетическая энергия, $V(x) = -\int_0^x f(x) dx$

есть взятая с обратным знаком работа действующих в системе сил или потенциальная энергия системы, h — так называемая константа энергии, зависящая от начальных условий. Определенным начальным условиям (при $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$) соответствует определенное h .

Если же мы зададим h , то одному и тому же значению h соответствует бесконечное множество начальных значений x и y — целая кривая $y = \Phi(x)$ на плоскости x, y (которая может иметь ряд изолированных ветвей) — так называемая *кривая равной энергии*. По одной из ветвей этой кривой и будет двигаться изображающая точка, если полная энергия рассматриваемого движения равняется h . Может случиться, что, задав h , мы не найдем действительных значений x и y , которые удовлетворяли бы уравнению (107). Это значило бы, что ни при каком действительном движении нашей системы энергия ее не может иметь этой величины.

В дальнейшем исследовании мы будем предполагать, что $f(x)$, а значит и $V(x)$ — аналитические функции на всей прямой x . (Впоследствии мы рассмотрим несколько примеров, где это не будет иметь места.)

Нам будет удобнее вести исследование, предполагая, что функция $V(x)$ задана. Заметим, что те значения $x = \bar{x}_1, \dots, x = \bar{x}_l$ (абсциссы особых

точек), которые обращают $f(x)$ в нуль, обращают в нуль и $V'(x)$. Следовательно, эти значения соответствуют экстремальным значениям потенциальной энергии $V(x)$, т. е. либо минимуму, либо максимуму, либо точке перегиба с горизонтальной касательной. Можно провести классификацию характера особых точек уравнения (103), исходя из экстремальных свойств потенциальной энергии в особых точках.

Прежде чем перейти к этой задаче, сделаем несколько общих замечаний, касающихся вида интегральных кривых на фазовой плоскости:

1) Уравнение (107) не меняется от замены y на $-y$. Следовательно, все кривые этого семейства симметричны относительно оси x .

2) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым вертикальны, — это, как легко видеть из (102), ось x , за исключением, может быть, особых точек.

3) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым горизонтальны, — это прямые, параллельные оси y , уравнение которых $x = \bar{x}_i$, где \bar{x}_i — корни уравнения $f(x) = 0$, за исключением, может быть, точек пересечения этих прямых с осью x , которые являются особыми точками.

Можно указать простой способ построения интегральных кривых на фазовой плоскости, если нам задана, как мы будем предполагать в дальнейшем, потенциальная энергия $V(x)$. С этой целью воспользуемся вспомогательной «плоскостью баланса энергии» с прямоугольными осями z , x , на которой отложим потенциальную энергию $z = V(x)$. Так как

$$\frac{y^2}{2} = h - V(x),$$

то если задана h — полная энергия, то кинетическая энергия представится в виде разности h и $V(x)$. Как мы уже говорили, если кинетическая энергия отрицательна, то соответствующее движение невозможно.

На рис. 52 изображен участок диаграммы баланса энергии для частного вида кривой $z = V(x)$. Чтобы получить интегральную кривую на фазовой плоскости¹⁾, которая для удобства изображена непосредственно под диаграммой баланса энергии, нужно последовательно извлекать из разностей $h - V(x)$ квадратные корни и откладывать их на фазовой плоскости вниз и вверх от оси x . При построении не следует забывать, как это только что было указано, что все интегральные кривые на фазовой плоскости пересекают ось x , имея вертикальную касательную, если только они ее не пересекают в особой точке²⁾.

Движение по полученному таким образом участку кривой легко найдется при помощи уже неоднократно применявшихся соображений. Изменив несколько h , получим соседнюю близкую кривую на фазовой плоскости.

¹⁾ Для простоты построения мы примем для фазовой плоскости несколько иной масштаб вдоль оси ординат, откладывая по ординатам не y , а $\frac{y}{\sqrt{2}}$.

²⁾ В рассматриваемом случае точка a не является особой, так как $f(a) \neq 0$.

Воспользуемся этим способом для решения нашей задачи — дать картину интегральных кривых на фазовой плоскости вблизи состояний равновесия. Начнем с того случая, когда состояние равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии.

Пусть минимум потенциальной энергии имеет место для $x = \bar{x}$ и пусть $V(\bar{x}) = h_0$.

Диаграмма баланса энергии вблизи $x = \bar{x}$ будет иметь вид, изображенный на рис. 53. Интегральная кривая для $h = h_0$ вырождается

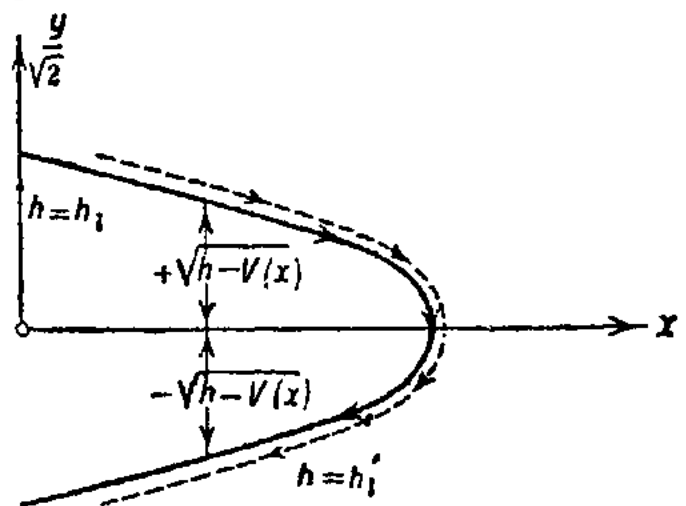
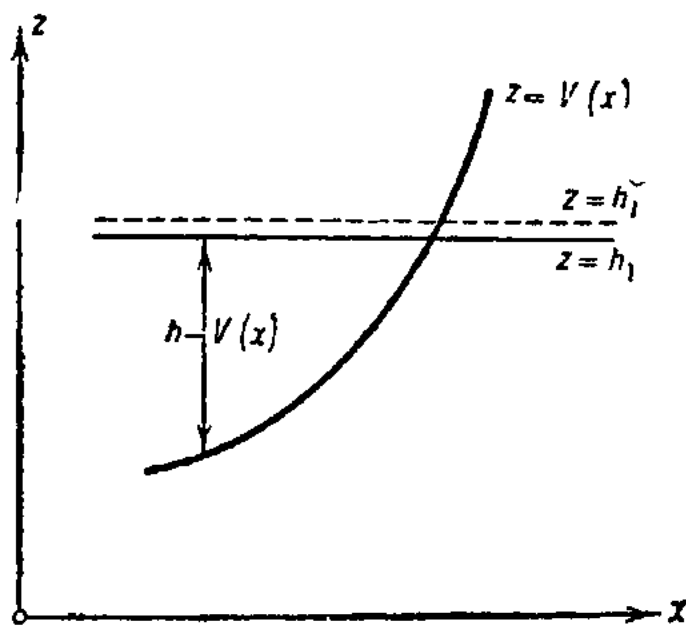


Рис. 52.

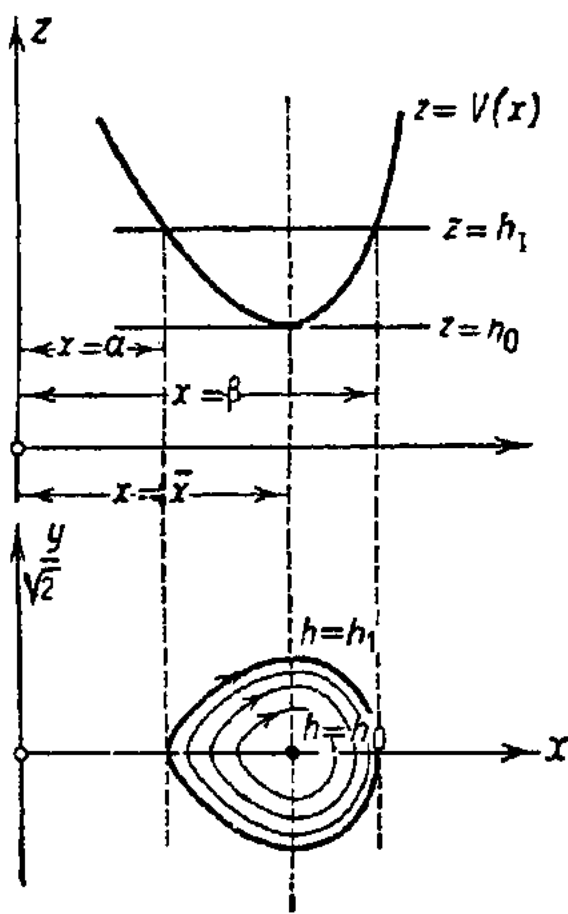


Рис. 53.

в изолированную точку с координатами $x = \bar{x}$, $\dot{y} = 0$. Для близкого значения $h = h_1$ ($h_1 > h_0$) будем иметь замкнутую интегральную кривую. Направление движения по этой замкнутой кривой легко найдется обычным методом.

При этом движении по замкнутой интегральной кривой действительная скорость, т. е. скорость материальной точки, два раза обращается в нуль — при $x = a$ и $x = \beta$ (рис. 53), скорость же изображающей точки на фазовой плоскости нигде не равняется нулю, так как наша кривая не проходит через особую точку. Представляющая точка, двигаясь по замкнутой кривой, будет возвращаться на прежнее место через ко-

нечный промежуток времени. Отсюда следует, что мы имеем дело с периодическим движением. Нетрудно видеть, что промежуточные значения h ($h_0 < h < h_1$) дают опять замкнутые интегральные кривые, которые также соответствуют периодическим движениям.

На фазовой плоскости мы получаем целый континуум замкнутых кривых, вложенных одна в другую и охватывающих выродившуюся в точку интегральную кривую $x = \bar{x}, y = 0$. Особую точку дифференциального уравнения с таким характером поведения окрестных интегральных кривых мы уже встречали при рассмотрении линейной консервативной системы. Такая точка, как указывалось, носит название *центра*.

Особая точка типа центра, как мы уже убедились при рассмотрении частного примера, соответствует устойчивому состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия наличия такой особой точки и приближенные уравнения замкнутых кривых вблизи нее.

Вблизи особой точки с координатой \bar{x} , разложения $f(x)$ и $V(x)$ в ряды имеют вид:

$$f(x) = a_1(x - \bar{x}) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \dots, \quad (108)$$

$$V(x) = h_0 - \left\{ \frac{a_1}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x - \bar{x})^4 + \dots \right\} \quad (109)$$

и т. д., где $a_1 = f'(\bar{x}) = -V''(\bar{x})$, $a_2 = f''(\bar{x}) = -V'''(\bar{x})$. Перенесем начало координат в эту особую точку, положив $x = \bar{x} + \xi$; $y = 0 + \eta$, и подставим в уравнение исследуемого семейства (107) выражение $V(\bar{x} + \xi)$ в виде ряда. Тогда уравнение исследуемого семейства кривых может быть записано так:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h. \quad (110)$$

Рассмотрим сперва случай $a_1 \neq 0$. В этом случае на нашей диаграмме баланса энергии прямая $\varepsilon = h_0$ имеет соприкосновение первого порядка с кривой $V(x)$ в точке $x = \bar{x}$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет минимум, то $V''(\bar{x}) > 0$ и $a_1 < 0$. Кривая (110) для $h = h_0$ имеет в точке $\xi = 0, \eta = 0$ изолированную особую точку.

Для достаточно малого $\alpha = h - h_0$ ($\alpha > 0$) получаются замкнутые кривые, близкие к эллипсам, так как приближенно они могут быть описаны уравнением:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (111)$$

где $b^2 = 2\alpha$, $a^2 = \frac{2\alpha}{|a_1|}$.

Движение, изображаемое на фазовой плоскости эллипсом, является гармоническим движением. Таким образом для достаточно малых начальных отклонений движение будет близко к гармоническому. При увеличении начальных отклонений движение, вообще говоря, будет все сильнее и сильнее отличаться от гармонического, причем период также будет меняться в зависимости от величины начальных отклонений, так как время обращения представляющей точки по разным интегральным кривым, вообще говоря, различно.

Если лишь какое-нибудь $a_k \neq 0$, тогда как $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_{k-1} = 0$, то на диаграмме баланса энергии прямая $z = h_0$ имеет соприкосновение k -го порядка с кривой потенциальной энергии в точке $x = \bar{x}$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет минимум, то k непременно нечетное и $a_k < 0$. Кривая (110) для $h = h_0$ опять имеет изолированную точку; для достаточно малого $a = h - h_0$ ($h > h_0$) мы получим замкнутые интегральные кривые вида:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k| \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots k(k+1)} = a. \quad (112)$$

Замкнутые кривые вокруг особой точки даже в непосредственной близости к ней уже не будут походить на эллипсы, и соответствующие движения уже не будут близки к гармоническим даже при весьма малых отклонениях.

Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости от этого не изменится: всякую особую точку, соответствующую минимуму потенциальной энергии, окружает континуум замкнутых кривых, вложенных друг в друга и соответствующих периодическим движениям.

Рассмотрим теперь случай, когда состояние равновесия соответствует максимуму потенциальной энергии. Диаграмма баланса энергии изображена на рис. 54 вверху, а внизу изображена фазовая плоскость. На фазовой плоскости для значения $h = h_0$ мы получим четыре ветви кривой с общей точкой. Эти ветви мы перенумеруем (I, II, III, IV) и будем для краткости называть «усами» рассматриваемой особой точки. Характер «усов» вблизи особой точки легко исследовать аналитически, как это будет сделано ниже. Для значений h , близких к h_0 ($h_1 > h_0$ и $h_2 < h_0$), мы будем иметь участки интегральных кривых, похожие на ветви гипербол (рис. 55).

Варьируя h между h_1 и h_2 , получим континуум промежуточных кривых. Легко найти движение по этим интегральным кривым, пользуясь уже неоднократно применявшимся методом.

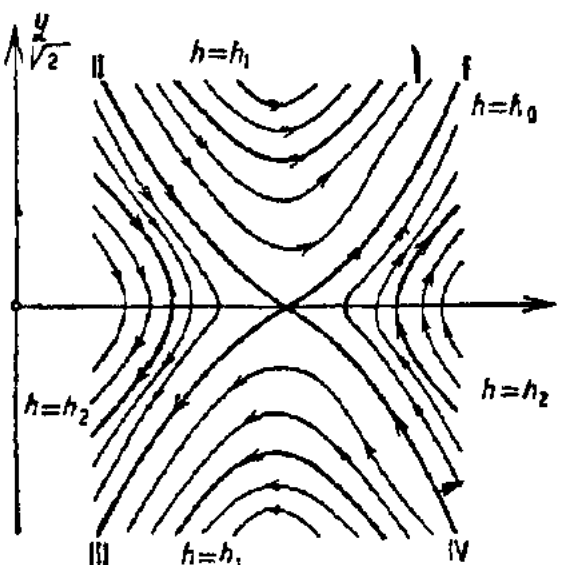
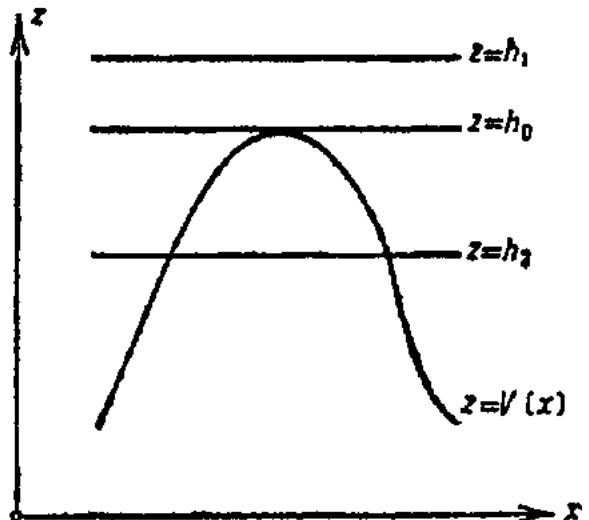


Рис. 54.

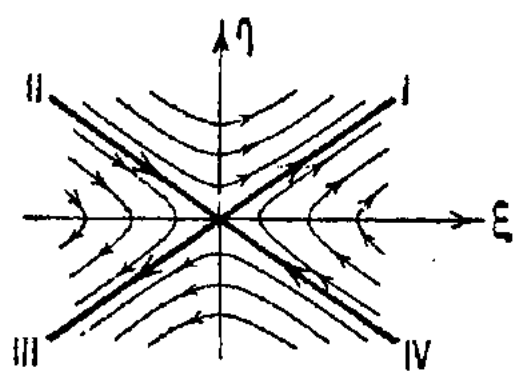


Рис. 55.

Во-первых, рассмотрим движение по усам (рис. 54). Изображающая точка, попав на усы II и IV вблизи состояния равновесия, асимптотически к нему приближается, попав на усы I и III — удаляется от состояния равновесия. (Заметим, что при изменении t на $-t$ усы меняются ролями.)

Движения, характеризуемые остальными интегральными кривыми, обладают тем свойством, что если изображающая точка попадет на любую из таких кривых вблизи состояния равновесия, она в конечное время уйдет достаточно далеко от этого состояния равновесия.

Особую точку дифференциального уравнения с таким характером поведения окрестных интегральных кривых мы также уже встречали при рассмотрении систем с отталкивающей силой, это — особая точка типа *седла*.

Как мы видели при рассмотрении линейной системы с отталкивающей силой, особая точка типа седла соответствует всегда *неустойчивому* состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия существования такой особой точки и приближенные уравнения интегральных кривых в непосредственной близости к состоянию равновесия. Поступая совершенно так же, как и в случае центра, мы опять придем к уравнению (110):

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h. \quad (110)$$

Опять начнем со случая простого соприкосновения прямой $z = h_0$ и кривой $V(x)$ в точке $x = \bar{x}$, т. е. со случая, когда $a_1 \neq 0$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет максимум, то $V''(\bar{x}) < 0$ и $a_1 > 0$. Полагая $h = h_0$, мы получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ($\xi = 0, \eta = 0$) является узловой точкой усов, причем уравнения касательных к усам в этом узле имеют вид:

$$\eta = +\sqrt{a_1} \xi \quad \text{и} \quad \eta = -\sqrt{a_1} \xi. \quad (113)$$

Для малых значений α ($\alpha = h - h_0$) мы получим семейство кривых, которые вблизи особой точки ведут себя подобно гиперболам, определяемым уравнением:

$$\frac{\eta^2}{2\alpha} - \frac{a_1 \xi^2}{2\alpha} = 1. \quad (114)$$

Вид усов и характер интегральных кривых в непосредственной близости к особой точке изображен на рис. 55. Мы уже исследовали в предшествующей главе характер движения представляющей точки по этому семейству гипербол. Ясно, что эти же результаты приближенно справедливы для движения по интегральным кривым вблизи особой точки и в рассматриваемом случае. При удалении от особой точки эти результаты, полученные нами для линейной системы, вообще говоря, все менее и менее точно описывают исследуемые движения. В том случае, когда прямая $z = h_0$ и кривая $V(x)$ имеют сопри-

основание k -го порядка, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и т. д. и лишь какое-нибудь $a_k \neq 0$. Так как для $x = \bar{x}$, $V(x)$ имеет максимум, то k обязательно нечетное и $a_k > 0$.

Пологая $h = h_0$, мы опять получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ($\xi = 0$, $\eta = 0$) является точкой самоприкосновения усов (рис. 56), которые вблизи особой точки близки к кривой $\eta^2 = \frac{a_k}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} \xi^{k+1}$ и имеют общей касательной ось ξ . Для малых значений α ($\alpha = h - h_0$) мы получим соседние интегральные кривые, которые вблизи особой точки ведут себя подобно кривым

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} = \alpha. \quad (115)$$

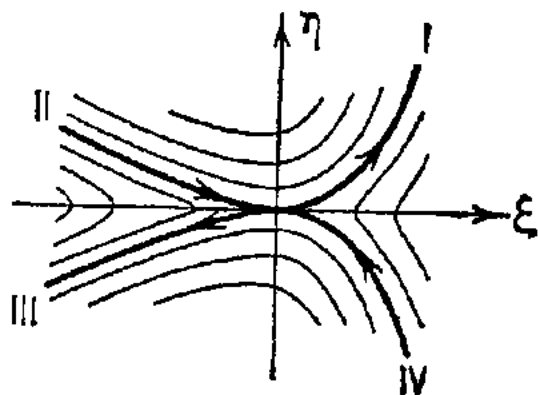


Рис. 56.

Интегральные кривые вокруг особой точки уже отличаются от гипербол, и исследуемые движения уже даже приближенно не могут быть описаны при помощи той картины, которая была получена для линейной системы отталкивающей силой.

Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости тождественна с предыдущим случаем и, следовательно, вполне определяется тем, что мы имеем дело с максимумом потенциальной энергии.

Рассмотрим теперь третий и последний случай, когда состоянию равновесия на кривой потенциальной энергии соответствует точка перегиба с горизонтальной касательной.

Диаграмма баланса энергии и вид фазовой плоскости изображены на рис. 57. Построение интегральных кривых на фазовой плоскости не вызывает никаких затруднений для всех значений h за исключением значения $h = h_0$, которое дает две ветви кривой с общей точкой $x = \bar{x}$, $y = 0$. Выяснение характера этих двух усов вблизи особой точки представляет некоторые затруднения, и для этого требуется аналитическое рассмотрение. Прежде чем перейти к такому исследованию, которое проводится совершенно так же, как в предыдущих двух случаях, заметим, что так как мы имеем дело с точкой перегиба, то непременно $a_1 = 0$

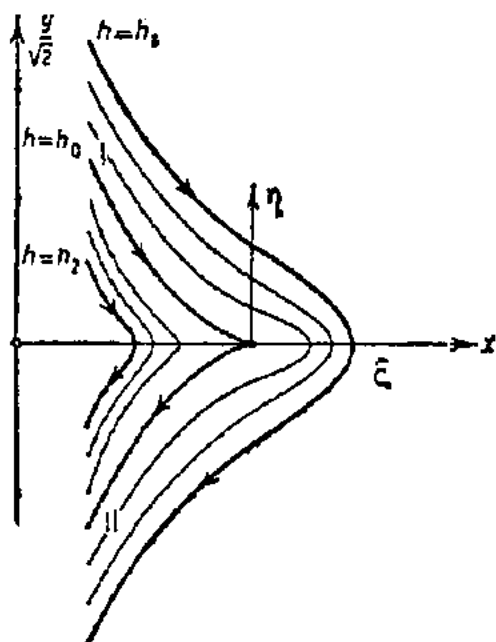
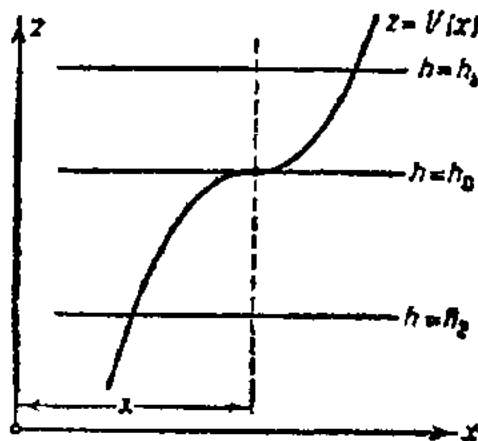


Рис. 57.

[так как $a_1 = -V''(x)$], и первый коэффициент a_k , не равный нулю, имеет k четным. Уравнение (115) в этом случае получает вид:

$$\frac{\eta^2}{2} - \left[\frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \frac{a_{k+1} \xi^{k+2}}{1 \cdot 2 \dots (k+2)} + \dots \right] = h - h_0. \quad (116)$$

Кривую, проходящую через особую точку, мы получим, полагая $h = h_0$. Нетрудно видеть, что эта кривая имеет в точке $\xi = 0, \eta = 0$ точку возврата первого рода. Изображающая точка, попав на ус I, асимптотически стремится к состоянию равновесия, попав на ус II — удаляется от состояния равновесия. Состояние равновесия, как и в случае седла; очевидно, является неустойчивым, так как по простейши достаточного большого промежутка времени представляющая точка, находившаяся в начальный момент в конечной области $\delta(\epsilon)$, непременно выйдет за пределы конечной области ϵ . Движение по усу I к состоянию равновесия не нарушает нашего утверждения о неустойчивости состояний равновесия, так же как и аналогичные движения в случае седла.

Мы рассмотрели три возможных случая экстремальных значений потенциальной энергии системы и связали их с типом особых точек и с вопросом об устойчивости состояний равновесия. Мы убедились в том, что в случае, если потенциальная энергия системы имеет минимум, то состояние равновесия устойчиво, если потенциальная энергия имеет максимум или точку перегиба, то состояние равновесия неустойчиво. Мы можем на этом основании для рассматриваемого случая простейшей консервативной системы сформулировать две основных теоремы теории устойчивости: во-первых, теорему Лагранжа ¹⁾, которая гласит:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво,
и, во-вторых, обратную теорему Ляпунова:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не минимум, то состояние равновесия неустойчиво.

Помимо связи между характером экстремального состояния потенциальной энергии и типом особой точки дифференциального уравнения для простейшей консервативной системы легко установить связь между характером экстремального состояния потенциальной энергии и типом особой точки кривых, в том смысле, как этот термин «особая точка» применяется в дифференциальной геометрии. Установление связи между особыми точками дифференциального уравнения и особыми точками в смысле дифференциальной геометрии поможет читателю различать эти два понятия. Необходимо, однако, иметь в виду, что та связь, которую мы сейчас установим, действительна только для консервативных систем. Для удобства выкладок мы перепишем уравнение (107) в виде:

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) - h = 0. \quad (117)$$

¹⁾ Эта теорема иногда носит название теоремы Лежен-Дарикле, по имени математика, который ее впервые строго доказал. Эта теорема справедлива также и для консервативных систем со многими степенями свободы.

Задав h , мы получим определенную кривую равной энергии, а меняя h , мы получим семейство интегральных кривых. Рецепты исследования характера особых точек кривой, в обычном значении этого термина, известны из дифференциальной геометрии. Найдем те кривые, которые могут иметь особые точки, и найдем координаты этих особых точек.

По (117) имеем:

$$F'_x = V'(x); \quad F'_y = y. \quad (118)$$

Следовательно, координаты особых точек, которые определяются условиями $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$, даются уравнениями:

$$-V'(x) = f(x) = 0; \quad y = 0. \quad (119)$$

Только те кривые, которые проходят через эти точки, могут иметь особенности. Условия (119) совпадают с условиями (105), определяющими особые точки системы уравнений. Этого следовало ожидать заранее, так как условия (119) определяют те точки фазовой плоскости, где направление касательной к интегральной кривой неоднозначно. Таким образом вновь введенное нами понятие об особой точке дифференциального уравнения первого порядка связывается со старым, известным из курсов дифференциальной геометрии понятием об особой точке кривой. Особые точки дифференциального уравнения суть точки фазовой плоскости, которые, вообще говоря, являются особыми в обычном смысле этого слова для тех кривых, которые через них проходят. Других особых точек у семейства интегральных кривых быть не может. По (110) уравнение интегральной кривой, проходящей через особую точку $x = \bar{x}$, $y = 0$, имеет вид:

$$\frac{y^2}{2} - \left\{ \frac{a_1}{1 \cdot 2} (x - \bar{x})^2 + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x - \bar{x})^3 + \dots + \frac{a_k}{1 \cdot 2 \dots k(k+1)} (x - \bar{x})^{k+1} + \dots \right\} = 0. \quad (117a)$$

Нетрудно показать, пользуясь обычными методами дифференциальной геометрии, что здесь возможны следующие случаи:

а) $a_1 \neq 0$; тогда:

1) Если $a_1 > 0$, то особая точка кривой является узлом с направлением касательной $\pm \sqrt{a_1}$. Так как $V''(\bar{x}) = -a_1$, то этот случай соответствует максимуму потенциальной энергии.

2) Если $a_1 < 0$, то кривая имеет изолированную точку, которая соответствует минимуму потенциальной энергии.

б) $a_1 = 0$; $a_2 = 0 \dots a_{k-1} = 0$; $a_k \neq 0$.

Тут возможны следующие случаи:

I. k — нечетное.

1) Если $a_k > 0$, то особая точка является точкой самоприкосновения, причем единственной касательной в особой точке является ось x ; так как $V^{(k+1)}(\bar{x}) = -a_k$, то этот случай опять соответствует максимуму потенциальной энергии.

2) Если $a_k < 0$, то кривая имеет изолированную точку, соответствующую минимуму потенциальной энергии.

II. k — четное.

Независимо от знака k особая точка является точкой возврата первого рода, причем касательной в этой точке является ось x . Такая особая точка соответствует точке перегиба для $V(x)$. Мы исчерпали все возможные случаи. Особая точка для рассматриваемых кривых не может быть очень сложной. В самом неблагоприятном случае это — двойная точка, так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ в нашем случае никогда не обращается в нуль. Мы можем так коротко сформулировать результаты исследования: *минимуму потенциальной энергии соответствует изолированная особая точка; максимуму потенциальной энергии соответствует либо узел, либо точка самоприкосновения, топологически тождественная узлу; точке перегиба потенциальной энергии соответствует точка возврата первого рода.*

§ 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости

Перейдем теперь от локального исследования движений вблизи особых точек к исследованию кривых на всей плоскости. При этом мы опять будем пользоваться плоскостью баланса энергии и будем исходить из предположения, что $V(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x . Потом, когда мы перейдем к примерам, мы рассмотрим несколько случаев, когда $V(x)$ допускает разрывы.

Итак, предположим, что на плоскости z, x нам дана кривая $z = V(x)$, удовлетворяющая указанным требованиям ¹⁾, и некоторая прямая $z = h$. Построим на фазовой плоскости совокупность всех движений, которые характеризуются заданной константой энергии. Могут встретиться следующие основные случаи:

1) Прямая $z = h$ нигде не пересекает кривой $V(x)$. Если в этом случае точки кривой $z = V(x)$ лежат выше точек прямой $z = h$, то на всей фазовой плоскости не существует движений с такой полной энергией, так как скорости таких движений были бы мнимыми. Если же прямая $z = h$ лежит выше кривой $z = V(x)$, то на фазовой плоскости мы будем иметь две симметрично расположенные ветви фазовой траектории (рис. 58). Изображающая точка, начавшая двигаться с любого места как верхней, так и нижней ветви, будет двигаться в одном

¹⁾ Для краткости рассуждений мы предположим, что $V(x)$ не допускает точек перегиба, в которых касательная параллельна оси x .

направлении не останавливаясь и уйдет в бесконечность. Если мы заменим t на $-t$, т. е. заставим время «течь в обратном направлении», то характер движения изображающей точки не нарушится, изменится лишь направление движения. Такие движения, такие фазовые траектории, для которых изображающая точка при всяком начальном положении уходит в бесконечность, мы будем называть убегающими движениями и убегающими траекториями. Рассматриваемые движения являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Легко видеть, что для соседних значений h мы получим ту же самую картину, у нас будут совершенно аналогичные фазовые траектории.

2) Прямая $z = h$ пересекает кривую $z = V(x)$, нигде ее не касаясь (рис. 59). Для тех значений x , для которых $V(x) > h$, нет фазовых

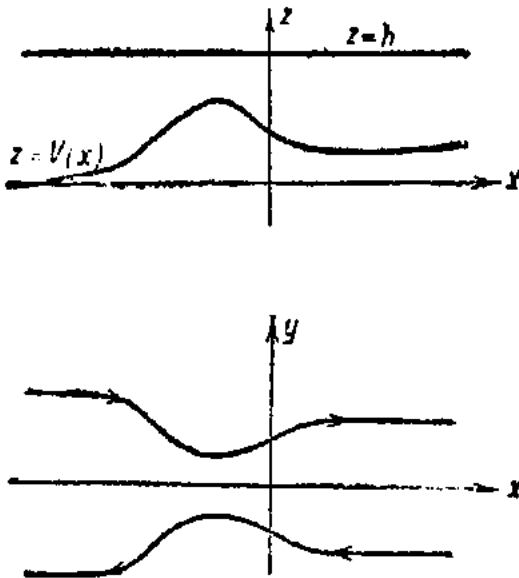


Рис. 58.

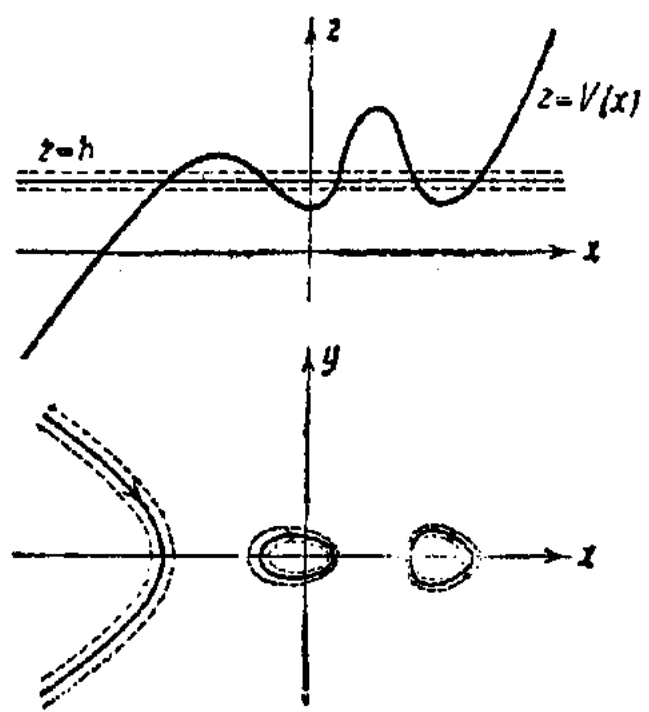


Рис. 59.

траекторий, для остальных же значений x существуют фазовые траектории, причем они бывают двух родов: это либо ветви, уходящие в бесконечность (число которых может быть 0, 1, 2), или это замкнутые ветви (число которых может быть любым). Ветви, уходящие в бесконечность, опять-таки соответствуют движениям, убегающим как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Замкнутые ветви соответствуют периодическим или, как их иногда называют, либрационным движениям ¹⁾.

Для близких значений h мы будем иметь ту же самую картину, причем около замкнутых кривых мы получим замкнутые же фазовые кривые, а около бесконечных ветвей — бесконечные ветви.

3) Прямая $z = h$ касается кривой $z = V(x)$. Тогда все фазовые кривые можно разбить на следующие классы:

¹⁾ Последний термин связан с теорией «условно-периодических» движений, имеющих применения в астрономии и старой квантовой механике.

а) *Изолированные точки*, вблизи которых (при данном h) нет ветвей фазовых кривых. Это — устойчивые состояния равновесия, о которых мы уже говорили. Если мы будем менять h , то при увеличении h получим замкнутую кривую, охватывающую рассматриваемую изолированную точку, при уменьшении h вблизи изолированной точки мы не получим действительных ветвей кривой.

б) *Изолированные конечные куски фазовых кривых*. Они могут быть двух родов: или это просто замкнутые кривые, соответствующие периодическим движениям, о которых у нас уже шла речь, или это фазовые кривые с самопересечением, принадлежащие к числу так назы-

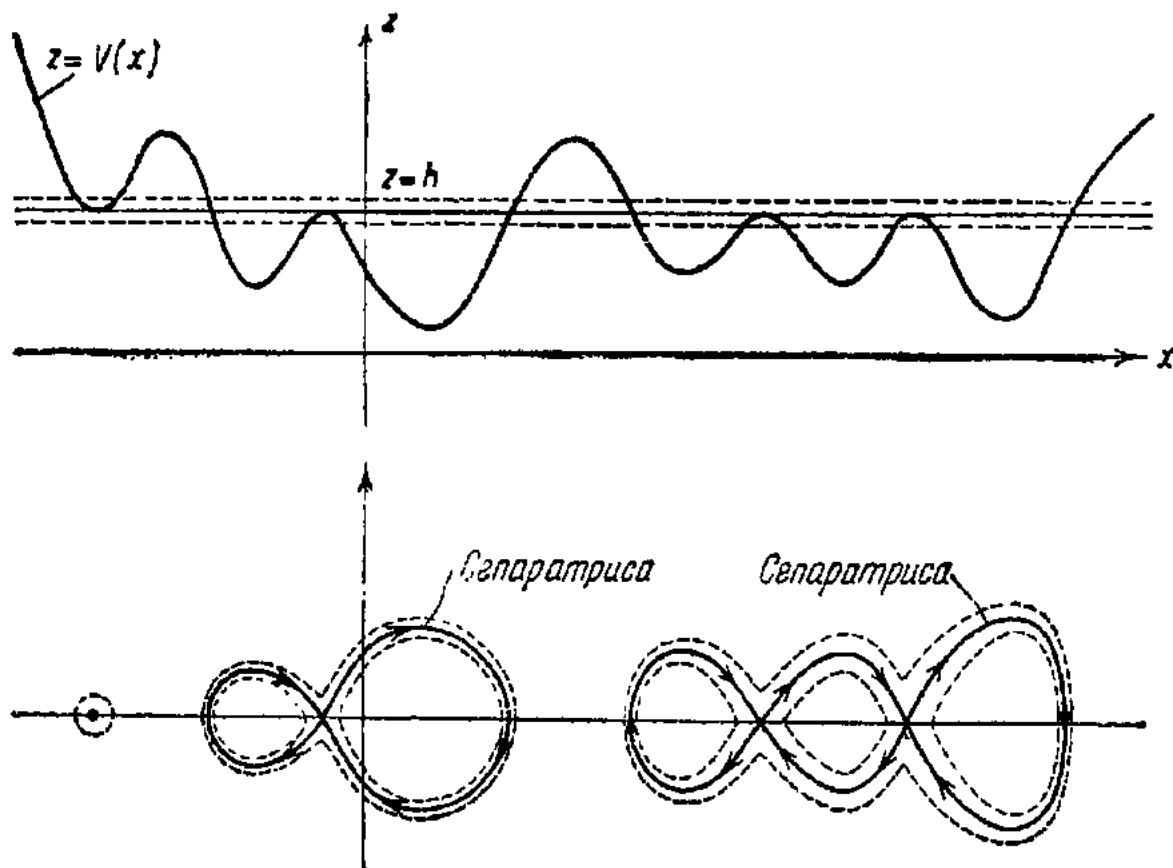


Рис. 60.

ваемых *сепаратрис*, т. е. к числу кривых, проходящих через особые точки. Эти точки самопересечения или особые точки типа седла, как мы уже знаем, соответствуют тем точкам на диаграмме z, x , где прямая $z = h$ касается максимумов кривой $z = V(x)$ (рис. 60). Те сепаратрисы, о которых сейчас идет речь, состоят из одного (в случае вырождения), а вообще говоря, из нескольких «звеньев». Каждое звено представляет собой отдельную фазовую траекторию (если оно граничное) или состоит из двух фазовых траекторий (если оно не граничное)¹. Движение по какой-нибудь из траекторий, о которых шла речь, является асимптотическим к состоянию равновесия. Такие движения называются *лимитационными* движениями. На один пример такого движения мы

¹ Особые точки являются также отдельными траекториями — они соответствуют состояниям равновесия.

уже указывали при рассмотрении маятника, находящегося в верхнем положении равновесия. Рассматриваемые сейчас движения являются лимитационными как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Сепаратрисы — это, в известном смысле, исключительные интегральные кривые, так как им соответствуют точки касания на фазовой плоскости. Знание их чрезвычайно важно для выяснения общей картины интегральных кривых на фазовой плоскости.

При изменении h характер соседних кривых будет существенно зависеть от того, будем ли мы увеличивать h или уменьшать. При уве-

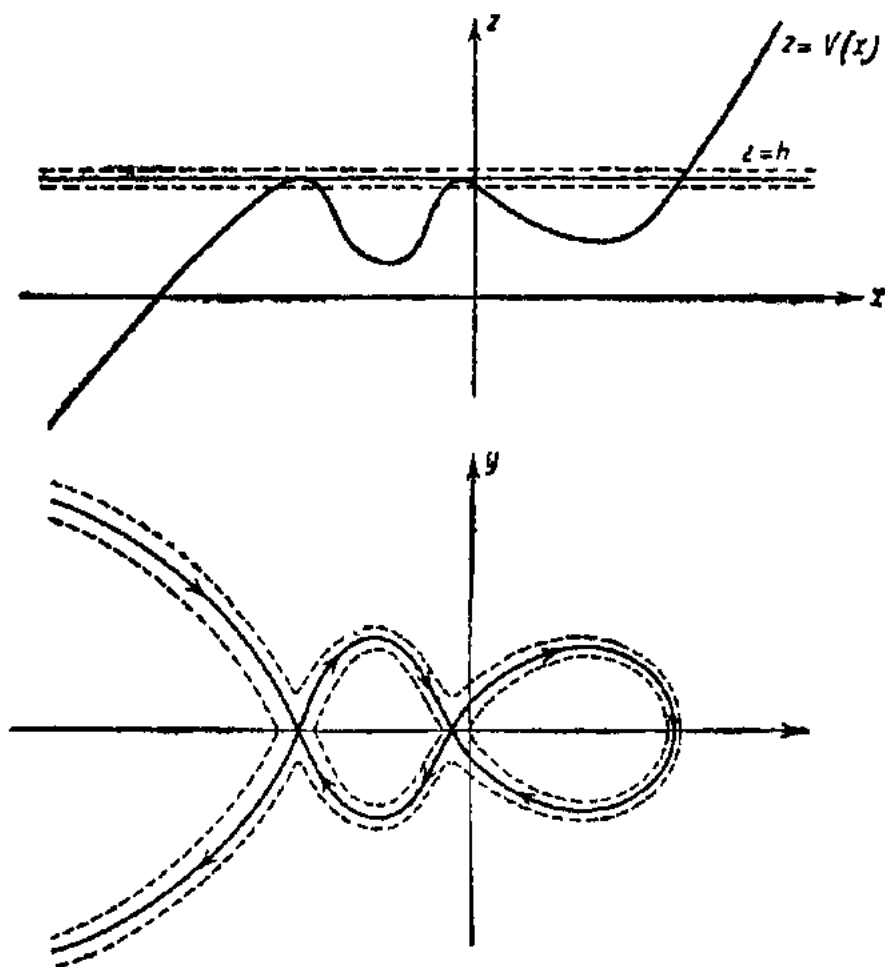


Рис. 61.

личении h мы получим интегральную кривую, охватывающую всю последующую сепаратрису, всю «цепочку» лимитационных траекторий. При уменьшении мы получим замкнутые интегральные кривые внутри каждого звена (рис. 60). Отсюда понятна роль сепаратрис как «отделяющих» кривых, которые разделяют области, заполненные траекториями разных типов.

с) *Бесконечные куски фазовых кривых.* В этом случае возможны несколько типов кривых. Во-первых, это могут быть убегающие траектории того типа, который мы уже рассматривали в п. 2. Во-вторых, это может быть сепаратриса в виде бесконечной цепочки, простирающаяся в одну или в обе стороны. Существенно новыми здесь будут траектории, которые являются убегающими при $t \rightarrow +\infty$ и которые являются лимитационными при $t \rightarrow -\infty$, или наоборот (рис. 61). Такие

траектории мы также назовем сепаратрисами, так как на них непременно имеются особые точки, которым соответствует касание прямой $z = h$ с кривой $z = V(x)$, и так как, что особенно существенно, характер соседних кривых существенно меняется, будем ли мы увеличивать или уменьшать h .

Заметим, что к числу сепаратрис могут быть отнесены иногда и движения, которые являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Именно это может быть тогда, когда для рассматриваемого случая прямая $z = h$ является асимптотой кривой $z = V(x)$, так как в этом случае мы можем получить существенное изменение характера фазовой траектории при изменении h .

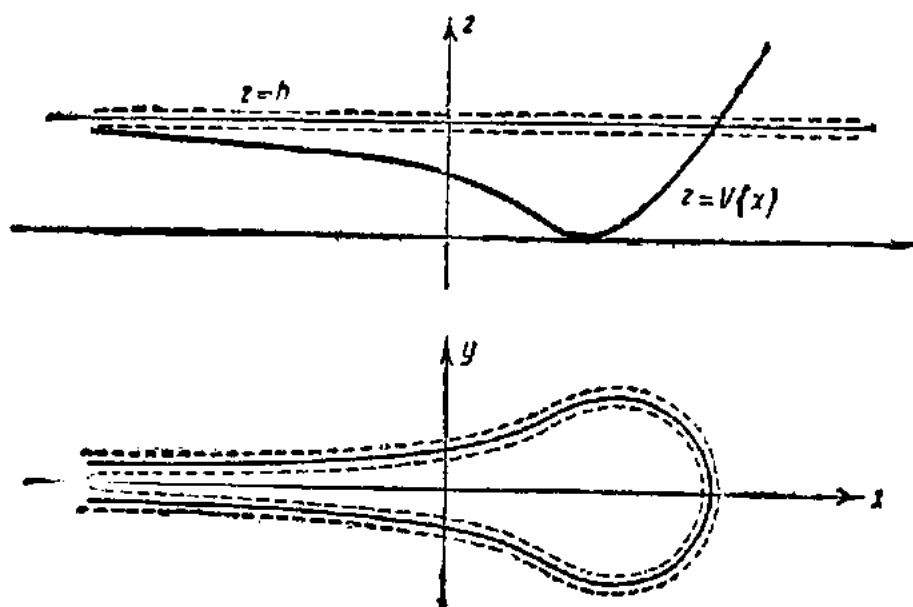


Рис. 61.

Подобный пример для наглядности представлен на рис. 62. При уменьшении h убегающая траектория превращается в периодическую. Итак, резюмируя полученные результаты, дадим перечень возможных движений:

- 1) Состояния равновесия.
- 2) Периодические или, иначе, либрационные движения.
- 3) Дважды лимитационные движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).
- 4) Дважды убегающие движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).

5) Движения лимитационно-убегающие (лимитационные при $t \rightarrow +\infty$, убегающие при $t \rightarrow -\infty$, или наоборот). Можно показать ¹⁾ (об этом мы еще будем говорить), что для консервативных систем почти все движения либо либрационные, либо дважды убегающие. Т. е. если мы будем считать все начальные значения на фазовой плоскости равновероятными, то вероятность попасть на начальные условия, соответствующие движениям типа 1), 3), 5), равна нулю — так «редко» они расположены. Однако фазовые траектории, соответствующие этим движе-

¹⁾ E. Hopf, Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme, Math. Ann., Band 103, Heft 4—5,

ниям, играют большую роль на фазовой плоскости — они являются сепаратрисами — кривыми, которыми отделяют друг от друга на фазовой плоскости траектории разных видов.

Прежде чем закончить этот параграф, нужно исследовать закон распределения особых точек по прямой $y=0$, на которой они в нашем случае только и могут быть расположены, и законы сосуществования особых точек и замкнутых фазовых траекторий. И первый и второй вопросы были решены Пуанкаре для общего случая неконсервативной системы, и мы дадим это решение в дальнейшем. Для рассматриваемого же частного случая ответ на эти вопросы получается из самых элементарных соображений. Ответим сперва на первый вопрос. Очевидно, что максимумы и минимумы кривой $z = V(x)$ чередуются между собой на плоскости баланса энергии. Отсюда следует, что особые точки типа седла и типа центра также чередуются между собой на оси абсцисс фазовой плоскости.

Чтобы ответить на второй вопрос о сосуществовании замкнутых фазовых траекторий и особых точек, нужно будет также обратиться к плоскости баланса энергии (рис. 63).

Пусть у нас имеется на фазовой плоскости замкнутая кривая ap . Тогда на плоскости баланса энергии точкам a, p соответствуют точки, в которых прямая $z=h$ пересекает кривую $z=V(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = h - V(x)$. Для нашего случая $\Phi(a) = 0$, $\Phi(p) = 0$ и $\Phi(x) > 0$ для $a < x < p$. Поэтому на основании теоремы Ролля мы можем утверждать, что существует такое значение $x = \xi$ ($a < \xi < p$), для которого $\Phi'(\xi) = 0$ или, что все равно, $V'(\xi) = 0$. Таким образом мы доказали, что внутри замкнутой фазовой траектории непременно имеется по крайней мере одна особая точка или, иначе говоря, что периодическое движение непременно совершается вокруг положения равновесия. Из геометрических соображений видно, что если эта особая точка единственная, то она соответствует минимуму потенциальной энергии и является особой точкой типа центра; если же таких особых точек несколько, то центры и седла всегда будут чередоваться, причем число центров будет всегда на единицу больше числа седел. Мы можем сформулировать такую теорему: в случае консервативной системы *внутри замкнутой фазовой кривой непременно имеется нечетное число особых точек, причем число центров на единицу больше числа седел.*

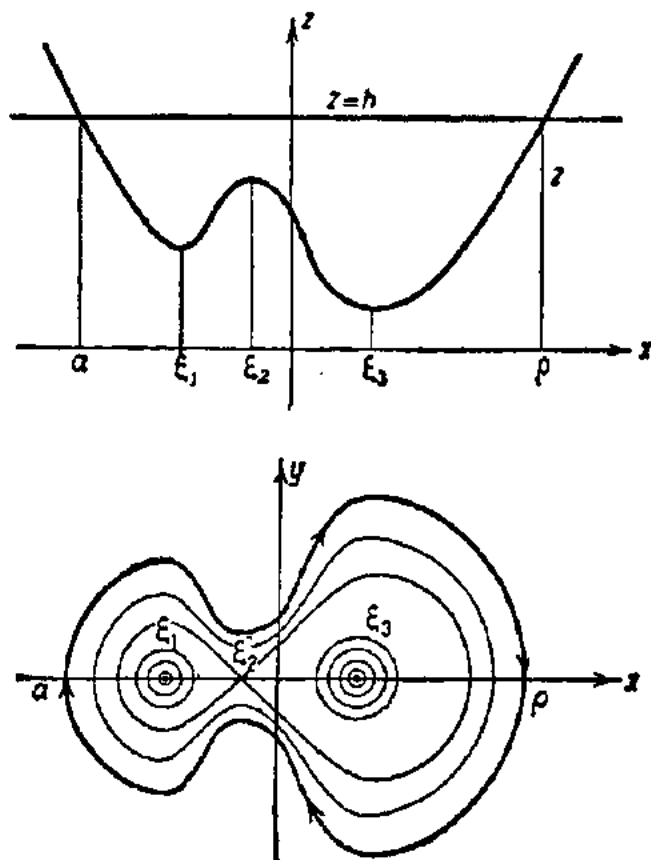


Рис. 63.

§ 5. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра

Мы уже говорили, что консервативная система представляет собой исключительную систему в том смысле, что для нее существует интеграл энергии. Иначе говоря, если мы произвольным образом, хотя бы и сколь угодно мало, будем менять вид уравнений движения, то эти уравнения, вообще говоря, перестанут удовлетворять условию консервативности. Мы, однако, сейчас будем рассматривать только такие изменения параметров, характеризующих нашу систему, при которых она остается консервативной. Для простоты мы предположим, что у нас есть только один переменный параметр и что от этого параметра зависит только потенциальная энергия системы.

Наша задача будет заключаться в исследовании того, как меняется вид фазовой плоскости при изменении параметра. Мы пока не будем затрагивать важный вопрос о том, как будет вести себя какое-нибудь *определенное* движение, имеющее определенные начальные условия, при *достаточно медленном изменении параметра* ¹⁾.

Основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых для консервативных систем, являются особые точки и сепаратрисы. Если мы знаем вид сепаратрис (особые точки типа седла суть точки самопересечения сепаратрис) и относительное расположение сепаратрис и состояний равновесия типа центра, то мы можем воспроизвести в общих чертах всю картину интегральных кривых.

При изменении параметра интегральные кривые будут меняться. Однако, если, как мы предположим, потенциальная энергия является аналитической функцией параметра, то эти изменения будут совершаться непрерывно. Общий вид интегральных кривых будет претерпевать, вообще говоря, только количественные изменения, и лишь при некоторых особых, так называемых «бифуркационных» значениях параметра мы будем иметь качественные изменения характера интегральных кривых. Как мы уже сказали, в случае консервативной системы основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых на фазовой плоскости, являются особые точки и сепаратрисы. Поэтому бифуркационными значениями параметра в этом случае служат те значения параметра, при которых происходит изменение числа или характера этих основных элементов.

Более точно и более обще можно дать такое определение, не связанное с консервативностью системы: значение параметра $\lambda = \lambda_0$ мы назовем обыкновенным, если существует такое конечное ε ($\varepsilon > 0$), что для всех λ , удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, мы имеем одну и ту же топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые. Другие значения параметров, для которых это условие не соблюдается, мы назовем *бифуркационными*.

1) Ответ на этот последний вопрос особенно труден как раз для консервативных систем. где этим вопросом занимается так называемая теория адиабатических инвариантов.

Мы изложим сравнительно подробно развитую Пуанкаре [1] теорию зависимости состояний равновесия от параметра, так как она нам понадобится при исследовании автоколебательных систем; другие бифуркационные случаи, связанные с зависимостью сепаратрис от параметра, мы лишь иллюстрируем примерами.

Предположим, что потенциальная энергия системы, а значит, вместе с тем и сила, является функцией параметра λ , который может принимать различные значения. Положения равновесия характеризуются тем, что для них сила равна нулю ¹⁾:

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (120)$$

Это уравнение следует решить относительно x , чтобы найти абсциссы положений равновесия. Каждому значению λ соответствует одно или несколько положений равновесия. Если мы будем менять λ , начиная от некоторого начального значения $\lambda = \lambda_0$, для которого у нас имелось S различных положений равновесия:

$$\bar{x} = x_1, \bar{x} = x_2, \dots, \bar{x} = x_s,$$

то координаты этих положений равновесия будут также непрерывно меняться, причем вблизи $\lambda = \lambda_0$ мы, вообще говоря, будем иметь по терминологии Пуанкаре S «линейных рядов» положений равновесия ²⁾.

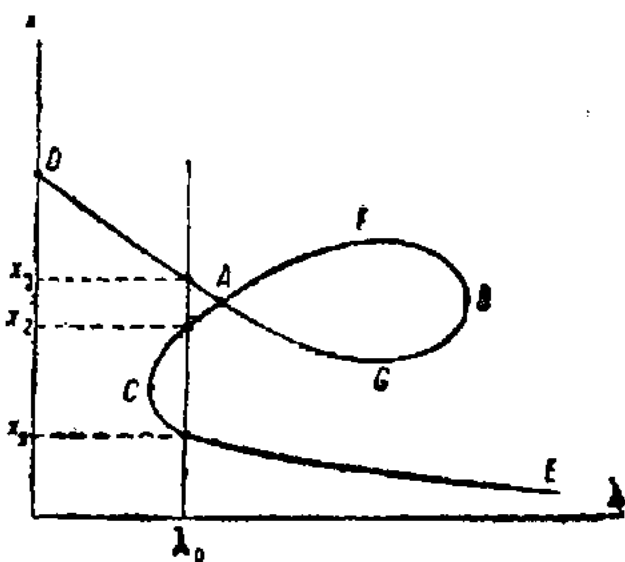


Рис. 64.

Зависимость положений равновесия от параметра может быть наглядно иллюстрирована графически на плоскости x, λ с помощью построения кривой $f(x, \lambda) = 0$ (рис. 64). Каждому из «линейных рядов» состояний равновесия соответствует одна из ветвей этой кривой. Если прямая $\lambda = \lambda_0$, параллельная оси ординат, встречается, например, три ветви кривой, то это значит, что в этом случае у нас имеются три положения равновесия. Каждому *положению* равновесия $x = \bar{x}$ соответствует на фазовой плоскости определенное *состояние* равновесия, определенная особая точка. Характер особых точек или, что все равно, устойчивость состояний равновесия определяется, как мы видели, знаком производной $f'_x(\bar{x}, \lambda) = -V''_{x,x}(\bar{x}, \lambda)$, так как устой-

1) Мы предполагаем, что $f(x, \lambda)$ — аналитическая функция x на всей прямой x и аналитическая функция λ для рассматриваемой области значений λ .

2) Теория Пуанкаре, излагаемая здесь, допускает весьма широкое обобщение: во-первых, на системы с конечным числом степеней свободы, во-вторых, на распределенные системы. В этом последнем виде теория была применена к выяснению условий устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы, частицы которой притягиваются по закону Ньютона. См., например, Appel, *Traité de mécanique rationnelle*, т. IV, 1922.

чивая особая точка типа центра соответствует минимуму потенциальной энергии, а неустойчивая особая точка типа седла — максимуму. Именно при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0 \quad (121)$$

имеем минимум потенциальной энергии, т. е. особую точку типа центра, а при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0 \quad (122)$$

имеем максимум потенциальной энергии, т. е. особую точку типа седла ¹⁾. Дифференцируя по λ уравнение (120), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (123)$$

или

$$\frac{dx}{d\lambda} = - \frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)}. \quad (124)$$

Так как каждому линейному ряду соответствует только одно положение равновесия, т. е. только одно значение x , то для каждого линейного ряда получается *единственное* значение $\frac{dx}{d\lambda}$. Таким образом определяется последовательность положений равновесия, принадлежащих к этому ряду, т. е. направление, в котором при изменении λ перемещается положение равновесия, принадлежащее к данному ряду. Из геометрических соображений вытекает, что линейные ряды состояний равновесия могут оборваться, только если соответствующие этим рядам участки кривой $f(x, \lambda) = 0$ сливаются друг с другом (так как число линейных рядов определяется числом пересечений кривой $f(x, \lambda) = 0$ с прямой $\lambda = \lambda^0$ ²⁾). Следовательно, линейные ряды состояний равновесия не могут слиться, а остаются различными до тех пор, пока $f'_x(\bar{x}, \lambda)$ не обратится в нуль. Если $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, а $f''_x(\bar{x}, \lambda) \neq 0$, то кривая $f(x, \lambda) = 0$ имеет в этой точке вертикальную касательную ³⁾. Когда λ проходит (в соответствующем направлении) через значение, соответствующее этой точке, то два действительных корня для x сливаются, а затем становятся комплексными. Это — точка бифуркации, в которой происходит слияние линейных рядов состояний равновесия и, следовательно, изменение числа особых точек (точка *B* или *C* на рис. 64).

1) Случай $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ будет рассмотрен ниже.

2) Случай, когда кривая $f(x, \lambda) = 0$ имеет точки возврата, мы исключаем из рассмотрения.

3) Мы рассматриваем случай, когда $f'_x(x, \lambda) = 0$ соответствует максимуму или минимуму, а не точке перегиба, т. е. предполагаем, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} \frac{d\lambda}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)^2 \neq 0.$$

Если $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ и $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$, то мы имеем дело с точкой бифуркации, в которой происходит пересечение линейных рядов, например точка A на рис. 64. Она является особой точкой (в смысле дифференциальной геометрии) кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$. Отсюда ясно, что значение параметра λ , для которого $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, есть бифуркационное значение параметра, так как для него число особых точек всегда иное, чем при соседних значениях этого же параметра. Нетрудно дать, следуя Пуанкаре, простой рецепт для быстрого выяснения устойчивости или неустойчивости исследуемого линейного ряда. Отметим на плоскости x, λ области, где $f(\bar{x}, \lambda) > 0$ (пусть, например, на рис. 65 этому условию соответствуют заштрихованные области). Если область, где $f(\bar{x}, \lambda) > 0$, лежит *под* некоторой частью кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ (при обычном расположении осей x и λ , именно ось x — вверх, ось λ — вправо), то эта часть кривой соответствует устойчивым состояниям равновесия, так как это значит, что вблизи этой части кривой $f(\bar{x}, \lambda)$ убывает с возрастанием x (при фиксированном λ) и что, следовательно, $f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0$, а это, как мы видели, соответствует случаю центра. Если же область, где $f(\bar{x}, \lambda) > 0$, лежит *над* некоторой частью кривой, то эта часть кривой соответствует *неустойчивым* состояниям равновесия, так как в силу аналогичных соображений для точек этой части кривой имеет место неравенство

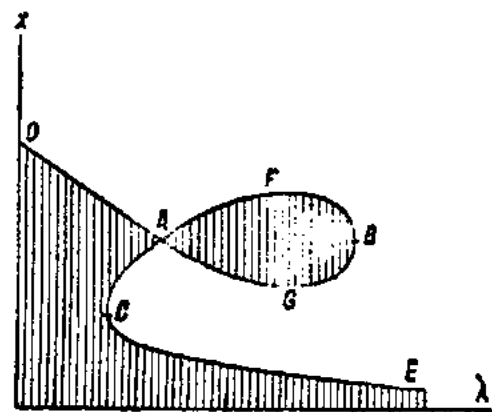


Рис. 65.

$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0$, т. е. случай седла. Следуя этому рецепту, сразу находим, что, например, на рис. 65 участки DA ; AFB ; CE (начерченные жирно) соответствуют устойчивым состояниям равновесия, участки AGB ; AC (начерченные тонко) — неустойчивым состояниям равновесия.

Обратим теперь внимание на следующее. Если мы будем двигаться вдоль какого-нибудь линейного ряда на диаграмме x, λ , то у нас характер особой точки, т. е. устойчивость или неустойчивость, будет сохраняться до тех пор, пока мы не дойдем до точки бифуркации. Нетрудно показать, что если мы будем продолжать двигаться дальше вдоль линейного ряда, следуя направлению касательной (т. е. следя за тем, чтобы касательная вращалась непрерывно), то в точке бифуркации у нас устойчивость сменится неустойчивостью или наоборот¹⁾. Это и есть так называемая «смена устойчивостей» (*échange des stabilités*), которая имеет место в бифуркационных точках между двумя пересекающимися или сливающимися линейными рядами. На рис. 65 такая смена устойчивостей происходит в точках A, B, C .

Итак, мы видим, что, при изменении параметра, состояния равновесия могут исчезать и появляться только парами, причем (и это *от-*

¹⁾ Мы рассматриваем случай, когда для точек бифуркации, соответствующих сливанию линейных рядов

$$[f''_{x,\lambda}(\bar{x}, \lambda)]^2 - f''_{xx}(\bar{x}, \lambda) f''_{\lambda\lambda}(\bar{x}, \lambda) \neq 0.$$

личительная особенность консервативных систем) состояние равновесия может изменить свою устойчивость, например из устойчивого превратиться в неустойчивое, только предварительно слившись с другим состоянием равновесия.

В смысле смены устойчивости состояния равновесия консервативных систем образуют *замкнутую* систему, поведение которой при изменении параметра можно изучать отдельно от поведения сепаратрис.

Те значения параметра, при которых состояния равновесия сливаются или уходят в бесконечность, конечно, принадлежат к бифуркационным значениям параметра, но, вообще говоря, ими не исчерпываются все бифуркационные значения, так как могут быть существенные изменения в характере сепаратрис при неизменном числе и характере состояний равновесия.

Относительно бифуркационных значений этого второго типа мы не будем высказывать никаких общих соображений, а познакомимся с ними на отдельных конкретных примерах, которые мы сейчас рассмотрим. На этих же примерах мы иллюстрируем все сказанное выше относительно бифуркационных значений, в которых происходит изменение в характере состояний равновесия.

1. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси. В качестве первого примера рассмотрим движение тяжелой точки массы m по окружности радиуса a , вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 66). Моделью для этой задачи может служить маятник, укрепленный на шарнире и вращающийся вокруг вертикальной оси.

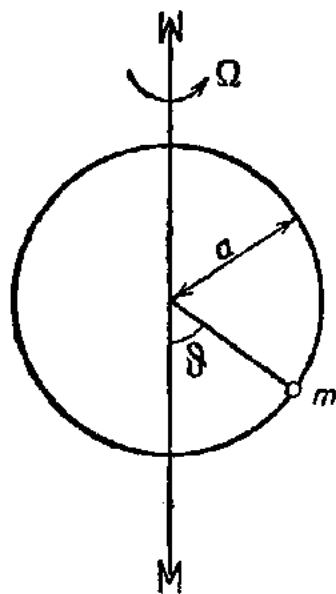


Рис. 66.

Для рассмотрения движений по координате δ удобно ввести систему координат, вращающуюся вместе с маятником вокруг вертикальной оси. Но чтобы к движениям по координате δ в этой вращающейся системе координат можно было применить второй закон Ньютона, необходимо ввести еще силы инерции, в частности центробежную силу. Момент силы тяжести относительно горизонтальной оси есть

$$mga \sin \delta.$$

Центробежная сила есть

$$m\Omega^2 a \sin \delta,$$

и ее момент относительно горизонтальной оси:

$$m\Omega^2 a^2 \sin \delta \cos \delta.$$

Так как оба момента направлены в противоположные стороны, то результирующий момент есть

$$m\Omega^2 a^2 (\cos \delta - \lambda) \sin \delta,$$

где $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$. Заметим, что $\lambda = 1$ в случае, когда $\Omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$, т. е. когда угловая скорость вращения совпадает с угловой частотой малых колебаний точки m как маятника (при $\Omega = 0$). Мы исследуем поведение системы при разных λ , т. е. при различных значениях, например, угловой скорости Ω и силы тяжести g , считая, что сила тяжести может изменять не только величину, но и знак, т. е. λ может быть меньше нуля. Если через I обозначить момент инерции системы относительно горизонтальной оси, то уравнение движения по координате ϑ могут быть написаны в виде:

$$I \frac{d\omega}{dt} = m\Omega^2 a^2 (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta, \quad (125)$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (126)$$

Уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости получается при делении первого уравнения на второе:

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{m\Omega^2 a^2 (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta}{I\omega}. \quad (127)$$

Интеграл энергии напишется так:

$$\begin{aligned} \frac{I\omega^2}{2} - m\Omega^2 a^2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{2} + \lambda \cos \vartheta \right) &= \\ = \text{const.} = C. \end{aligned} \quad (128)$$

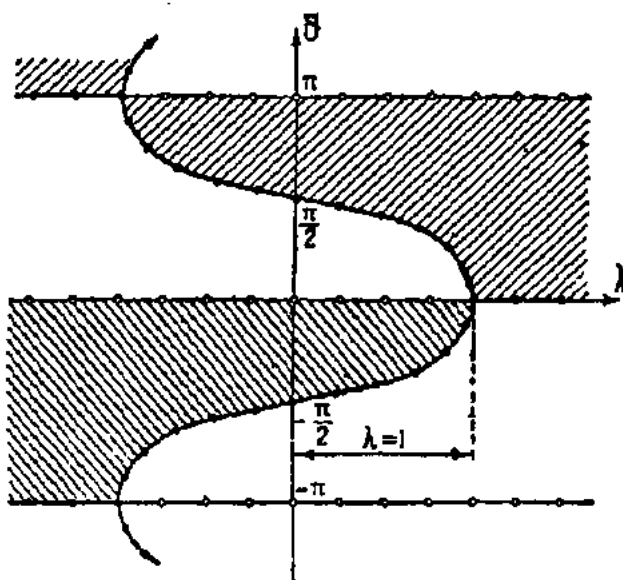


Рис. 67.

Исследуем теперь поведение интегральных кривых на фазовой плоскости.

Особые точки, соответствующие положениям равновесия, суть

$$1) \omega_1 = 0, \quad \vartheta_1 = 0; \quad 2) \omega_2 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi; \quad 3) \omega_3 = 0, \quad \cos \vartheta_3 = \lambda.$$

Последнее положение равновесия существует только тогда, когда $|\lambda| \leq 1$, т. е. когда собственная частота малых колебаний маятника (при $\Omega = 0$) меньше частоты вращения. Зависимость координаты положения равновесия ϑ_3 от параметра λ дается уравнением $f(x, \lambda) = 0$, т. е. для нашей задачи уравнением:

$$f(\vartheta, \lambda) = m\Omega^2 a^2 (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta = 0. \quad (129)$$

Это уравнение удовлетворяется на кривой $\cos \vartheta = \lambda$ и на прямых $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, $\vartheta = -\pi$ и т. д. Соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рис. 67. Очевидно, что при $0 < \vartheta < \pi$ область,

где $f(\vartheta, \lambda) < 0$, лежит со стороны больших λ , а при $0 > \vartheta > -\pi$, наоборот, — со стороны меньших λ (эти области на рис. 67 заштрихованы). Отсюда непосредственно, по признакам, указанным выше, определяется, какие состояния равновесия устойчивы (жирные линии с черными точками) и какие неустойчивы (тонкие линии с кружками). Устойчивым состояниям равновесия соответствуют особые точки типа центра, а неустойчивым — особые точки типа седла. Так как λ может иметь как положительные, так и отрицательные значения, то особые точки, для которых $\vartheta = \pm \pi$, неустойчивы (седло) при $\lambda > -1$ и устойчивы (центр) при $\lambda < -1$. Особые точки, для которых $\vartheta = 0$, неустойчивы (седло) при $\lambda < 0$ и устойчивы (центр) при $\lambda > 0$. Наконец, особые точки, для которых $\lambda = \cos \vartheta$, устойчивы всегда (центр), но они существуют только при $-1 < \lambda < 1$. Как и следовало ожидать, картина для ϑ получается совершенно симметричная, и состояния, соответствующие $+\vartheta$ и $-\vartheta$, совпадают. Сепаратрисы мы можем определить, воспользовавшись тем обстоятельством, что каждая сепаратриса проходит через особую точку, в которой константа энергии может быть определена, так как кинетическая энергия в особой точке равна нулю (система в покое), а потенциальная легко может быть вычислена. Подставляя значения константы энергии в уравнение (128), находим две сепаратрисы, образующие «восьмерку» и проходящие через седло. Уравнение одной из них, проходящей через точку $\omega = 0$, $\vartheta = \pi$ (для нее $C = mga$), имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{m\Omega^2 a^2}{I} [\sin^2 \vartheta + 2\lambda (\cos \vartheta + 1)]. \quad (A)$$

Уравнение второй, проходящей через седло $\omega = 0$, $\vartheta = 0$ (для нее $C = -mga$):

$$\omega^2 = \frac{m\Omega^2 a^2}{I} [\sin^2 \vartheta + 2\lambda (\cos \vartheta - 1)]. \quad (B)$$

Обе эти сепаратрисы для случая $1 > \lambda > 0$ изображены на рис. 68. При $\lambda = 0$ обе эти сепаратрисы сливаются, и получается картина, изображенная на рис. 69. При переходе к $\lambda < 0$, но при $|\lambda| < 1$ получается такая же картина, как и при $0 < \lambda < 1$, но сдвинутая вдоль оси ϑ на π (рис. 70). В случае $0 < \lambda < 1$ (рис. 68) внутри первой сепаратрисы мы имеем три области периодических движений, две односвязные и одну двусвязную. Так как при $\lambda = 0$ сепаратрисы сливаются, то в этот момент двусвязная область, о которой только что шла речь, исчезает. Качественная топологическая картина интегральных кривых меняется, и, следовательно, $\lambda = 0$ является бифуркационным значением параметра в отношении сепаратрис. Точно также при $|\lambda| > 1$ получается новая картина интегральных кривых (рис. 71), и, следовательно, значения $\lambda = \pm 1$ также являются бифуркационными значениями в отношении сепаратрис.

2. Движение тяжелой точки по параболе, вращающейся вокруг вертикальной оси. В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу. Положим, что тяжелая точка массы m может свободно двигаться по параболе, определяемой уравнением $x^2 = 2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z (рис. 72).

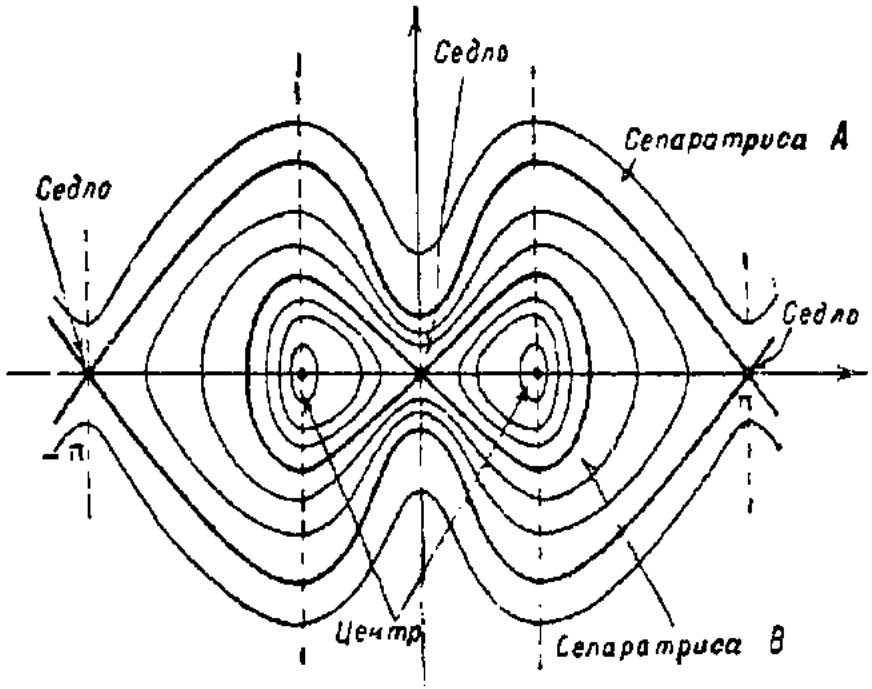


Рис. 68.

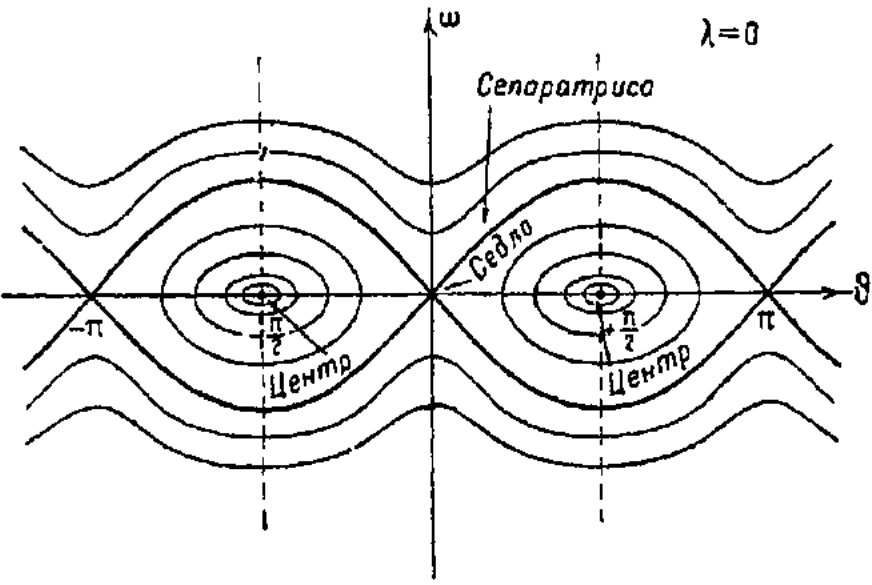


Рис. 69.

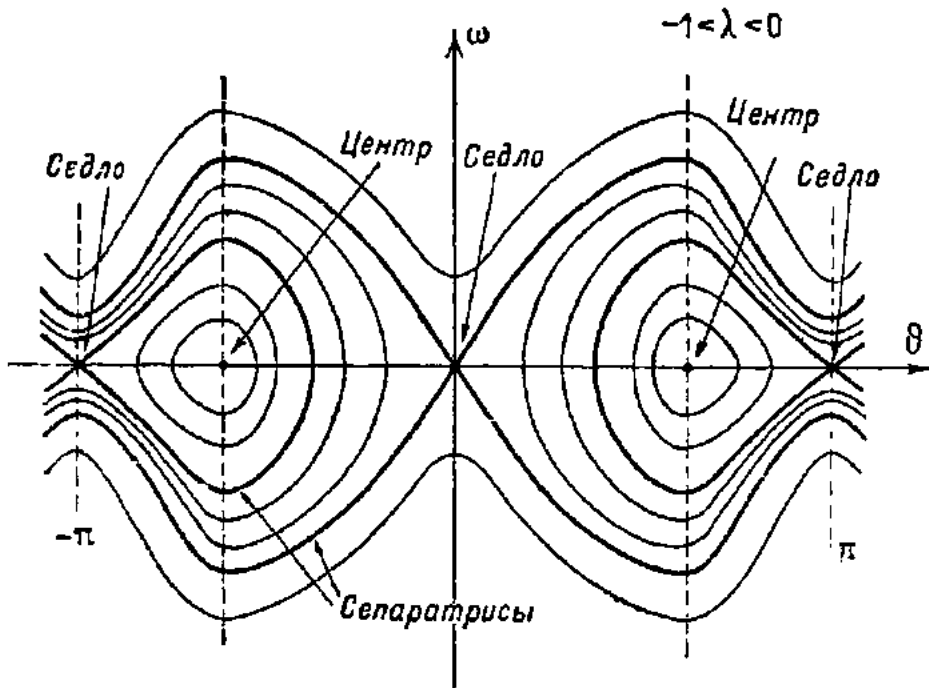


Рис. 70.

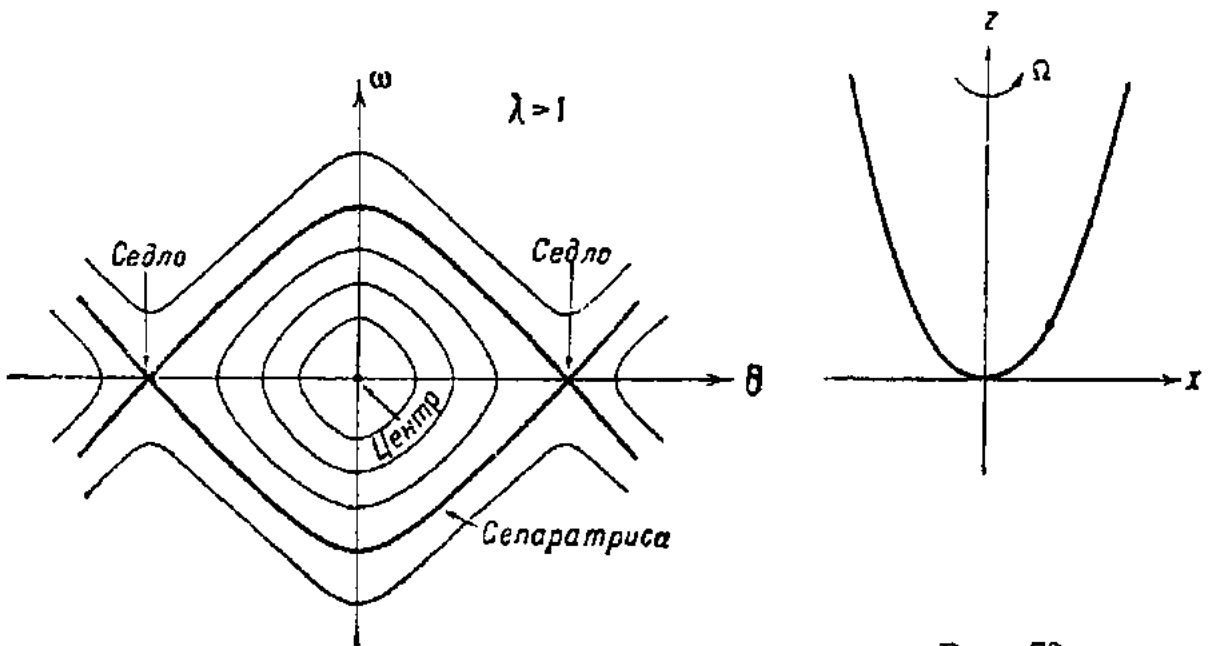


Рис. 71.

Рис. 72.

Моделью для этой задачи может служить известная демонстрационная модель — тяжелый шарик в чашке, имеющей форму параболоида вращения. Для составления уравнений движения точки мы могли бы поступать так же, как в предыдущей задаче, именно ввести силы инерции (т. е. снова центробежную силу) и написать уравнения, выражающие второй закон Ньютона для движений в плоскости xz . Мы поступим, однако, несколько иначе, чтобы на частном примере напомнить читателям уравнения Лагранжа второго рода, которые нам понадобятся в скором времени.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (130)$$

где L — лагранжева функция, которая для обычных случаев механики представляет собой разность между кинетической и потенциальной энергиями, т. е.

$$L = T - V. \quad (131)$$

Потенциальная энергия системы — это энергия точки m в поле силы тяжести, т. е.

$$V = mgz. \quad (132)$$

Кинетическая энергия составляется из энергии вращения тела вокруг вертикальной оси и энергии движения в плоскости xz . Следовательно,

$$T = \frac{m\Omega^2 x^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2). \quad (133)$$

Заменяя \dot{z} через $\frac{x\dot{x}}{p}$ (из уравнения параболы) и составляя лагранжеву функцию (131), получим:

$$L = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \lambda x^2, \quad (134)$$

где $\lambda = \frac{g}{p} - \Omega^2$, и уравнение Лагранжа напишется так:

$$m \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \ddot{x} + m \frac{\dot{x}^2}{p^2} x + m \lambda x = 0$$

или

$$\ddot{x} = - \frac{\left(\lambda + \frac{\dot{x}^2}{p^2} \right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right)}.$$

Полагая $\dot{x} = y$, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\left(\lambda + \frac{y^2}{p^2} \right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right)},$$

и, деля одно на другое:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\lambda + \frac{y^2}{p^2}\right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) y}.$$

Первый интеграл уравнения (130), так называемый интеграл энергии, имеет вид: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \text{const.}$ (В справедливости этого легко убедиться

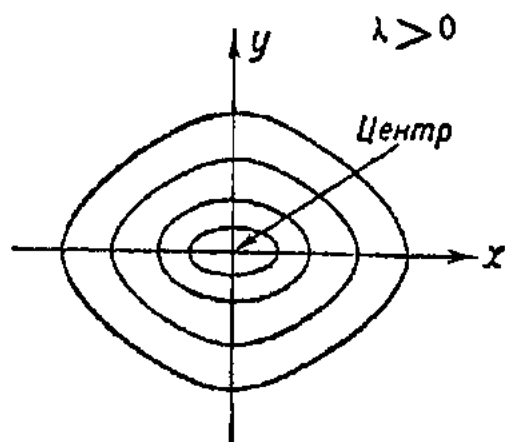


Рис. 73.

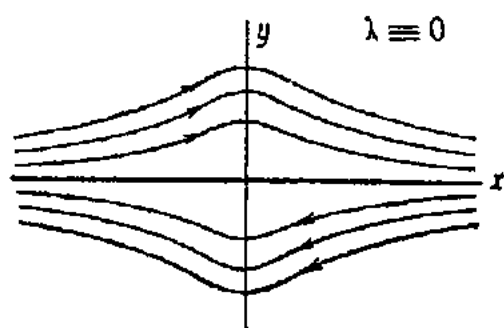


Рис. 74.

непосредственной подстановкой.) Как видно из выражений для T и V , интеграл энергии имеет следующий вид:

$$\frac{m}{2} \left[\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) y^2 + \lambda x^2 \right] = \text{const.}$$

Уравнение $f(x, \lambda) = 0$ для рассматриваемого случая напишется так:

$$m \lambda x = 0; \quad \text{следовательно,} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = m \lambda,$$

и, значит, $\lambda = 0$ есть бифуркационное значение параметра. Для разных значений λ получаются следующие типы движений и состояний равновесия:

1) $\lambda > 0$ ($\Omega^2 < \frac{g}{p}$) — одно устойчивое состояние равновесия типа центра $x = y = 0$. Вид интегральных кривых на фазовой плоскости (вложенные одна в другую замкнутые кривые) изображен на рис. 73. В этом случае точка будет совершать колебания вокруг состояния равновесия $x = 0, y = 0$.

2) $\lambda = 0$ ($\Omega^2 = \frac{g}{p}$) — бесконечное множество состояний равновесия, соответствующих прямой $y = 0$. Вид интегральных кривых на фазовой плоскости изображен на рис. 74. Точка либо будет покоиться в любом месте параболы, либо будет монотонно двигаться в ту сторону, в которую ей будет сообщена начальная скорость; при t , стремящемся к бесконечности, скорость стремится к нулю; скорость получается максимальная на вершине параболы.

3) $\lambda < 0$ ($\Omega^2 < \frac{g}{p}$) — одно неустойчивое состояние равновесия $x=0$, $y=0$ типа седла; из интеграла энергии сразу видно, что прямые $y = \pm \sqrt{-\lambda} p$ удовлетворяют уравнению движения и являются поэтому интегральными кривыми. Эти интегральные «кривые» соответствуют движению точки с постоянной скоростью по параболе. Общий вид интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 75.

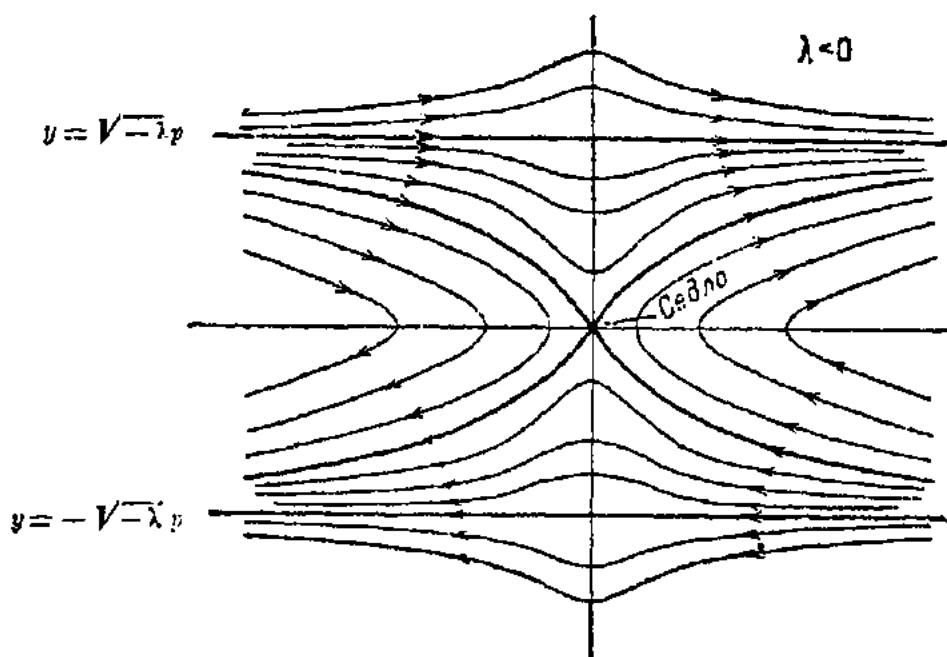


Рис. 75.

Если начальная скорость достаточно велика (больше, чем $\sqrt{-\lambda} p$), то характер движения такой же, как в случае $\lambda=0$; при меньших начальных скоростях точка либо монотонно движется в одну сторону, имея минимальное значение скорости на вершине, либо, не достигая вершины, поворачивает обратно; эти два последних типа движения разделяются двумя интегральными кривыми, проходящими через особую точку, причем по одной из них представляющая точка может двигаться к состоянию равновесия, асимптотически приближаясь к нему.

3. Прямолинейное движение точки, отталкиваемой вблизи начала координат, обратно пропорционально кубу расстояния и притягиваемой вдали от начала координат обратно пропорционально квадрату расстояния. Уравнение движения для этого примера имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a}{x^2} + \frac{\gamma}{2x^3}, \quad (135)$$

где знак $-$ соответствует $x > 0$, знак $+$ соответствует $x < 0$, а обе константы a и γ положительны. Интеграл энергии напишется так:

$$\frac{mx^2}{2} - \frac{a}{x} + \frac{\gamma}{2x^2} = C, \quad (136)$$

бифуркационное значение параметра a есть $a=0$, а параметра γ есть $\gamma=0$. Прямая $x=0$ есть интегральная кривая типа сепаратрисы;

по одну сторону от нее изображающая точка движется вверх, а по другую — вниз. Особых точек существует две: $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ и $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$, которые при положительных α и γ всегда устойчивы. На рис. 76 изображен ход

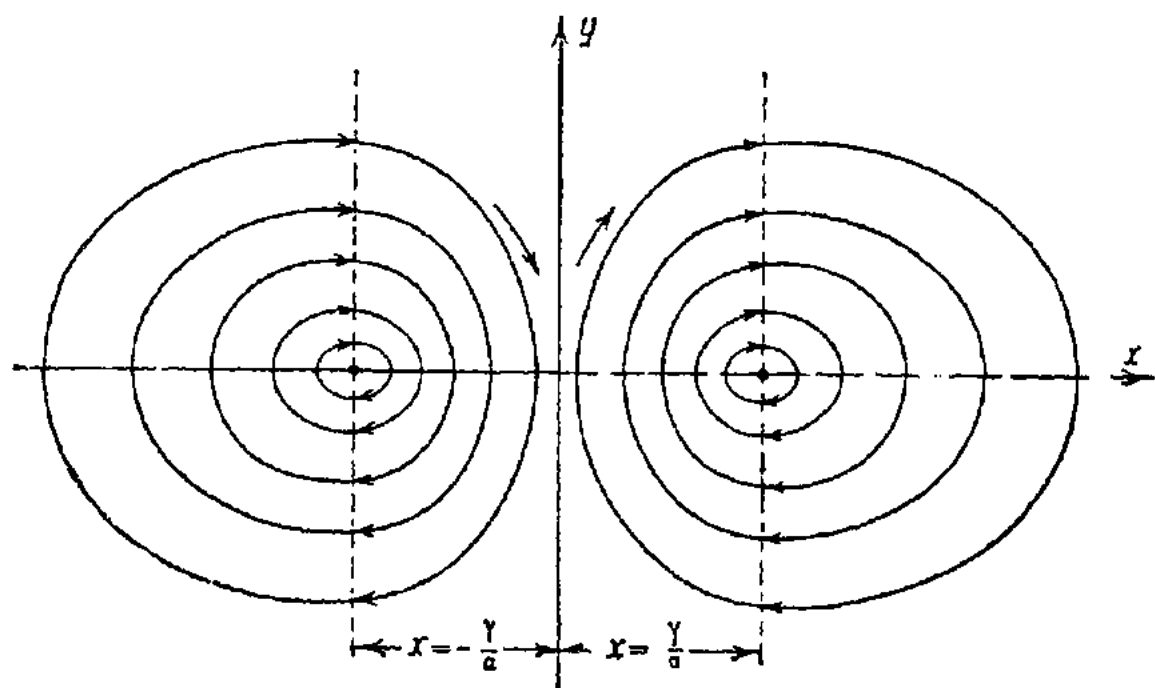


Рис. 76.

интегральных кривых для $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, на рис. 77 — для $\alpha = 0$ и на рис. 78 — для $\gamma = 0$.

Мы видим, что в случае, изображенном на рис. 76, точка может совершать колебания около одного из своих положений равновесия,

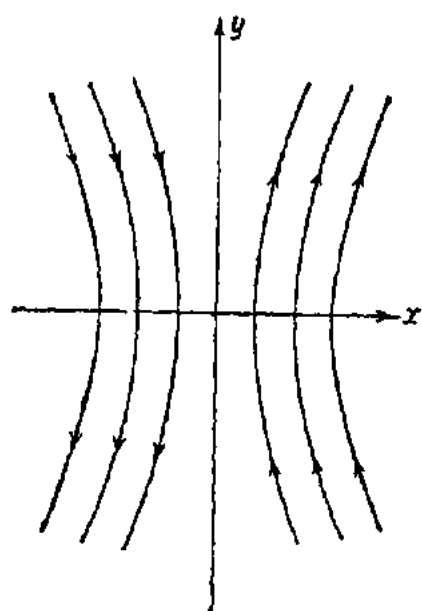


Рис. 77.

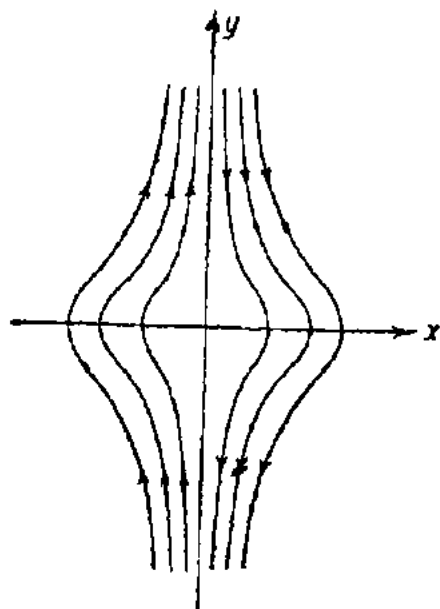


Рис. 78.

не заходя, однако, за начало координат; в случае $\alpha = 0$ точка везде отталкивается; в случае $\gamma = 0$ точка везде притягивается, что само собой очевидно. Нужно, однако, иметь в виду, что выбранный нами

закон взаимодействия не имеет смысла для самого начала координат. Поэтому все наше рассмотрение годится для всей области кроме начала координат.

4. Движение проводника, обтекаемого током. Рассмотрим, наконец, последний пример: бесконечный прямолинейный проводник, по которому течет ток силой I , притягивает провод AB длины l , по которому течет ток i . Провод AB , имеющий массу m , кроме того, притягивается к положению равновесия квази-упругой силой kx , пропорциональной расстоянию провода от положения равновесия O , находящегося на расстоянии a от провода, несущего ток I (рис. 79).

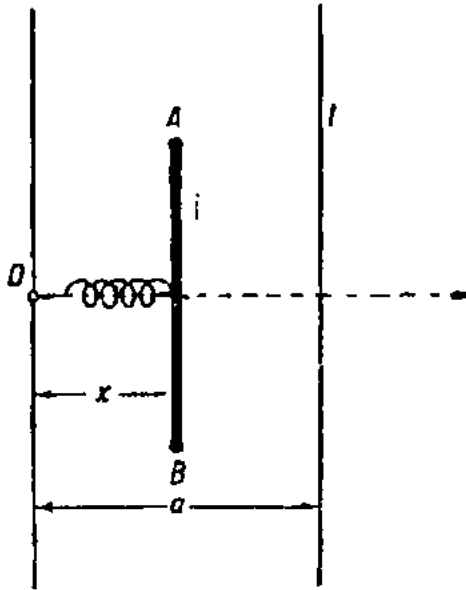


Рис. 79.

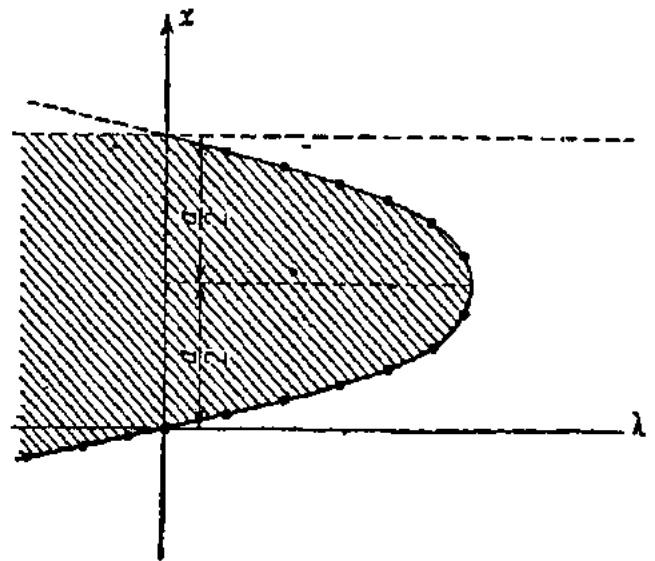


Рис. 80.

Будем предполагать, что с концов провода AB ток отводится подводящими проводниками, перпендикулярными току I , так что силу взаимодействия проводов можно принять равной:

$$f_1 = \frac{2Iil}{a},$$

где a — расстояние между ними. При этом предположении вся сила, действующая на провод AB , напишется так:

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\partial V}{\partial x} = kx - \frac{2Iil}{a-x} = k \left(x - \frac{\lambda}{a-x} \right), \quad (137)$$

где $\lambda = \frac{2Iil}{k}$. Уравнение, связывающее параметр λ и координату положения равновесия \bar{x} , имеет вид:

$$\Phi(x, \lambda) = k \left(x - \frac{\lambda}{a-x} \right) = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - ax + \lambda = 0.$$

Эта кривая $\Phi(x, \lambda) = 0$ изображена на рис. 80. $\Phi(x, \lambda)$ имеет кратный корень при $\lambda = \frac{a^2}{4}$. Это значит, что при $x = \frac{a}{2}$ и $\lambda = \frac{a^2}{4}$ обра-

щается в нуль не только сама функция $\Phi(x, \lambda)$, но и ее производная $\Phi'_x(x, \lambda)$. Следовательно, $\lambda = \frac{a^2}{4}$ есть бифуркационное значение параметра. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{\lambda}{a-x} \right) = \frac{k}{m} \left\{ \frac{x^2 - ax + \lambda}{a-x} \right\},$$

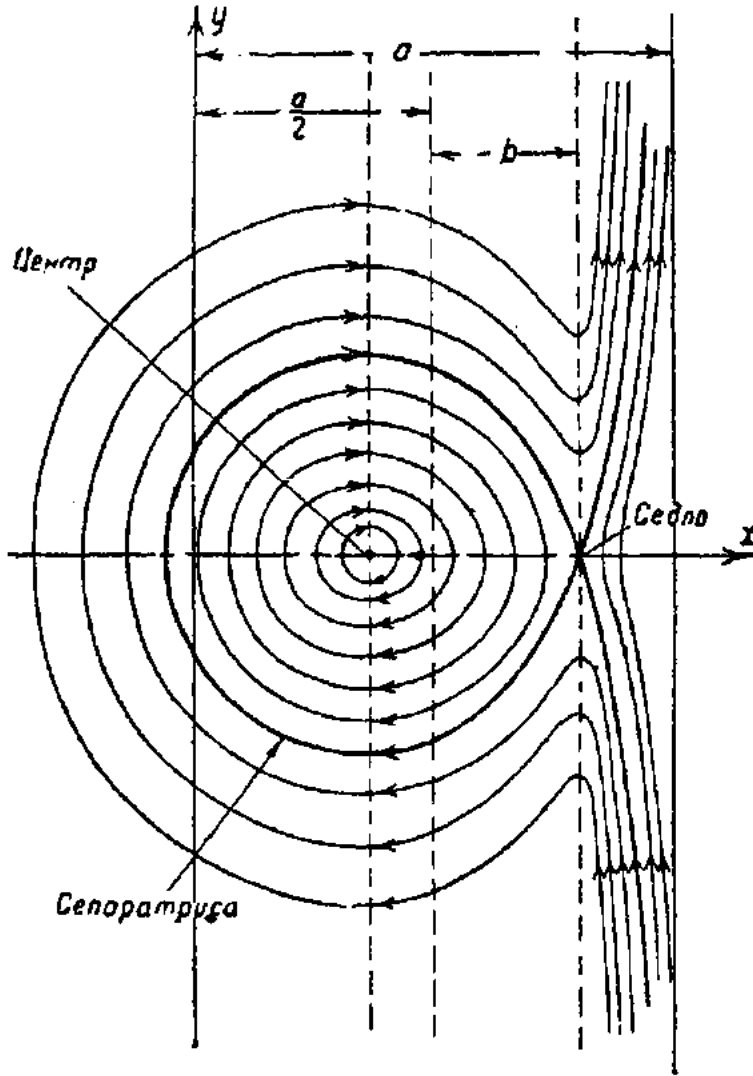


Рис. 81.

откуда получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x^2 - ax + \lambda}{(a-x)y}. \quad (138)$$

Для рассматриваемой системы помимо особых точек существует «исключительная линия» $x = a$. (Нужно иметь в виду, что, при $x > a$, f_1 следует записывать не так:

$$\frac{2k\lambda}{a-x},$$

а так:

$$\frac{2k\lambda}{x-a},$$

однако для реальной задачи случай $x > a$ не представляет интереса.) Интеграл энергии имеет вид:

$$\frac{my^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 +$$

$$+ k\lambda \ln(a-x) = C. \quad (139)$$

1) Прежде всего рассмотрим случай $\lambda < \frac{a^2}{4}$ (рис. 81). Особых точек в этом случае две, причем одна из особых точек есть центр, именно та, для которой $x = \frac{a}{2} - b$, где $b = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$; другая особая точка — седло; для нее $x = \frac{a}{2} + b$; конечно, и для той и для другой $y = 0$.

Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси $y = 0$ (и на прямой $x = a$, однако этот случай мы исключили из рассмотрения) и горизонтальны на вертикальных прямых, проходящих через обе особые точки. Особая прямая $x = a$ есть интегральная кривая и вместе с тем асимптота остальных интегральных кривых. Уравнение сепаратрисы получим, подставив в интеграл энергии $y = 0$ и $x = \frac{a}{2} + b$

(т. е. условие, что сепаратриса проходит через седло) и определяя отсюда константу энергии C ; имеем:

$$C_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{a}{2} + b \right)^2 + k\lambda \ln \left(\frac{a}{2} - b \right),$$

и, следовательно, уравнение сепаратрисы имеет вид:

$$\frac{my^2}{2} + \frac{k}{2} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 \right] + k\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b} = 0.$$

Второй корень x этого уравнения при $y=0$, т. е. координату точки пересечения сепаратрисы с осью x , можно найти при помощи графического построения, приведенного на рис. 82. Для этого строим две кривых:

1) $\xi = \left(\frac{a}{2} + b \right)^2 - x^2$ и 2) $\zeta = 2\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b}$

или $x = a - \left(\frac{a}{2} - b \right) e^{\frac{\xi}{2\lambda}}$ и находим вторую

точку пересечения A этих кривых, кроме точки $x = \frac{a}{2} + b, y = 0$. Глядя на фазовый портрет рассматриваемой системы (рис. 81), сразу можно вывести следующие заключения: отрезок провода AB будет совершать колебания, если начальные условия таковы, что представляющая точка в начальный момент находится внутри петли сепаратрисы. В частности, при начальной скорости, равной нулю, отрезок провода AB будет колебаться, если его отклонение от положения равновесия будет не слишком велико.

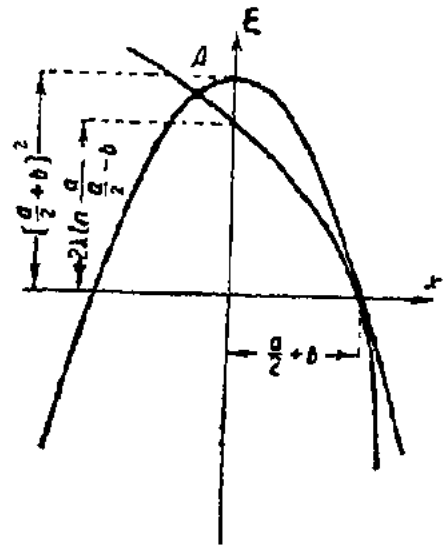


Рис. 82.

2) Рассмотрим теперь второй случай $\lambda > \frac{a^2}{4}$. В таком случае уравнение $\Phi(x, \lambda) = 0$ не имеет действительных корней, и система не имеет особых точек (состояний равновесия). Ход интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 83. При любых начальных условиях в конце концов провод AB приближается с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к прямой $x = a$, т. е. к бесконечному проводу (при $x \geq a$ задача, как мы уже указывали, не имеет смысла). Колебательные движения в этом случае, очевидно, невозможны.

3) Третий переходный (между первым и вторым) случай соответствует значению $\lambda = \frac{a^2}{4}$. Легко видеть, что в первом случае при возрастании λ обе особые точки сближаются и при $\lambda = \frac{a^2}{4}$ сливаются.

Этот процесс сближения особых точек изображен на рис. 84 и 85. Очевидно, что для $\lambda = \frac{a^2}{4}$ получается только одна особая точка (рис. 86) типа, соответствующего, как мы уже знаем, случаю, когда потенциальная энергия системы имеет точку перегиба. Таким образом этот тип особой точки можно рассматривать как результат слияния

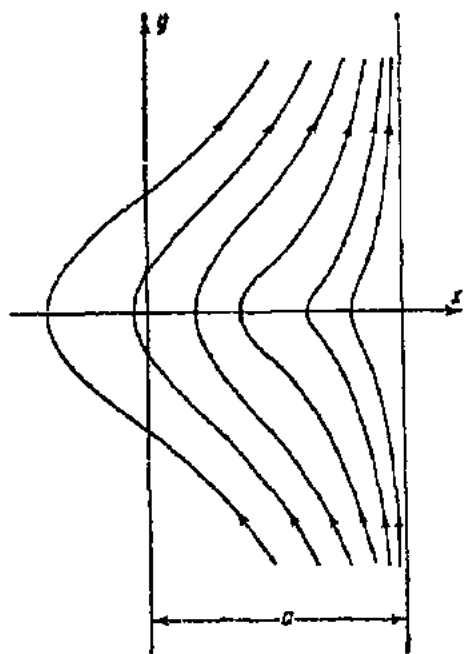


Рис. 83.

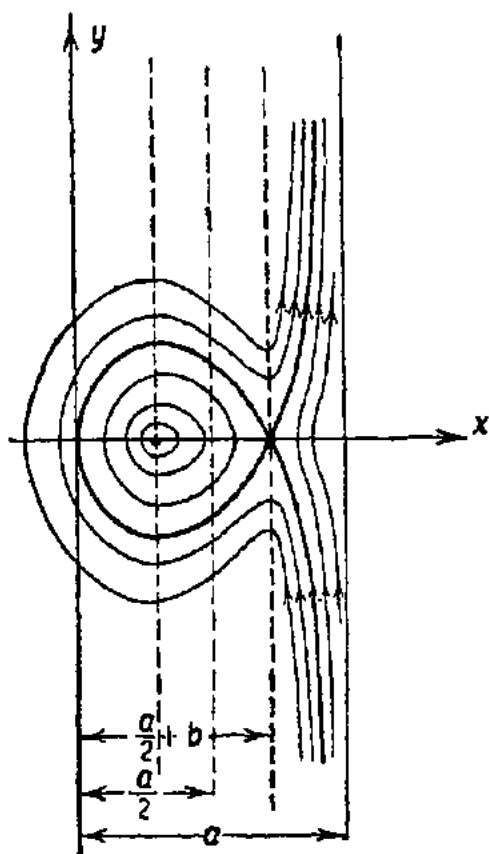


Рис. 84.

центра с седлом. Как мы уже убедились, такая особая точка соответствует неустойчивому состоянию равновесия. В этом (третьем) случае периодические движения также невозможны. При всех начальных условиях провод движется с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к бесконечному проводнику. Усы I и II, проходящие через особую точку, разграничивают два типа движений, отличающихся друг от друга тем, что при движениях первого типа (в начальный момент система находится в области, ограниченной прямой $x=a$ и усами I и II) провод AB движется к прямой $x=a$, не проходя через положение равновесия; при втором типе движений (в начальный момент система находится вне области, ограниченной усами I и II и прямой $x=a$) провод AB всегда проходит через положение равновесия.

4) Рассмотрим, наконец, последний случай $\lambda < 0$ (изменение знака может быть достигнуто переменной направления одного из токов i или I). В этом случае всегда существуют два действительных корня уравнения $\Phi(x, \lambda) = 0$. Однако из этих двух корней $x_{1,2} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$ один

всегда отрицателен, а другой больше a . Но для значений $x > a$ условия нашей задачи не имеют физического смысла. Это отражено в бифуркационной диаграмме (рис. 80) тем, что кривая $\Phi(x, \lambda)$ не продолжена в область $x > a$. В области, которой мы ограничили наше рассмотрение, существует только одна устойчивая особая точка (центр).

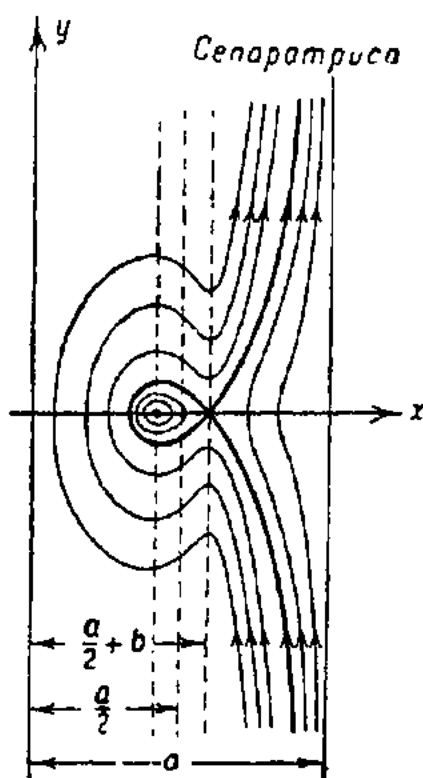


Рис. 85.

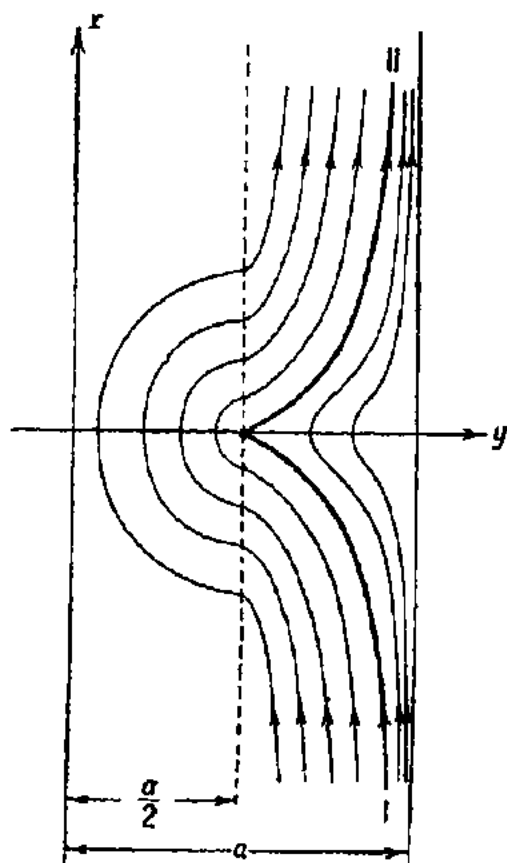


Рис. 86.

Однако, исключая из рассмотрения узкую область вблизи прямой $x=a$, мы могли бы рассматривать и вторую полуплоскость справа от прямой $x=a$, содержащую вторую неустойчивую особую точку типа седла.

Приведенные примеры в достаточной степени поясняют вопрос о зависимости характера движений в консервативной системе от параметра, и теперь мы можем перейти в дальнейшем вопросам, возникающим при рассмотрении консервативных систем.

§ 6. Уравнения движения

До сих пор мы рассматривали только простейшие консервативные системы. Теперь мы перейдем к более сложным.

Для составления уравнений движения более сложных консервативных систем удобно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначая через $L(q, \dot{q})$ некоторую функцию (пусть это будет однозначная функция координаты положения q и скорости \dot{q}), которую

назовем лагранжевой функцией, мы получим уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (140)$$

Уравнение это инвариантно по отношению к любому преобразованию координаты q : другими словами, это значит, что, полагая $q = f(\varphi)$, мы снова получим уравнения типа (140), т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (141)$$

Эта инвариантность уравнений Лагранжа представляет большое преимущество, так как она дает возможность сразу написать уравнения движения для любых выбранных координат, если известна лагранжева функция системы. Для обычных консервативных механических систем (при условии, что система отсчета инерциальна) лагранжева функция представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий; точно так же в простейших электрических системах лагранжева функция представляет собой разность магнитной и электрической энергий. Особенно удобно пользоваться уравнениями Лагранжа для составления уравнений движения электромеханических систем; об этом у нас будет идти речь впоследствии, в связи с теорией систем со многими степенями свободы. Однако следует заметить, что не всегда лагранжева функция может быть представлена как разность двух энергий; в таких случаях не всегда оказывается возможным указать наперед «физический» рецепт составления функции Лагранжа, а можно лишь чисто аналитически, путем специального подбора функции L привести уравнения движения к требуемой форме. Известно, что для уравнения Лагранжа в случае автономной консервативной системы можно написать так называемый «интеграл энергии», который выражается так:

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h. \quad (142)$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что производная по времени левой части этого равенства обращается в нуль в силу уравнения Лагранжа. Однако выражение (142) не всегда означает энергию системы в физическом смысле этого слова.

1. Уравнения Гамильтона. Вводя наряду с координатой q вторую переменную $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ — так называемый импульс — и составив функцию

$$H = p\dot{q} - L = H(q, p), \quad (143)$$

так называемую функцию Гамильтона, мы можем уравнение движе-

ния (140) привести к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (144)$$

которые носят название уравнений Гамильтона. Гамильтонова форма уравнений движения представляет существенные преимущества при рассмотрении ряда вопросов математики, астрономии и физики. Ряд методов интегрирования уравнений движения существенно связан с этой формой.

Уравнения Гамильтона инвариантны не только по отношению к точечным преобразованиям, о которых уже была речь, но и по отношению к так называемым *каноническим* преобразованиям, которые играют важную роль при изучении консервативных систем со многими степенями свободы.

Заметим, что «интеграл энергии» для уравнений Гамильтона может быть написан сразу:

$$H(p, q) = h = \text{const.} \quad (145)$$

2. Интегральный инвариант. Введем теперь понятие об *интегральном инварианте*. Рассмотрим сперва соответствующую задачу в общем виде, не связывая ее с консервативностью, чтобы затем использовать полученные результаты для уравнений Гамильтона и Лагранжа.

Пусть наша динамическая система определяется уравнениями общего вида:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (146)$$

Траектории на фазовой плоскости можно рассматривать как линии тока при стационарном течении некоторой двумерной жидкости (когда скорость и плотность в каждой данной точке не зависят от времени). Пусть $\rho(x, y)$ будет «плотность» этой «жидкости». Рассмотрим в момент $t = t_0$ на нашей фазовой плоскости некоторую площадь («двумерный объем») $G(t_0)$. Тогда «масса жидкости», находящаяся на этой площади, выразится интегралом:

$$I(t_0) = \iint_{G(t_0)} \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (147)$$

Наша «жидкость» течет по фазовой плоскости, следуя линиям, определяемым уравнениями движения (146). В момент t фазовые точки, занимавшие в момент t_0 площадь $G(t_0)$, передвинутся по фазовым траекториям и займут новую площадь $G(t)$. «Масса» рассматриваемого двумерного объема в момент t выразится интегралом:

$$I(t) = \iint_{G(t)} \rho(x, y) dx dy. \quad (148)$$

Мы будем говорить, что уравнения движения допускают двумерный положительный интегральный инвариант, если плотность $\rho(x, y)$ этой

жидкости можно подобрать так¹⁾, чтобы масса жидкости оставалась во время движения постоянной, какой бы начальный двумерный объем мы ни выбрали.

Таким образом $I(t)$ является интегральным инвариантом, если $I(t) = I(t_0)$ или, если, что то же самое,

$$\frac{d}{dt} \int_{G(t)} \rho(x, y) dx dy = 0. \quad (149)$$

Найдем необходимые условия существования интегрального инварианта.

При дифференцировании интеграла (148) основное затруднение состоит в том, что площадь, по которой совершается интеграция, меняется с течением времени. Чтобы обойти эту трудность, перейдем под интегралом от переменных x, y к переменным x_0, y_0 с помощью якобиана

$$D\left(\begin{matrix} x, y \\ x_0, y_0 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix}, \quad (150)$$

так как $x = x(t - t_0, x_0, y_0)$ и $y = y(t - t_0, x_0, y_0)$. После перехода к новым переменным получим:

$$I(t) = \int_{G(t)} \rho(x, y) dx dy = \int_{G(t_0)} \rho(x, y) D\left(\begin{matrix} x, y \\ x_0, y_0 \end{matrix}\right) dx_0 dy_0. \quad (151)$$

Так как теперь область, на которую распространяется интеграция, не зависит от времени, то дифференцирование можно произвести под знаком интеграла. Поэтому так как $\frac{dI}{dt} = 0$, то необходимым условием существования интегрального инварианта является условие:

$$\frac{d}{dt} \{\rho D\} = 0;$$

так как²⁾

$$\frac{dD}{dt} = D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{y}) \right\},$$

1) $0 \leq \rho(x, y) < M$, где M — постоянное число; $\rho(x, y)$ не должно равняться сплошь нулю ни в какой конечной области.

2)

$$\frac{dD}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить простое выражение, приведенное в тексте, следует заменить в этой сумме детермиантов $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0}$ через $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0}$ и т. д.

В этом случае мы рассматриваем \dot{x} и \dot{y} как функции x и y , согласно уравнениям движения, а \dot{x} и \dot{y} — как функции $t - t_0, x_0, y_0$.

то

$$\frac{d}{dt} \{\rho D\} = D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \dot{y}) \right\} = D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho Q) \right\}.$$

$D \neq 0$, поэтому условие (149) сводится к условию:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho Q) = 0. \quad (152)$$

Нетрудно показать, что уравнения Гамильтона всегда допускают интегральный инвариант с постоянной фазовой плотностью (которую, не нарушая общности, можно положить равной единице). Действительно, в случае уравнений Гамильтона, полагая $x = q$, $y = p$ и $\rho = 1$, условие (152) можно свести к условию:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \right\} + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ - \frac{\partial H}{\partial q} \right\} = 0, \quad (153)$$

которое выполняется тождественно в силу перестановочности дифференцирования.

Таким образом фазовая площадь («двумерный фазовый объем») является интегральным инвариантом для уравнений Гамильтона. Это утверждение, впервые доказанное Лиувиллем, носит название *теоремы Лиувилля*. Если мы будем пользоваться фазовой плоскостью не с переменными q и p , а с переменными q и \dot{q} , т. е. если мы будем исходить не из уравнений Гамильтона, а из уравнений Лагранжа, то теорема Лиувилля уже не будет иметь места. Однако, вообще говоря, у нас будет существовать интегральный инвариант. Действительно,

$$\iint_{\sigma} dp dq = \iint_{\sigma^*} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial q} & \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial q}{\partial q} & \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} \end{vmatrix} dq d\dot{q} = \iint_{\sigma^*} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} dq d\dot{q}.$$

Таким образом в переменных q , \dot{q} фазовая плотность уже не постоянна, а равна $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Поэтому, для того чтобы уравнения Лагранжа допускали интегральный инвариант, достаточно, чтобы $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$ было конечно и постоянно по знаку, например положительно. В реальных случаях это условие обычно выполняется.

Для уяснения несколько абстрактной теоремы Лиувилля рассмотрим примеры, в которых инвариантность фазовой площади нетрудно непосредственно установить.

Пример I. Гармоническое движение:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= p, & q &= a \sin(t + \varphi), \\ \frac{dp}{dt} &= -q, & p &= a \cos(t + \varphi). \end{aligned}$$

Нетрудно сообразить, что с течением времени каждый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = i a \sin(t + \varphi) + j a \cos(t + \varphi),$$

характеризующий состояние системы, повернется на один и тот же угол. Любая фигура просто повернется, не изменяя своей формы и, следовательно, площади (рис. 87).

Пример II. Движение под действием постоянной силы:

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad q = q_0 + p_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

$$\frac{dp}{dt} = -g, \quad p = p_0 - g t.$$

Если мы в момент $t=0$ выделим на фазовой плоскости квадрат между точками: 1) q_0, p_0 ; 2) $(q_0 + a), p_0$; 3) $q_0, (p_0 + a)$; 4) $(q_0 + a), (p_0 + a)$, то с течением времени квадрат будет все больше и больше перека-

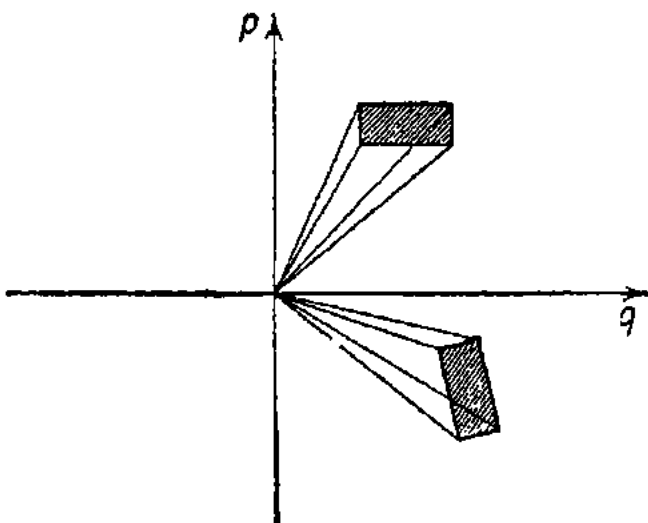


Рис. 87.

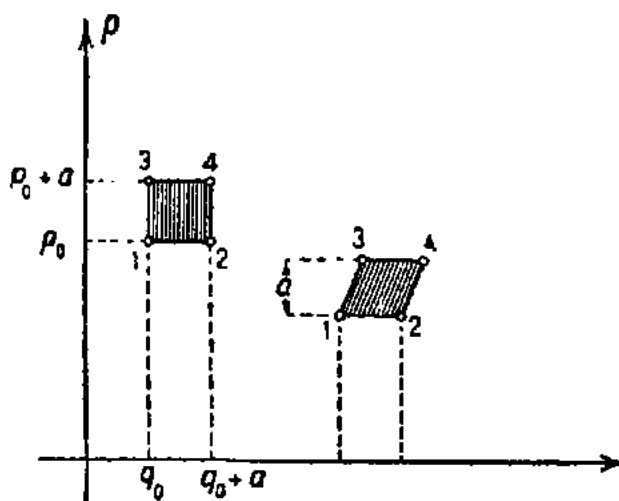


Рис. 88.

шиваться (рис. 88), но площадь фигуры будет оставаться постоянной, так как стороны, параллельные оси q , т. е. соединяющие точки с равной начальной скоростью p_0 , будут перемещаться параллельно самим себе, и вместе с тем расстояние между ними и их длина будут оставаться неизменными и равными a . Вместо квадрата со стороной a мы получим параллелограм с основанием a и высотой a , т. е. равно-великий квадрат.

Для того чтобы пояснить применение уравнений Лагранжа, рассмотрим несколько примеров.

3. Колебательный контур с железом. В качестве первого примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим электрический колебательный контур, в который входит катушка самоиндукции, содержащая железный сердечник [38] (рис. 89). Для того чтобы можно было рассматривать систему как консервативную, мы должны пренебречь сопротивлением контура и потерями на гистерезис. Если пренебречь рассеянием в катушке, т. е. считать, что весь магнитный

поток Φ проходит сквозь все w витков катушки самоиндукции, то на основании закона Кирхгофа мы получим для силы тока i в контуре следующее уравнение:

$$\frac{1}{C} \int i dt + w \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (154)$$

причем Φ есть некоторая функция от i , нелинейная вследствие наличия железного сердечника в катушке. Примерный вид функции $\Phi(i)$ для железного сердечника приведен на рис. 90. Аналитически функция $\Phi(i)$ может быть удовлетворительно аппроксимирована, как предложил Дрейфус, выражением:

$$\Phi(i) = A \operatorname{arctg} \frac{wi}{S} + B \frac{wi}{S}, \quad (155)$$

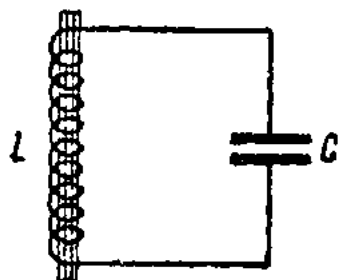


Рис. 89.

где A , B и S — положительные константы. Это выражение соответствует, очевидно, случаю отсутствия «постоянного подмагничивания» (так как при $i=0$, $\Phi=0$) симметричной кривой $\Phi(i)$. Для простоты мы рассмотрим именно этот случай. Уравнение (154) легко может быть приведено в форме Лагранжа. Для этого заменим i через q , где q — заряд на обкладках конденсатора, и введем обозначение

$$L = w \int \Phi(\dot{q}) d\dot{q} - \frac{q^2}{2C}.$$

В таком случае:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w\Phi(\dot{q}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

и уравнение (154) принимает форму Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

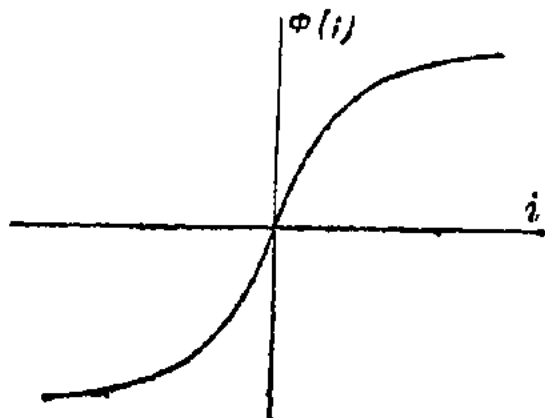


Рис. 90.

Как мы уже указывали, для уравнения Лагранжа можно написать «интеграл энергии»:

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h.$$

В рассматриваемом случае этот интеграл энергии имеет вид:

$$h = w\Phi(\dot{q}) \dot{q} - w \int \Phi(\dot{q}) d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (156)$$

Здесь h действительно выражает полную энергию системы. В самом деле, электростатическая энергия в конденсаторе есть $V = \frac{q^2}{2C}$; магнит-

ная же энергия в катушке самоиндукции определится как работа против ЭДС самоиндукции, т. е. выразится так:

$$T = w \int \frac{d\Phi(i)}{dt} \dot{q} dt = w \int \dot{q} d\Phi(\dot{q}) \quad (157)$$

или в результате интегрирования по частям:

$$T = w\Phi(\dot{q}) \dot{q} - w \int \Phi(\dot{q}) d\dot{q}. \quad (158)$$

Следовательно, $H = T + V$. Но зато в этом случае $L \neq T - V$, и мы имеем пример того, что лагранжева функция не всегда равняется разности между кинетической и потенциальной энергиями.

Введя новую переменную $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w\Phi(\dot{q})$, можем привести наше уравнение к типу Гамильтона. Функция Гамильтона напишется так:

$$H(p, q) = \int \Psi(p) dp + \frac{q^2}{2C}, \quad (159)$$

где $\Psi(p)$ есть функция, получающаяся разрешением относительно \dot{q} выражения $p = w\Phi(\dot{q})$. Характер функции $\Phi(\dot{q})$, как видно из кривой рис. 90, таков, что преобразования $p = \Phi(\dot{q})$ взаимно непрерывны и взаимно однозначны. Уравнения Гамильтона напишутся так:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{C}; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \Psi(p). \quad (160)$$

Интегральный инвариант есть

$$\iint dp dq = \iint \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} d\dot{q} dq = \iint \frac{\partial \Phi(\dot{q})}{\partial \dot{q}} d\dot{q} dq,$$

и, следовательно, роль фазовой плотности играет величина $\frac{\partial \Phi(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$, которая для рассматриваемого нами вида функции $\Phi(\dot{q})$ есть величина существенно положительная.

Характер поведения интегральных кривых на фазовой плоскости определится из интеграла энергии, который на основании (156), (157) и (158) может быть записан в виде:

$$w \int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (161)$$

Это выражение аналогично тем, которые мы получали при рассмотрении примеров консервативных систем в § 5, с той лишь разницей, что q и \dot{q} как бы поменялись местами. Мы можем поэтому относи-

тельно характера интегральных кривых высказать те же утверждения, какие были высказаны для простейших консервативных систем. Подинтегральное выражение всегда больше нуля, и потому $\int \frac{\partial \Phi(q)}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q}$ есть

положительная функция, производная которой обращается в нуль только в точке $\dot{q}=0$. Следовательно, $q=0$ соответствует минимуму энергии, и особая точка $q=0, \dot{q}=0$ есть центр; она соответствует устойчивому положению равновесия. Все интегральные кривые суть замкнутые кривые, вложенные одна в другую и охватывающие особую точку.

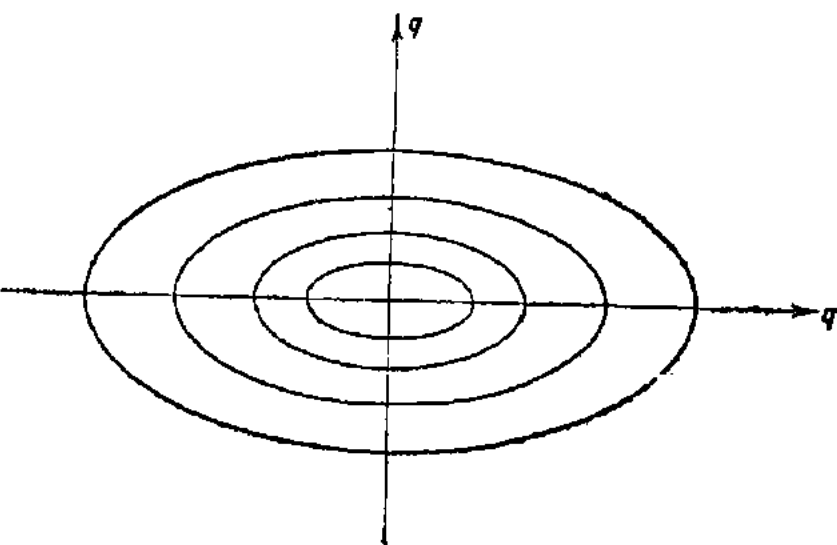


Рис. 91.

Более точно мы сможем определить характер интегральных кривых, задавшись определенным аналитическим выражением функции $\Phi(q)$. Взяв выражение (155), мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = \frac{Aw}{S} \frac{1}{1 + \frac{w^2 \dot{q}^2}{S^2}} + B \frac{w}{S}$$

и далее:

$$w \int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q} = \frac{Aw^2}{S} \int \frac{\dot{q} d\dot{q}}{1 + \frac{w^2 \dot{q}^2}{S^2}} + B \frac{w^2}{S} \int \dot{q} d\dot{q}.$$

Первый интеграл вычисляется при помощи подстановки $\dot{q}^2 = z$. Следовательно мы получим:

$$\frac{AS}{2} \ln \left(\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{S^2}{2w^2} \right) + \frac{Bw^2}{2S} \dot{q}^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (162)$$

Это уравнение определяет семейство кривых типа эллипса. На рис. 91 изображено семейство этих кривых, построенное для некоторого частного значения параметров.

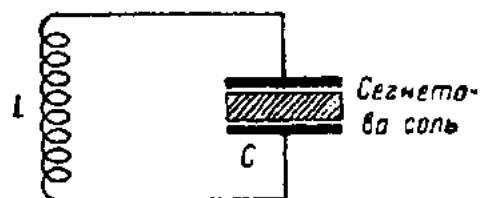


Рис. 92.

4. Колебательный контур с сегнетовой солью в конденсаторе. В качестве второго примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим колебательный контур с конденсатором, в котором диэлектриком является сегнетова соль (рис. 92). Как показали исследо-

вания Курчатова и Кобеко¹⁾, сегнетова соль обладает электрическими свойствами, аналогичными магнитным свойствам железа. В конденсаторе с сегнетовой солью нет пропорциональности между зарядом на обкладках конденсатора и разностью потенциалов; это нарушение пропорциональности обусловлено особенностями поляризации сегнетовой соли. Чтобы учесть эти особенности, приходится ввести вместо диэлектрической постоянной диэлектрический коэффициент, зависящий от напряжения поля (рис. 93), а для конденсатора с сегнетодиэлектриком — емкость, зависящую от заряда или от напряжения. Мы назовем емкостью $C(q)$ такого конденсатора отношение заряда на обкладках конденсатора к разности потенциалов, вызванной этим зарядом²⁾.

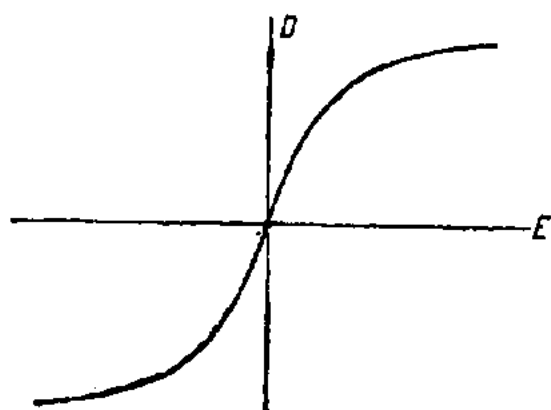


Рис. 93.

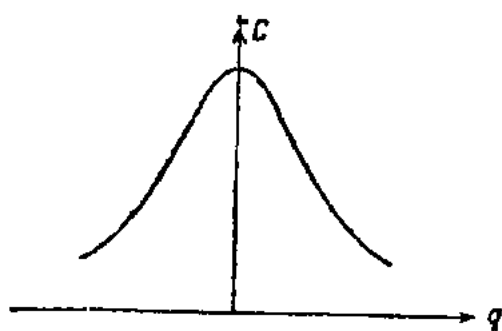


Рис. 94.

Зависимость таким образом определенной емкости конденсатора $C(q)$ от величины заряда на его обкладках примерно изображена на рис. 94.

Пренебрегая омическим сопротивлением и потерями на гистерезис, мы получим, вследствие того, что C есть функция q , нелинейную консервативную систему. Для рассматриваемого контура мы можем по закону Кирхгофа написать:

$$L_0 \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C(q)} = 0. \quad (163)$$

¹⁾ См., например, И. В. Курчатова, Сегнетоэлектрики. Серия «Проблемы новейшей физики», ГТТИ, 1933.

²⁾ Заметим, что емкость можно было бы определить и иначе, например как $C_1(q) = \frac{dq}{dV}$, где V — разность потенциалов. В этом случае дифференциальное уравнение контура, содержащего конденсатор с сегнетодиэлектриком, приняло бы другой вид:

$$L\ddot{q} + \int \frac{dq}{C_1(q)} = 0. \quad (163a)$$

Безразлично, каким из уравнений (163) или (163a) пользоваться, так как оба они дают одну и ту же зависимость \dot{q} от q . Повидному, для неавтономной системы второе определение $C_1 = \frac{dq}{dV}$ является более целесообразным.

Это уравнение также легко может быть приведено к виду Лагранжа. Введем обозначение

$$L = \frac{L_0 \dot{q}^2}{2} - \int \frac{q dq}{C(q)}.$$

В таком случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

и уравнение (163) может быть записано в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Интеграл энергии напишется так:

$$\frac{L_0 \dot{q}^2}{2} + \int \frac{q}{C(q)} dq = h = \text{const.} \quad (164)$$

Легко видеть, что и в этом случае h есть полная энергия системы, так как энергия заряда конденсатора равна работе тока, заряжающего конденсатор:

$$V = \int \frac{q}{C(q)} \dot{q} dt = \int \frac{q dq}{C(q)}. \quad (165)$$

Но, кроме того, в этом случае, в отличие от предыдущего, лагранжева функция $L = T - V$, т. е. равняется разности между магнитной и электростатической энергиями системы. Уравнение (163) подстановкой

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}$ легко может быть приведено к форме Гамильтона подобно

тому, как это было сделано в предыдущем примере.

Уравнение (164) есть уравнение семейства интегральных кривых на фазовой плоскости q, \dot{q} . Так как функция $\int \frac{q}{C(q)} dq$ имеет минимум при $q=0$, то $q=0; \dot{q}=0$ есть особая точка типа центра, соответствующая устойчивому положению равновесия.

Для того чтобы точнее определить вид интегральных кривых, мы должны так или иначе прецизировать вид функции $C(q)$. В общем случае, если помимо переменного напряжения на обкладках конденсатора существует некоторое постоянное напряжение (по аналогии с подмагничиванием мы будем это постоянное напряжение называть «подэлектризацией»), то емкость конденсатора будет уже изменяться

неодинаково в обе стороны от точки $q=0$. Учитывая это обстоятельство, мы можем зависимость между C и q в некоторой ограниченной области значений q аппроксимировать при помощи следующего выражения:

$$C(q) = \frac{C_0}{1 + C'_1 q + C'_2 q^2}$$

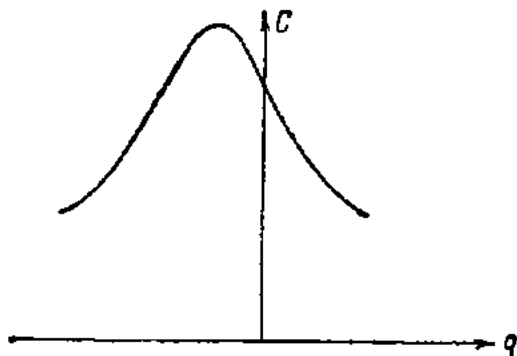


Рис. 95.

(график этой функции $C(q)$ приведен на рис. 95). Подставляя выражение для $C(q)$ в выражение (154), получим:

$$\frac{L_0 q^2}{2} + \frac{q^2}{2C_0} + \frac{C_1 q^3}{2C_0} + \frac{C_2 q^4}{2C_0} = \text{const.} \quad (166)$$

Это уравнение определяет семейство замкнутых кривых, вложенных одна в другую (рис. 96). Несимметричность этих кривых относительно оси q обусловлена

наличием члена $\frac{C_1 q^3}{2C_0}$ в уравнении семейства. Но этот член появился в результате подэлектризации. При отсутствии подэлектризации $C(q) = C(-q)$, и несимметричность интегральных кривых исчезает.

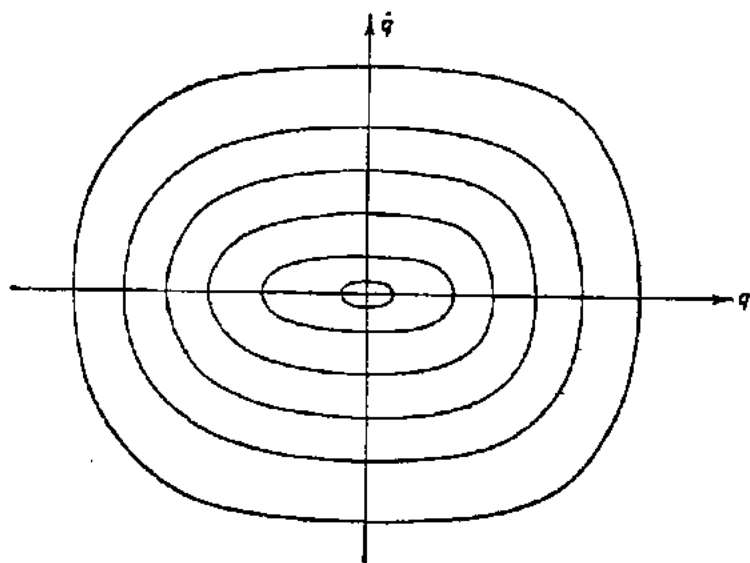


Рис. 96.

Мы получим семейство кривых типа эллипсов, причем только те из этих кривых будут заметно отличаться от эллипсов, для которых q велико и, следовательно, член q^4 играет заметную роль (рис. 96).

§ 7. Периодические движения в консервативных системах

С точки зрения теории колебаний нас в консервативных системах с одной степенью свободы интере-

суют в первую очередь стационарные состояния — именно состояния равновесия и периодические движения. Все остальные движения, как мы убедились при рассмотрении простейших консервативных систем, либо уходят в бесконечность, либо стремятся к состояниям равновесия (лимитационные движения). Мы уже рассмотрели подробно состояния равновесия в простейших консервативных системах. Теперь мы должны выяснить подробнее характер периодических движений, возможных в простейших консервативных системах.

Прежде всего периодические движения в консервативных системах отличаются той особенностью, что они никогда не встречаются изолированно. Если для $h = h_0$ на фазовой плоскости мы имели замкнутую

траекторию, т. е. периодическое движение (см. стр. 103), то, как мы видели, эта замкнутая траектория непременно окружена соседними замкнутыми траекториями, получающимися при близких h . Периодические траектории встречаются континуумами и заполняют целые области фазовой плоскости, причем одна замкнутая траектория охватывает другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут в зависимости от начальных условий непрерывно изменяться в известных конечных или бесконечных пределах.

Помимо самого факта существования периодических движений нас всегда должен интересовать вопрос, устойчивы ли эти движения. Поэтому при рассмотрении периодических движений мы должны строго сформулировать понятие устойчивости движения, подобно тому как мы сформулировали понятие об устойчивости положений равновесия. Мы примем определение устойчивости движения, данное Ляпуновым и вполне соответствующее обычному определению устойчивости состояний равновесия, приведенному в гл. I, § 3.

Периодическому движению соответствует движение представляющей точки по определенной замкнутой фазовой траектории. Окружим эту точку некоторой малой областью ϵ , которая движется вместе с представляющей точкой. Если при заданной сколь угодно малой области ϵ мы можем указать такую движущуюся область $\delta(\epsilon)$, что всякая представляющая точка, лежащая в начальный момент в этой области $\delta(\epsilon)$, никогда не выйдет за пределы области ϵ , то рассматриваемое движение устойчиво по Ляпунову. Более

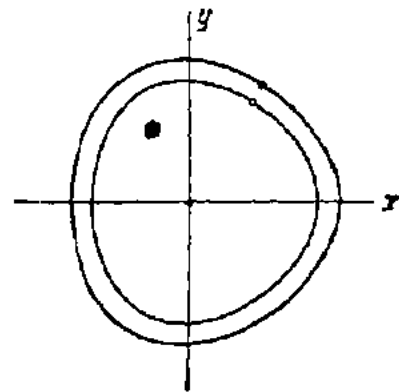


Рис. 97.

наглядно мы можем сформулировать это условие устойчивости следующим образом. Пусть движение подверглось некоторому возмущению — система испытала некоторый мгновенный толчок в произвольном направлении. Тогда представляющая точка сместится и будет продолжать движение уже по некоторой другой траектории. Представим себе, что при этом толчке представляющая точка «почернела» (рис. 97). Тогда исходное невозмущенное движение, устойчивость которого мы исследуем, т. е. движение, которое происходило бы, если бы не было толчка, будет изображаться движением светлой представляющей точки, а движение после толчка — возмущенное, изображается движением черной представляющей точки. Теперь условие устойчивости движения можно сформулировать следующим образом. Если черная точка, находящаяся в начальный момент (сразу после толчка) достаточно близко к светлой (т. е. если возмущение достаточно мало), всегда остается к ней достаточно близкой, то движение, изображаемое светлой точкой, устойчиво по Ляпунову¹⁾.

¹⁾ См. также определение устойчивости по Ляпунову в главе об автоколебательных системах, где изложены аналитические методы исследования устойчивости, правда, пригодные лишь для консервативных систем.

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, движение в консервативной системе неустойчиво по Ляпунову, ибо в общем случае период обращения представляющей точки по различным интегральным кривым различный. Вследствие этого светлая и черная точки, несмотря на малое начальное расстояние, будут все больше и больше расходиться, и после некоторого числа периодов получится картина, изображенная на рис. 98. Правда, потом они снова начнут сходиться, но все же при сколь угодно малом (но отличном от нуля) начальном расстоянии мы, вообще говоря, не сможем их «удержать» на расстоянии, меньшем заданного. Расстояние между светлой и черной точками не будет возрастать по сравнению с начальным в том специальном случае, когда черная и светлая точки движутся по одной траектории, т. е. когда возмущение таково, что представляющая точка при толчке перескакивает по самой траектории (заметим кстати, что этот специальный тип возмущения может быть осуществлен только при вполне определенном соотношении между изменением координаты и изменением скорости). Но этот случай отнюдь не противоречит нашему утверждению о неустойчивости движения, ибо речь шла об области $\delta(\epsilon)$, между тем участок траектории не представляет собой такой области.

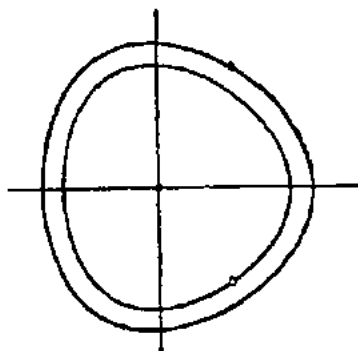


Рис. 98.

Периодические движения в консервативной системе будут устойчивы по Ляпунову только в специальном случае, когда имеет место изохронизм, т. е. когда период обращения один и тот же для различных траекторий. Но и в этом случае мы не будем иметь абсолютно устойчивых замкнутых траекторий, т. е. таких траекторий, в которых представляющая точка после достаточно малого возмущения будет снова асимптотически приближаться. Этот тип траекторий в консервативных системах с одной степенью свободы вообще невозможен. С ним мы столкнемся только при рассмотрении неконсервативных систем. Хотя, как мы только что видели, периодические движения в консервативных системах, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову, однако они все же обладают некоторым видом устойчивости. Именно — достаточно близкая траектория всегда лежит целиком в непосредственном соседстве с рассматриваемой. Такой вид устойчивости носит название *орбитной* устойчивости; эта устойчивость играет существенную роль в общей теории поведения интегральных кривых.

1. Общие свойства консервативных систем. До сих пор мы рассматривали такие консервативные системы, для которых справедливы уравнения Гамильтона. Между тем с точки зрения характера фазовой плоскости, или в более общем случае фазовой поверхности, а следовательно, и характера возможных движений в системе было бы естественно к числу консервативных отнести также и некоторые системы, для которых уравнения Гамильтона несправедливы. Мы дадим поэтому более общее определение консервативных систем и установим некоторые свойства консервативных систем, которые из этого определения вытекают.

Каждой динамической системе соответствует топологически вполне однозначно некоторая фазовая поверхность с расположенной на ней сеткой фазовых траекторий, так что каждой точке фазовой поверхности соответствует вполне определенное состояние системы (под состоянием системы мы подразумеваем ее положение и скорость), и обратно, соответствие это взаимно непрерывно и взаимно однозначно. Необходимым признаком консервативности системы мы будем считать существование однозначного интеграла вида:

$$F(u, v) = C, \quad (167)$$

где u, v — координаты, определяющие положение точки на фазовой плоскости. Во избежание излишних рассуждений мы предположим, что функция $F(u, v)$ — однозначная аналитическая функция; по существу задачи она не может тождественно равняться постоянной величине. Рассматривая C как третью координату, откладываемую по нормали

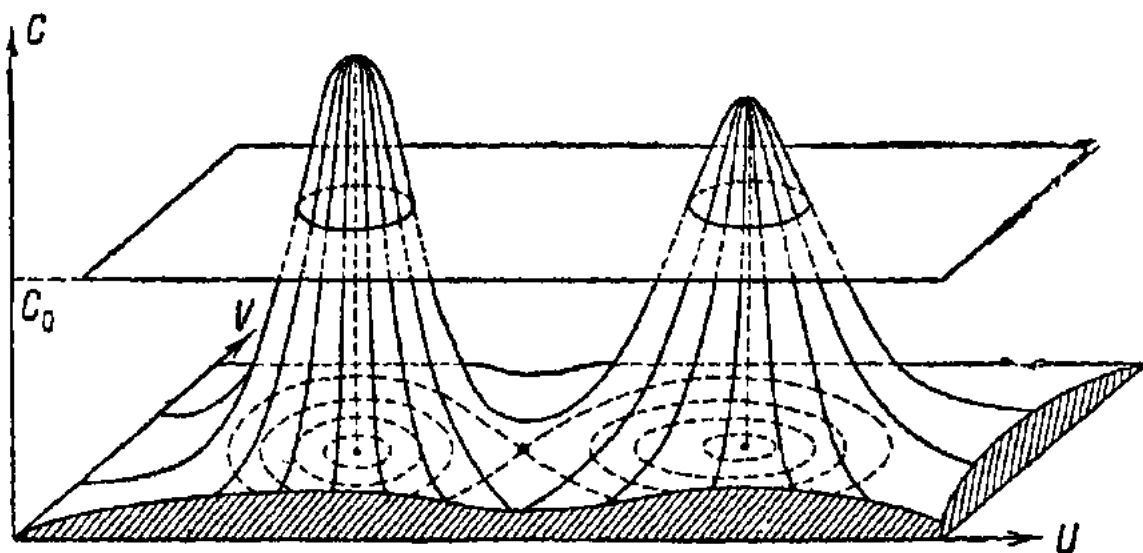


Рис. 99.

к фазовой поверхности, мы можем интерпретировать уравнение (167) как уравнение некоторой новой поверхности, построенной над фазовой поверхностью. Построенная таким образом поверхность обладает тем свойством, что линии равного уровня (уровень отсчитывается по оси C) суть интегральные кривые. В том случае, когда фазовая поверхность представляет собой плоскость (с этими случаями мы сталкивались до сих пор, но могут встретиться случаи, когда фазовая поверхность представляет собой цилиндр или даже какую-нибудь другую поверхность более сложной топологической структуры), линии равного уровня, т. е. интегральные кривые, представляют собой пересечение поверхности $F(u, v) = C$ с плоскостью, параллельной фазовой плоскости и определяемой уравнением $C = C_0$, где C — координата, а C_0 — константа (рис. 99).

Зная одну такую поверхность, можно построить их бесчисленное множество. Действительно, нас интересуют исключительно сами линии равного уровня, их относительная высота нас совершенно не интересует. Следовательно, мы можем по какому угодно закону изменять

«масштаб» оси C , произвольным образом сжимая или растягивая его на отдельных участках. Мы будем получать все новые и новые поверхности, причем все они будут обладать тем свойством, что линии равного уровня суть интегральные кривые. На аналитическом языке это означает тот очевидный факт, что если $F(u, v) = C$ есть интеграл некоторого уравнения, то и $\Phi[F(u, v)] = C$ также будет интегралом этого уравнения.

Особые точки кривых равного уровня соответствуют особым точкам системы интегральных кривых: так, изолированные точки кривых равного уровня соответствуют центру; узловые точки — седлу; точки заострения — особым точкам, получаемым от влияния центра и седла. Дифференциальное уравнение интегральных кривых, как это следует из уравнения (167), имеет вид:

$$\frac{dv}{du} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}. \quad (168)$$

Особые точки соответствуют тем значениям u, v , для которых одновременно $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются в нуль. Может случиться, что $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются одновременно в нули не только в изолированных точках, но и вдоль некоторой аналитической кривой. Покажем, что такая кривая непременно является интегральной, т. е. что точки этой кривой удовлетворяют уравнению $F(u, v) = \text{const.}$ Предположим, что кривая, о которой идет речь, дана в параметрической форме:

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Тогда

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad (169)$$

или, так как $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, то

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

откуда

$$F = \text{const.}$$

т. е. $F(u, v)$ вдоль кривой сохраняет постоянное значение. Нетрудно видеть, что такой случай имеет место, если соответствующая кривая равного наклона состоит из точек, в которых касательная плоскость параллельна фазовой поверхности, как, например, когда поверхность $F(u, v) = C$ имеет вид кратера, края которого лежат на одном уровне (рис. 100). Ни одна из особых точек не может быть такого типа, чтобы через нее проходило бесконечное множество интегральных кривых, сплошь заполняющих некоторую часть плоскости, ибо в этом случае все кривые должны были бы быть одного уровня; в силу аналитичности $F(u, v)$ в этом случае вообще была бы постоянной, что противоречит поставленному условию. Отсюда мы можем заключить,

что особые точки в консервативной системе не могут быть ни узлами, ни фокусами. Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что в консервативной системе не может быть замкнутой интегральной кривой, на которую бы другие интегральные кривые нависались. Далее можно утверждать, что если существует одна замкнутая траектория, то их обязательно существует целый континуум, сплошь заполняющий часть плоскости; это следует непосредственно из того, что фазовые траектории представляют собой линии уровня непрерывной поверхности $F(u, v) = C$. Поэтому не может существовать одна изолированная замкнутая траектория, ибо если одна линия уровня на непрерывной поверхности замкнута, то и все близкие линии уровня также должны быть замкнуты.

Перейдем теперь к исследованию движения во времени по этим траекториям. Поскольку уравнение (168) представляет собой результат исключения времени из уравнений движения, то, для того чтобы вернуться к уравнениям движения в их общем виде, мы должны принять во внимание, что вместе с исключением времени могла исчезнуть и некоторая функция $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, входящая множителем в оба уравнения. Следовательно, уравнения движения в общем виде могут быть написаны таким образом:

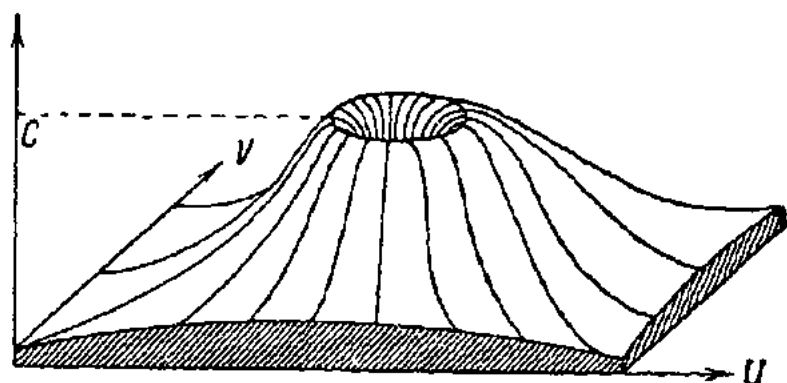


Рис. 100.

и их общем виде, мы должны принять во внимание, что вместе с исключением времени могла исчезнуть и некоторая функция $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, входящая множителем в оба уравнения. Следовательно, уравнения движения в общем виде могут быть написаны таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial v} \frac{1}{Q(u, v)} = U(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{1}{Q(u, v)} = V(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Эти более общие уравнения консервативной системы носят название уравнений Пфаффа. Относительно $S(u, v)$ мы предположим, что это — однозначная аналитическая функция на всей плоскости u, v , не обращающаяся в нуль ни для каких конечных значений u, v . В дальнейшем мы предполагаем, что фазовая поверхность является либо евклидовой плоскостью (либо частью евклидовой плоскости), либо может быть развернута на евклидову плоскость (например цилиндр), и будем считать u и v прямоугольными декартовыми координатами.

Мы показали выше (§ 6), что для систем, для которых справедливы уравнения Гамильтона, существует интегральный инвариант. Докажем теперь, что при сделанных предположениях общая консервативная система, описываемая уравнениями (170), также допускает интегральный инвариант $I = \int \int_{\sigma(t)} Q(u, v) du dv$. Для доказательства рассмотрим производную $\frac{dI}{dt}$. Чтобы удобнее было дифференцировать, а именно чтобы

можно было дифференцировать под знаком интеграла, мы, как и раньше, перейдем к переменным, не зависящим от времени; за такие переменные выберем начальные значения u_0 и v_0 ; так как $u = u(u_0, v_0, t - t_0)$ и $v = v(u_0, v_0, t - t_0)$, то выражение для $\frac{dI}{dt}$ принимает вид:

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{G(t_0)} \frac{d}{dt} Q D\left(\frac{u, v}{u_0, v_0}\right) du_0 dv_0,$$

где D — детерминант Якоби. Далее:

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{G(t_0)} \left\{ D\left(\frac{u, v}{u_0, v_0}\right) \frac{dQ}{dt} + Q \left[D\left(\frac{U, v}{u_0, v_0}\right) + D\left(\frac{u, V}{u_0, v_0}\right) \right] \right\} du_0 dv_0.$$

Принимая, наконец, во внимание, соотношение:

$$\frac{\partial U}{\partial u_0} = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_0} + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_0}$$

и аналогичные соотношения для $\frac{\partial U}{\partial v_0}$, $\frac{\partial V}{\partial u_0}$ и $\frac{\partial V}{\partial v_0}$, имеем:

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{G(t_0)} D\left(\frac{u, v}{u_0, v_0}\right) \left[\frac{\partial Q}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{dt} + Q \left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \right) \right] du_0 dv_0.$$

В силу уравнений (170)

$$U = \frac{1}{Q} \frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{и} \quad V = -\frac{1}{Q} \frac{\partial F}{\partial u},$$

имеем тождество:

$$\frac{\partial}{\partial u} (QU) + \frac{\partial}{\partial v} (QV) = 0,$$

откуда

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{G(t_0)} D\left(\frac{u, v}{u_0, v_0}\right) \left[\frac{\partial Q}{\partial u} \left(\frac{du}{dt} - U \right) + \frac{\partial Q}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} - V \right) \right] du_0 dv_0 = 0. \quad (171)$$

Итак, I действительно есть интегральный инвариант с фазовой плотностью Q . Нетрудно видеть, что выражение $Q\Phi(F)$, где Φ — любая функция, также будет интегральным инвариантом. Действительно, $\Phi(F)$ есть константа движения; поэтому совершенно очевидно, что если $\iint Q du_0 dv_0$ есть интегральный инвариант, то и $\iint Q\Phi(F) du_0 dv_0$ также есть интегральный инвариант. Можно показать, что это общий вид интегрального инварианта. Другими словами, отношение двух различных выражений для фазовых плотностей, приравненное постоянной величине, всегда есть интеграл системы.

Можно было бы сделать более общие предположения о функции $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$ — например допустить, что эта функция может обращаться в нуль или терять голоморфность вдоль изолированных кривых.

Соответствующие уравнения довольно часто встречаются на практике, как идеальные модели действительных динамических систем и эти системы в ряде случаев (например в некоторых случаях, когда вышеупомянутые изолированные кривые совпадают с фазовыми траекториями) несомненно заслуживают отнесения к классу консервативных систем. Однако мы не будем проводить здесь исследование и классификацию таких «патологических» случаев, а ограничимся лишь несколькими замечаниями, касающимися терминологии, и рассмотрением примера (см. пункт 4 настоящего параграфа).

Легко видеть, что в частном случае

$$Q(u, v) = 1$$

мы получаем уравнения типа Гамильтона:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

Здесь согласно общепринятым обозначениям H обозначено через H . Уравнения Гамильтона, как мы видели, имеют однозначный интеграл $H = \text{const.}$, обычно представляющий интеграл энергии (однако, как уже указывалось, это бывает не всегда), и имеют интегральный инвариант $\iint du dv$, представляющий просто фазовую площадь.

Из существования интегрального инварианта со знакоопределенной и ограниченной фазовой плотностью еще раз следует невозможность существования состояний равновесия типа узла или фокуса и асимптотически орбитно-устойчивых замкнутых траекторий на фазовой плоскости.

Из уравнений (170) непосредственно видно, что фазовая плотность есть не что иное, как интегрирующий множитель уравнения

$$F(u, v) du - U(u, v) dv = 0.$$

Хорошо известно, что уравнение такого типа всегда допускает интегрирующий множитель. Поэтому формально всякую динамическую систему, описываемую двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, можно привести к виду (170). Однако не все системы, описываемые этим уравнением, консервативны. Причина этого лежит в том, что в случае, когда консервативная система описывается уравнением типа (170), на функции F и Q налагаются определенные условия (однозначность, аналитичность и т. д.). Когда в классической механике рассматривают гамильтоновы уравнения, то там H есть энергия, и поэтому эти условия обычно автоматически удовлетворяются.

Заметим, что если динамическая система задана дифференциальными уравнениями общего вида:

$$\frac{du}{dt} = U, \quad \frac{dv}{dt} = V,$$

то не существует общих методов, которые позволили бы установить, консервативна ли описываемая этими уравнениями система или нет.

Часто неконсервативность системы можно установить сразу, например доказав существование абсолютно устойчивых или неустойчивых состояний равновесия. Вообще же установить консервативный характер интегральных кривых можно, только найдя каким-нибудь способом однозначный интеграл системы.

2. Консервативные системы и вариационный принцип. Характерной чертой консервативных уравнений является их вариационное происхождение.

Как известно, уравнения Гамильтона могут быть получены с помощью вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_0^{t_1} L dt = \delta \int_0^{t_1} (p\dot{q} - H) dt = 0. \quad (172)$$

Именно пользуясь тем, что δq обращается в нуль для $t=0$ и $t=t_1$, выражение (172) можно преобразовать к виду:

$$\int_0^{t_1} \left\{ \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0,$$

откуда в силу так называемой «основной леммы» вариационного исчисления получаем уравнения Гамильтона:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Рассмотрим теперь более общий вариационный принцип, а именно предположим, что подинтегральная функция в варьируемом интеграле есть линейная комбинация более общего вида:

$$\delta \int_0^{t_1} \{ X\dot{x} + Y\dot{y} + F \} dt = 0,$$

где X , Y и F — однозначные аналитические функции только x и y .

В этом более общем случае вариационные уравнения или, иначе, уравнения движения получают вид:

$$Q(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q(x, y) \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y},$$

где $Q(x, y) = X'_y - Y'_x$.

Это — уже известные нам уравнения Пфаффа, являющиеся наиболее общей формой уравнений, описывающих консервативные системы.

3. Основные свойства консервативных систем. Консервативные системы характеризуются однозначным интегралом, и, кроме того, они допускают интегральный инвариант. Пусть нам и тот и другой известны; спрашивается, насколько определено поведение консервативной системы?

Интеграл определяет фазовые траектории, инвариант — относительное распределение скоростей вдоль траекторий (иначе говоря, при помощи интегрального инварианта мы можем определить скорость в любой точке данной траектории, если она известна для какой-либо одной точки этой траектории). Рассмотрим теперь несколько подробнее движения, допускаемые в консервативной системе. Начнем с положений равновесия. Положения равновесия определяются обращением в нуль правых частей уравнений (170):

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Эти положения равновесия либо соответствуют особым точкам системы, либо образуют линии равновесия (в случае существования общих множителей у $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$), которые тогда, как мы видели, непременно совпадают с интегральными кривыми.

Мы видели, что особыми точками не могут быть точки, к которым сходится бесконечное множество траекторий, сплошь заполняющих часть плоскости, т. е., другими словами, положения равновесия не могут быть абсолютно орбитно-устойчивыми.

Замкнутые траектории соответствуют периодическим решениям: мы уже видели, что если есть хоть одно такое периодическое решение, то другие движения не могут на него накручиваться (а также с него скручиваться).

Иначе говоря (как мы уже упоминали), в консервативной системе не может быть также абсолютно орбитно-устойчивых траекторий. Если в консервативной системе есть одна замкнутая траектория, то их обязательно существует бесконечное множество, сплошь заполняющее некоторую область фазовой плоскости, причем эти замкнутые траектории вложены одна в другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут иметь любые значения, заключенные между определенными пределами в зависимости от начальных условий. Нетрудно видеть, что периоды колебаний, вообще говоря, различны для различных максимальных размахов, т. е. также зависят от начальных условий. Системы, допускающие изохронные колебания, т. е. колебания, период которых не зависит от максимального размаха, представляют исключительный случай; как пример такого случая можно указать на уже рассмотренный в I главе случай гармонического осциллятора. В случае если фазовая поверхность топологически эквивалентна плоскости, внутри замкнутых траекторий обязательно должна быть одна или несколько особых точек (если такая особая точка одна, то это обязательно центр). Колебания в системе совершаются только около одного или нескольких положений равновесия, из которых обязательно некоторые устойчивы. Если, например, фазовая поверхность — цилиндр, то могут существовать замкнутые траектории, не охватывающие особых точек — именно траектории, охваты-

вающие цилиндр; в таких системах могут происходить периодические движения по замкнутым траекториям, не охватывающим положений равновесия. В качестве примера можно указать на вращение маятника без затухания при большой начальной скорости (рис. 101). Далее возможны замкнутые интегральные кривые с одной или несколькими особыми точками; первые соответствуют дважды лимитационным движениям, т. е. движениям, которые для t , стремящегося к $+\infty$, и t , стремящегося к $-\infty$, стремятся к одному и тому же положению равновесия. Вторые соответствуют лимитационным движениям, которые для $t \rightarrow +\infty$ стремятся к одному положению равновесия, а для $t \rightarrow -\infty$ к другому. Возможны также лимитационно-убегающие движения, которые для t , стремящегося в одну сторону в бесконечность, стремятся к положению равновесия, а для t , стремящегося в другую сторону в бесконечность, тоже уходят в бесконечность, и, наконец, дважды убегающие движения, которые в обе стороны уходят в бесконечность.

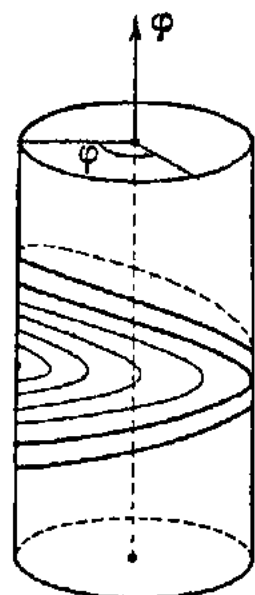


Рис. 101.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей терминологией. Если уравнения движения системы (определяемой двумя автономными уравнениями первого порядка) допускают однозначный аналитический интеграл, то мы будем говорить, что структура интегральных кривых на фазовой плоскости для этой системы имеет *консервативный характер*. Такую систему, имеющую однозначный аналитический интеграл, мы будем называть *консервативной системой*, если она имеет интегральный инвариант, удовлетворяющий следующим требованиям: 1) область интегрирования $G(t_0)$ может быть выбрана любой, лишь бы ее не пересекали некоторые изолированные кривые, 2) при дальнейшем изменении t $G(t)$ не стремится к нулю, оставаясь в конечной части фазовой плоскости.

В заключение укажем еще на одно свойство, о котором мы уже кратко упоминали, а именно неустойчивость консервативных систем в отношении изменения вида дифференциальных уравнений. Можно показать, что малейшее изменение вида дифференциального уравнения, вообще говоря, существенно изменяет всю картину на фазовой плоскости и нарушает консервативность системы. Для иллюстрации этого положения, которое будет точно сформулировано и разъяснено для общего случая в дальнейшем, можно привести следующий пример. Уравнение гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ мы можем рассматривать как частный случай уравнения линейного осциллятора:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

При $h = 0$ мы получаем консервативную систему — особую точку центр и интегральные кривые в виде семейства вложенных друг в друга эллипсов. При $h \neq 0$, но как угодно малом, т. е. по существу при сколь угодно малом изменении вида дифференциального урав-

нения, система перестает быть консервативной, особая точка превращается в фокус, замкнутые траектории исчезают, и появляются спирали. Можно сказать иначе, что консервативная система представляет собой весьма частный случай динамической системы, случай, который осуществляется только при вполне определенных значениях некоторых параметров системы (и поэтому практически этот случай неосуществим). Изменение этих параметров, вообще говоря, связано с изменением вида дифференциальных уравнений и нарушением консервативности системы¹⁾.

4. Пример. Совместное существование двух видов. Мы рассматривали до сих пор в виде примеров либо механические, либо электрические системы, для которых вопрос о консервативности решался непосредственно из физических соображений — поскольку трение или сопротивление в системе отсутствует, мы сразу можем сделать заключение, что система консервативна. Однако возможны случаи, когда такие простые соображения для решения вопроса о том, консервативна ли система, уже не могут быть применены. Необходимым критерием консервативности служит приведенный в предыдущем параграфе признак наличия однозначного аналитического интеграла вида $F(u, v) = C$. В качестве примера такой системы, для которой вопрос о консервативности не может быть решен заранее, мы приведем пример из области биологии, принадлежащий Вольтерра^[82], именно мы рассмотрим совместное существование двух видов животных (например двух видов рыб). Первый вид питается продуктами среды, которые, мы предположим, имеются всегда в достаточном количестве. Рыбы второго вида питаются только рыбами первого вида. Число особей каждого вида есть, конечно, целое число и, следовательно, может изменяться только скачками, но чтобы иметь возможность применить методы дифференциального исчисления, мы будем рассматривать их как непрерывные функции времени. Обозначим число особей первого вида через N_1 , второго — через N_2 . Мы предположим, что если бы первый вид жил один, то число особей его непрерывно увеличивалось бы, причем скорость увеличения мы предположим пропорциональной числу имеющихся налицо особей; тогда мы можем написать:

$$\frac{dN_1}{dt} = \epsilon_1 N_1,$$

причем $\epsilon_1 > 0$. Этот коэффициент увеличения ϵ_1 зависит от смертности и рождаемости. Если бы второй вид жил один, то он бы постепенно вымирал, так как ему нечем было бы питаться, поэтому для второго вида мы можем написать:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\epsilon_2 N_2.$$

Теперь предположим, что оба вида живут совместно, тогда коэффициент увеличения первого вида будет тем меньше, чем больше N_2 , так как

¹⁾ В § 5 мы рассматривали специально выбранные изменения параметров системы не нарушающие консервативности системы.

рыб первого вида поедают рыбы второго вида. Мы сделаем простейшее предположение, а именно, что коэффициент увеличения ϵ_1 уменьшается на величину, пропорциональную N_2 ; аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения второго вида ϵ_2 в силу наличия первого вида (наличия пищи) изменяется на величину, пропорциональную N_1 . При этих предположениях мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 (\epsilon_1 - \gamma_1 N_2); \quad \frac{dN_2}{dt} = -N_2 (\epsilon_2 - \gamma_2 N_1), \quad (173)$$

причем ϵ_1 , ϵ_2 , γ_1 и γ_2 все больше нуля.

Умножая первое уравнение на γ_2 , второе на γ_1 и складывая, получим:

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} = \epsilon_1 \gamma_2 N_1 - \epsilon_2 \gamma_1 N_2;$$

умножая же первое на $\frac{\epsilon_2}{N_1}$ и второе на $\frac{\epsilon_1}{N_2}$ и складывая, получаем:

$$\epsilon_2 \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} + \epsilon_1 \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = -\epsilon_2 \gamma_1 N_2 + \epsilon_1 \gamma_2 N_1.$$

Следовательно:

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} - \epsilon_2 \frac{d \ln N_1}{dt} - \epsilon_1 \frac{d \ln N_2}{dt} = 0.$$

Последнее уравнение непосредственно интегрируется, и мы имеем однозначный интеграл:

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \epsilon_2 \ln N_1 - \epsilon_1 \ln N_2 = \text{const.}$$

Этот интеграл мы можем записать в таком виде:

$$F(N_1, N_2) = e^{-\gamma_2 N_1} e^{-\gamma_1 N_2} N_1^{\epsilon_2} N_2^{\epsilon_1} = \text{const.} \quad (174)$$

Нетрудно убедиться, что выражение

$$\iint \frac{dN_1 dN_2}{N_1 N_2}$$

будет интегральным инвариантом. На основании этого мы заключаем что рассматриваемая система является консервативной. Перейдем теперь к исследованию вида интегральных кривых. Для этого перепишем уравнение (174) в следующем виде:

$$N_1^{-\epsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\epsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}$$

и построим кривые

$$Y = N_1^{-\epsilon_2} e^{\gamma_2 N_1}; \quad X = N_2^{\epsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2},$$

откуда искомая траектория определяется соотношением:

$$Y = CX.$$

Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые и отложим на них оси OX , ON_1 , OY , ON_2 , как это показано на рис. 102. Во втором

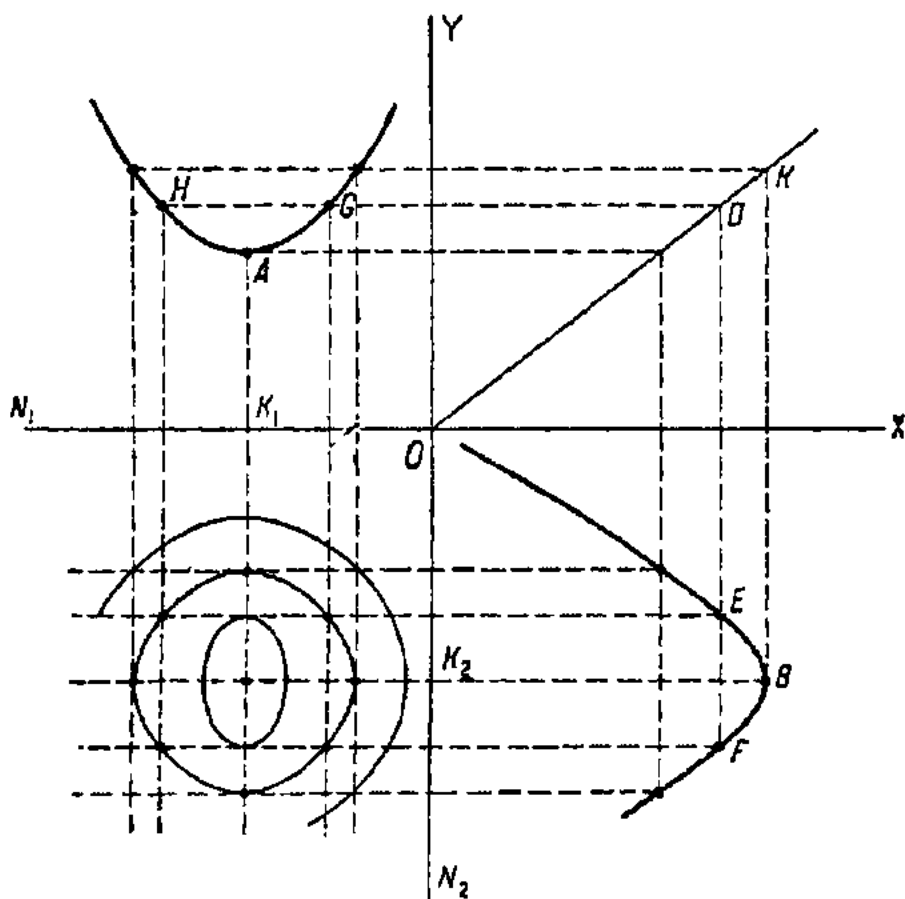


Рис. 102.

и четвертом квадранте нанесем соответственно кривые X и Y . Форму этих кривых легко определить из следующей таблицы:

| | | | | | | | |
|-------------------|-----------|-------------------------------------|-----------|-------------------|-----|-------------------------------------|-----------|
| N_1 | 0 | $k_1 = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}$ | $+\infty$ | N_2 | 0 | $k_2 = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}$ | $+\infty$ |
| $\frac{dY}{dN_1}$ | $-$ | 0 | $+$ | $\frac{dX}{dN_2}$ | $+$ | 0 | $-$ |
| Y | $+\infty$ | $\swarrow \text{min} \searrow$ | $+\infty$ | X | 0 | $\nearrow \text{max} \nwarrow$ | 0 |

так как

$$\frac{dY}{dN_1} = Y \left(-\frac{\epsilon_2}{N_1} + \gamma_2 \right) \quad \text{и} \quad \frac{dX}{dN_2} = X \left(\frac{\epsilon_1}{N_2} - \gamma_1 \right).$$

В первом квадранте переведем прямую $Y = CX$. Возьмем какую-нибудь точку на прямой OK , например D . Проведем через нее две прямые — одну параллельную оси OY , другую параллельную оси OX . Пусть E, F, G, H будут точки пересечения этих прямых с кривыми X и Y ; из точек E и F проведем две прямые, параллельные оси OY ,

и через точки H и G — две прямые, параллельные оси OY . Точки пересечения этих прямых и принадлежат интегральной кривой $Y = CX$. Геометрическое место таких точек, когда точка D скользит по прямой OK , и есть искомые интегральные кривые; нетрудно видеть, что

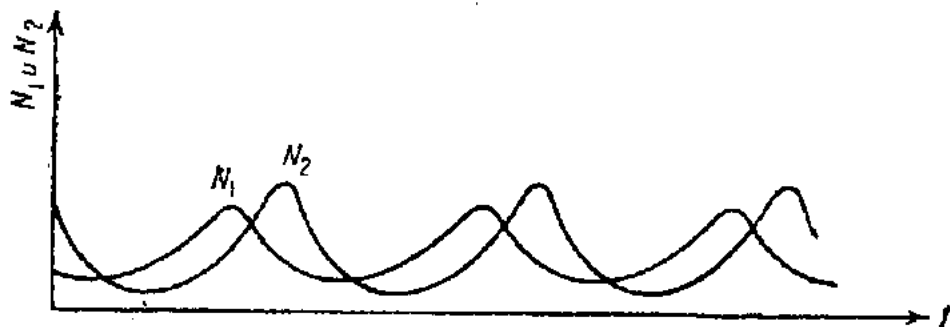


Рис. 103.

интегральные кривые все замкнуты, кроме одной, соответствующей координатным осям с центром в точке

$$N_1 = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}.$$

Итак, мы видим, что в исследуемом случае изменение численности обоих видов происходит по периодическому закону. На рис. 103 приведены зависимости N_1 и N_2 от времени.

ГЛАВА III

НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Введение

Мы рассмотрели два класса систем — во-первых, системы неконсервативные, но линейные, и убедились в том, что для этого класса систем периодические движения вообще невозможны. Во-вторых, мы рассмотрели системы консервативные (линейные и нелинейные) и убедились, что в этих системах возможны периодические движения, но что таких движений всегда возможно бесчисленное множество, и амплитуда их целиком определяется начальными условиями. Между тем, как уже неоднократно указывалось, нас интересуют главным образом такие периодические движения, амплитуда которых определяется свойствами самой системы. Затем, нас в первую очередь интересуют такие системы, характер движений в которых не изменяется существенно при малых, достаточно общих изменениях самих систем; консервативные системы, как только что было указано, не удовлетворяют и этому требованию. Мы увидим дальше, что лишь неконсервативные нелинейные системы являются адекватными математическими моделями интересующих нас реальных физических систем, т. е. такими моделями, которые позволяют получать ответы на вопросы, интересующие физику колебаний. В настоящей главе мы познакомимся на примерах с двумя основными типами таких нелинейных и неконсервативных систем — с системами *диссипативными* и с системами *автоколебательными*.

§ 2. Диссипативные системы

Поскольку рассматриваемый нами случай отличается от рассмотренного ранее случая консервативной системы наличием сил, не имеющих потенциала, мы можем, вводя «обобщенные силы», написать для этих систем уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} - \Phi = 0, \quad (175)$$

где обобщенная сила Φ обычно есть некоторая функция скорости \dot{q} . В частном случае «линейного трения» или омического сопротивления Φ есть линейная функция скорости, т. е. выражается так: $\Phi = -b\dot{q}$, и уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} + b\dot{q} = 0. \quad (176)$$

К такому уравнению приводит любая из рассмотренных нами консервативных систем при наличии силы трения, пропорциональной скорости, например контур с железом при наличии омического сопротивления. К общему же виду, т. е. к уравнению (175), нас приведет рассмотрение систем, в которых трение каким-либо более сложным образом зависит от скорости.

Если неконсервативные силы имеют характер сил трения, то они должны препятствовать движению, т. е. должны быть всегда направлены в сторону, противоположную скорости. Следовательно, в случае наличия сил трения всегда соблюдается условие:

$$\Phi \dot{q} < 0, \quad (177)$$

причем равенство нулю никогда не может удовлетворяться тождественно за исключением случая, когда $\dot{q} \equiv 0$, т. е. когда система находится в состоянии покоя. Умножив все члены уравнения (175) на \dot{q} , мы получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{dW}{dt} - \Phi \dot{q} = 0, \quad (178)$$

где $W = \dot{q} \frac{dL}{dq} - L = \text{const.}$ есть интеграл уравнения (175) для случая $\Phi = 0$.

Для обычных задач W есть полная энергия системы, и, как следует из уравнения (178), в силу условия (177) энергия системы может только убывать и, вообще говоря, при движении системы всегда убывает. Если считать, что энергия не может стремиться к $-\infty$, то можно утверждать, что она стремится к некоторому постоянному значению W_0 , в то же время $\Phi \dot{q}$ стремится к нулю, т. е. система стремится к состоянию покоя. Мы видим таким образом, что в системах, для которых справедливо условие (177), единственными стационарными состояниями могут быть состояния покоя (состояния равновесия). Такие системы мы будем называть диссипативными. Периодические движения в диссипативных системах, очевидно, невозможны, так как энергия системы при движении всегда убывает.

В качестве примера диссипативной системы мы рассмотрим обычный маятник при больших отклонениях и при наличии силы трения. Для простоты мы будем считать, что сила трения пропорциональна скорости, т. е. положим $\Phi = -b\dot{q}$ и $b > 0$. Лагранжева функция L для маятника имеет вид:

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(\cos \varphi - 1),$$

и уравнение Лагранжа напишется так:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (179)$$

Картина на фазовой плоскости определяется уравнением:

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{b}{I} - \frac{mgl \sin \varphi}{Iy}, \quad (180)$$

где $y = \frac{d\varphi}{dt}$. Особые точки уравнения (180) суть $y=0$ и $\sin \varphi=0$ или $\varphi = k\pi$, $y=0$, причем k — любое целое число или нуль. При $k=0$ или четном особые точки соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а при k нечетном — неустойчивым. (Для того чтобы убедиться в этом, достаточно разложить $\sin \varphi$ в ряд вблизи значения $\varphi = k\pi$, ограничиться первым членом этого ряда и полученное линейное уравнение исследовать так, как мы это уже неоднократно делали.) Устойчивым состояниям равновесия соответствует особая точка либо типа фокуса, если $b^2 < 4Imgl$ (рис. 104), либо типа узла, если $b^2 > 4Imgl$ (рис. 105). Неустойчивым состояниям равновесия соответствуют особые точки типа седла. Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси x ($y=0$) и горизонтальны на кривых: $y = -\frac{mgl}{b} \sin \varphi$,

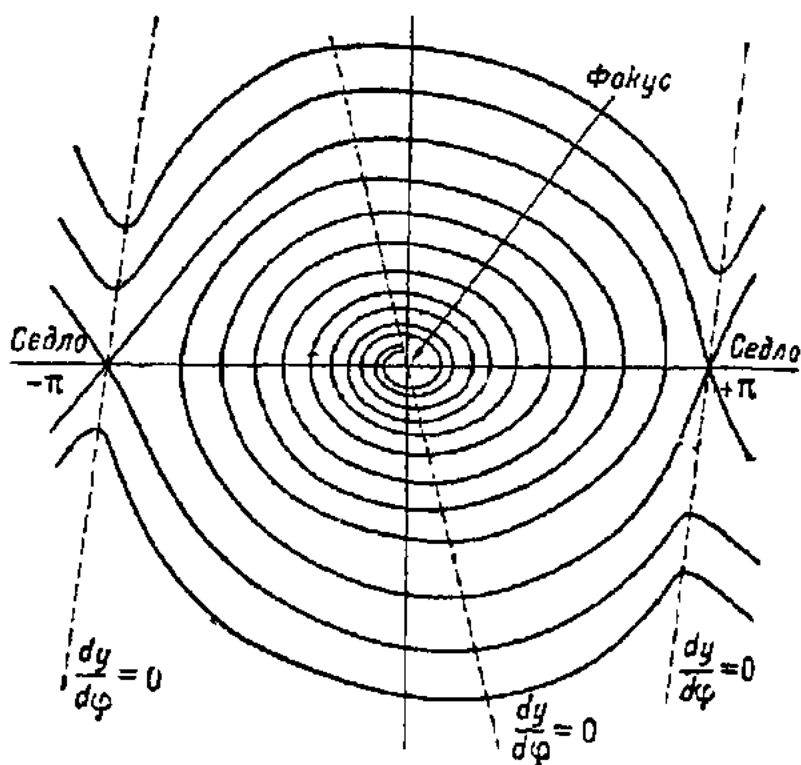


Рис. 104.

касательные к интегральным кривым вертикальны на оси x ($y=0$) и горизонтальны на кривых: $y = -\frac{mgl}{b} \sin \varphi$,

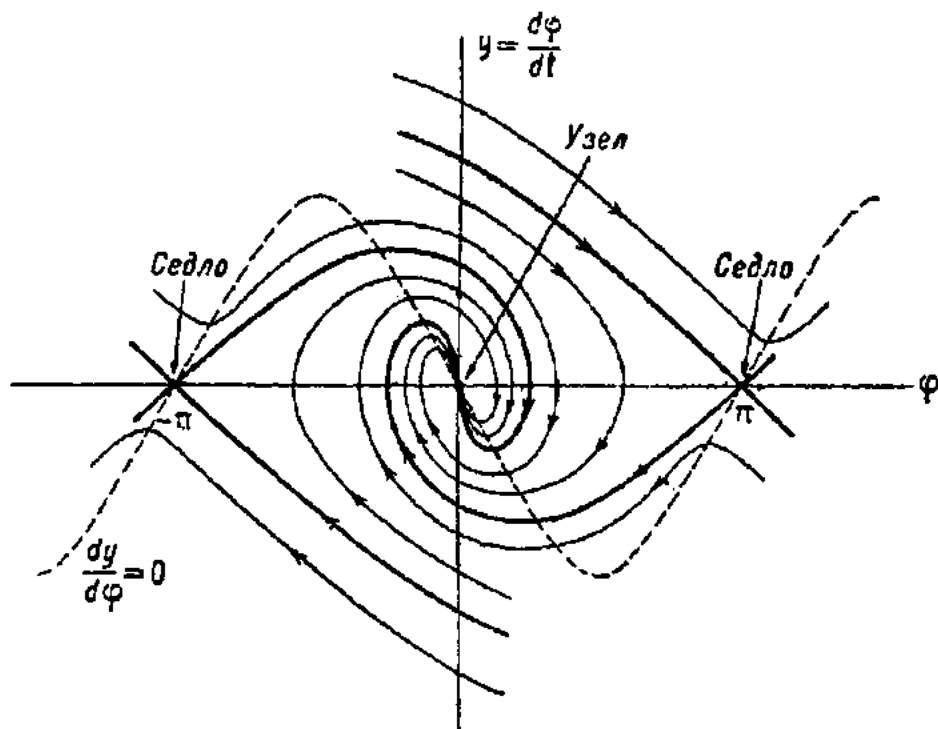


Рис. 105.

т. е. изоклина $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ имеет вид синусоиды, и чем b меньше, тем больше амплитуда этой синусоиды. В общем для двух рассматриваемых

случаев $h^2 < 4Imgl$ и $h^2 > 4Imgl$ получаются картины фазовой плоскости, изображенные соответственно на рис. 104 и 105. Поскольку φ — угловая координата и поэтому картина на фазовой плоскости через каждые 2π снова повторяется, можно ограничиться только областью от $-\pi$ до $+\pi$ и рассматривать этот участок как разрезанную и распрямленную картину, полученную на цилиндрической фазовой поверхности.

Глядя на фазовые портреты маятника (рис. 104 и 105), легко убедиться в том, что периодических движений в системе нет и что почти при всех начальных условиях (за исключением условий, соответствующих состояниям равновесия и устойчивым усам седел) система стремится к устойчивому состоянию равновесия.

Если условие (177) не соблюдается, то система уже не является диссипативной. В такой системе возможно возрастание энергии за счет «сил трения», так как, при $\Phi \dot{q} > 0$, $\frac{dW}{dt} > 0$; мы уже познакомились на примерах регенеративного приемника и маятника Фроуда с такими случаями.

Если условие (177) не соблюдается, то мы уже не можем утверждать, что периодические движения невозможны. Пусть, например, мы имеем «силу трения», пропорциональную квадрату скорости, т. е. $\Phi = -b\dot{q}^2$, где $b > 0$. Очевидно, что такая «сила трения» препятствует движению при $\dot{q} > 0$ и помогает движению при $\dot{q} < 0$. В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид:

$$\frac{dW}{dt} + b\dot{q}^3 = 0. \quad (181)$$

Легко можно показать, исследуя это уравнение, что для обычных механических и электрических задач «сила трения» вида $\Phi = -b\dot{q}^2$ не нарушает консервативности системы и что в соответствующих системах возможны континуумы периодических движений, с амплитудами, зависящими от начальных условий¹⁾.

В качестве примера рассмотрим картину на фазовой плоскости для осциллятора, описываемого уравнением:

$$\ddot{x} + hx^2 + x = 0 \quad (182)$$

(коэффициент ω_0^2 при третьем члене мы всегда можем сделать равным единице соответствующим выбором масштаба времени). Полагая $\dot{x} = y$ и исключая время, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - hy^2}{y} \quad (183)$$

1) Если бы мы хотели ввести «настоящую» силу трения, пропорциональную квадрату скорости, то мы должны были бы снова считать, что $\Phi = -b\dot{q}^2$, но $b > 0$ при $\dot{q} > 0$ и $b < 0$ при $\dot{q} < 0$. При таком законе трения условие (177), конечно, снова окажется выполненным.

или

$$y \frac{dy}{dx} + hy^2 + x = 0;$$

вводя новую переменную $\xi = y^2$, можем привести это уравнение к виду:

$$\frac{1}{2} \frac{d\xi}{dx} + h\xi + x = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\xi = Ce^{-2hx} + \frac{1}{2h^2} - \frac{x}{h},$$

откуда

$$y^2 = Ce^{-2hx} + \frac{1}{2h^2} - \frac{x}{h}$$

или

$$y^2 = \frac{1}{2h^2} [2Ch^2e^{-2hx} + 1] - \frac{x}{h}. \quad (184)$$

При $C = -\frac{1}{2h^2}$ получается только одна действительная точка $x = 0$ и $y = 0$. Как видно из уравнения (183), это есть особая точка.

При $-\frac{1}{2h^2} < C < 0$ получаются замкнутые кривые, охватывающие особую точку и вложенные одна в другую (рис. 106). При $C = 0$ получаем сепаратрису $y^2 = \frac{1}{2h^2} - \frac{x}{h}$. Наконец, при $C > 0$ интегральные кривые уходят в бесконечность. Если в начальный момент представляющая точка находилась внутри области, ограниченной сепаратрисой, то система будет совершать периодическое движение с амплитудой, целиком определяемой начальными условиями (из вида интегральных кривых

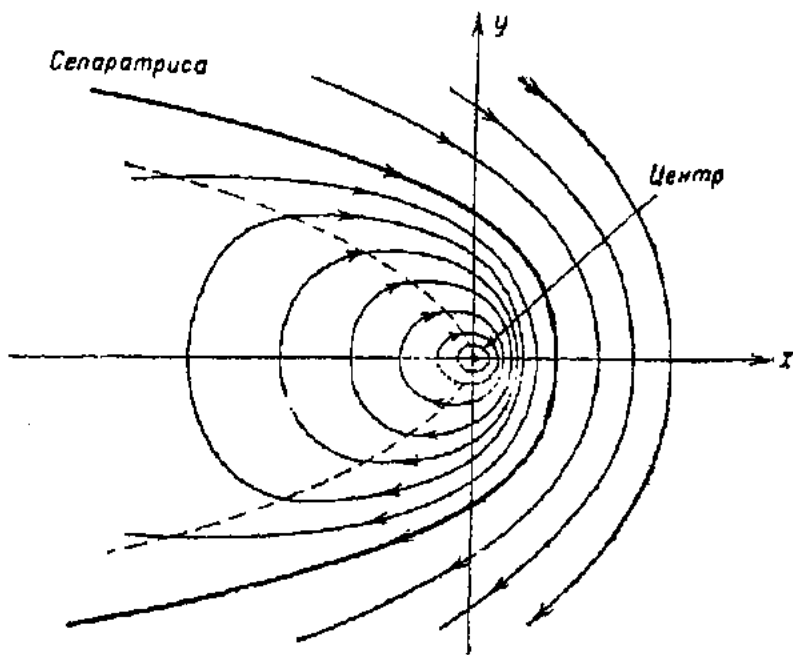


Рис. 106.

сразу можно заключить, что колебания будут по форме существенно отличаться от синусоидальных). Это свойство является, как мы видели, одним из наиболее характерных свойств консервативных систем; введенное нами трение, которое в течение одной части периода препятствует движению, а в течение другой «помогает» ему, не нарушает консервативности системы.

От этого случая легко перейти к случаю «настоящего» трения, пропорционального квадрату скорости. Для этого нужно лишь считать, что h

меняет знак при переходе \dot{x} через нуль, так что всегда соблюдается условие диссипативности (177), т. е. $h\dot{x}^3 > 0$, и, следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} h > 0 \text{ при } \dot{x} > 0, \\ h < 0 \text{ при } \dot{x} < 0. \end{array} \right\} \quad (185)$$

Уравнение (183) не изменяется при замене x на $-x$ и h на $-h$, и, следовательно, замена h на $-h$ соответствует замене на обратное направление оси x ; во всем остальном картина на фазовой плоскости оста-

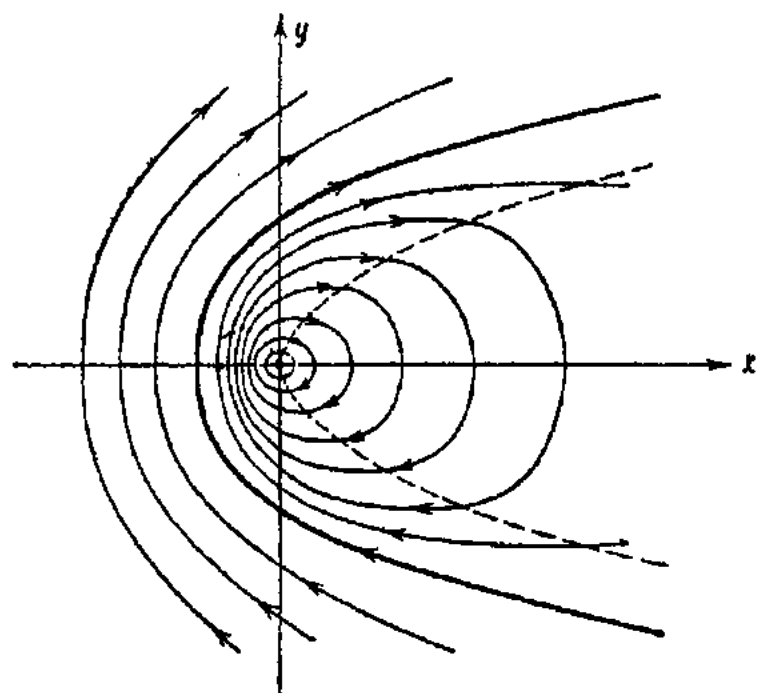


Рис. 107.

нется неизменной (рис. 107). Чтобы получить картину на фазовой плоскости, для условий (185), нужно взять для полуплоскости над осью x картину, соответствующую $h > 0$ (рис. 106), а для полуплоскости под осью x — картину, соответствующую $h < 0$ (рис. 107). В результате мы получаем картину, изображенную на рис. 108. Как и следовало ожидать, при любых начальных условиях система будет совершать затухающие колебания. Легко сообразить, что в случае «отрицательного квадратичного

трения», т. е. в случае, когда $h\dot{x}^3 < 0$, т. е. $h < 0$ при $\dot{x} > 0$ и $h > 0$ при $\dot{x} < 0$, мы получим картину, обратную только что рассмотренной (рис. 109); при любых начальных условиях в системе будут происходить нарастающие колебания.

§ 3. Постоянное трение

В качестве другого примера диссипативной системы мы рассмотрим систему с «постоянным трением», причем для простоты будем считать, что при отсутствии трения система представляет гармонический осциллятор. Такую задачу об осцилляторе, который при отсутствии трения был бы гармоническим, мы уже рассматривали в главе I, § 4, предполагая, однако, при этом, что сила трения пропорциональна скорости. Как уже было указано во введении, этот закон трения достаточно удовлетворительно определяет сопротивление движению тела со стороны жидкой или газообразной среды при не слишком больших скоростях и сопротивление металлических проводников электрическому току при не слишком больших плотностях токов. В случае же трения твердых поверхностей (смазанных или несмазанных) сила трения является, вообще говоря, весьма сложной функцией скорости (примеры

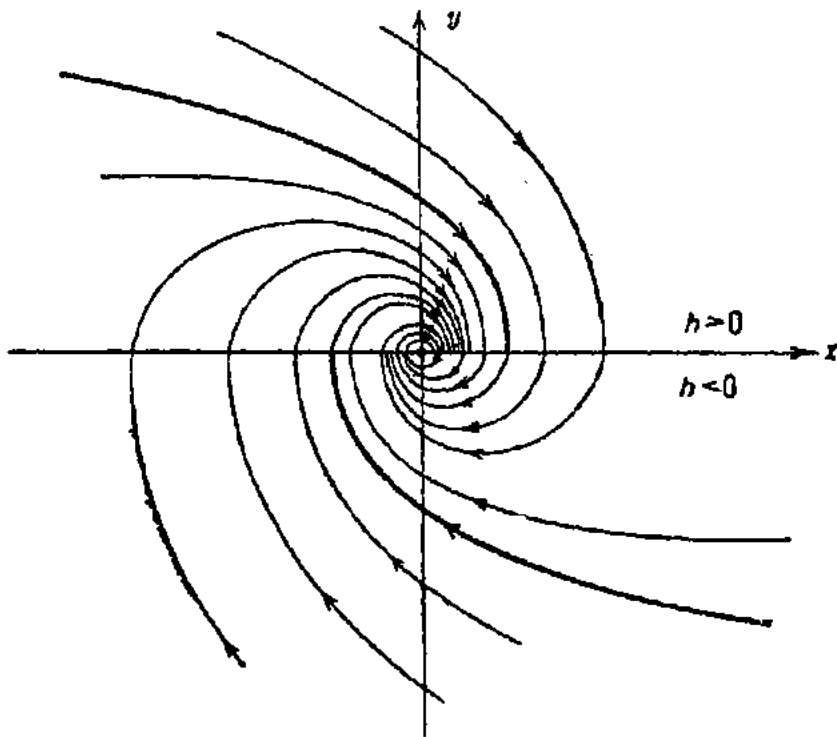


Рис. 108.

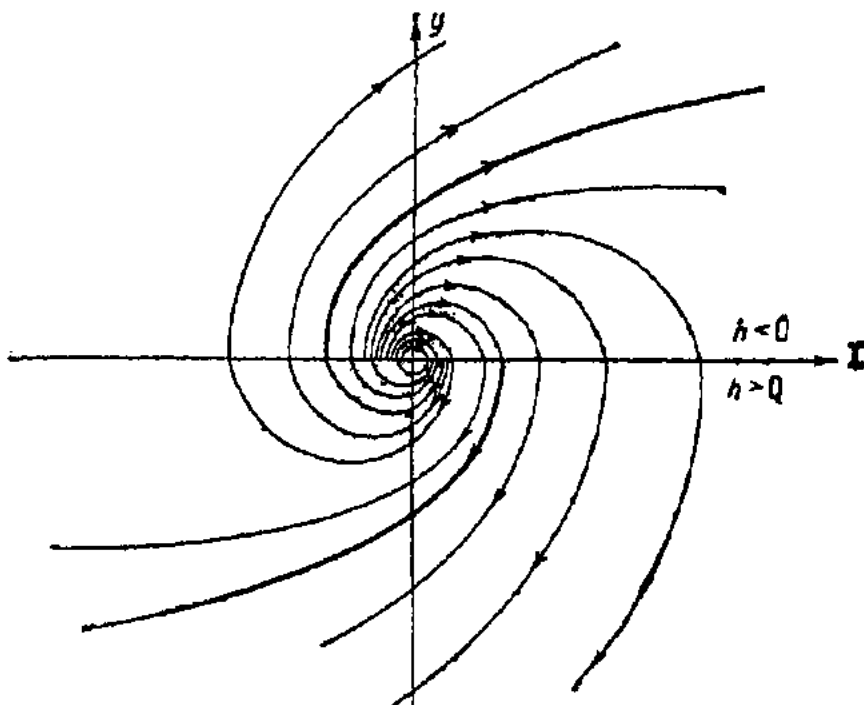


Рис. 109.

зависимости силы трения от скорости были приведены на рис. 5 и 6). Ход этих функций в области малых скоростей таков, что передать хотя бы приблизительно зависимость силы трения от скорости при помощи линейной идеализации не представляется возможным. Гораздо лучше передает основные черты этой зависимости предположение о постоянном или кулоновском трении. Конечно, когда речь идет о постоянном трении, то нужно понимать под этим трение, постоянное по величине, но не по направлению, так как направление силы трения

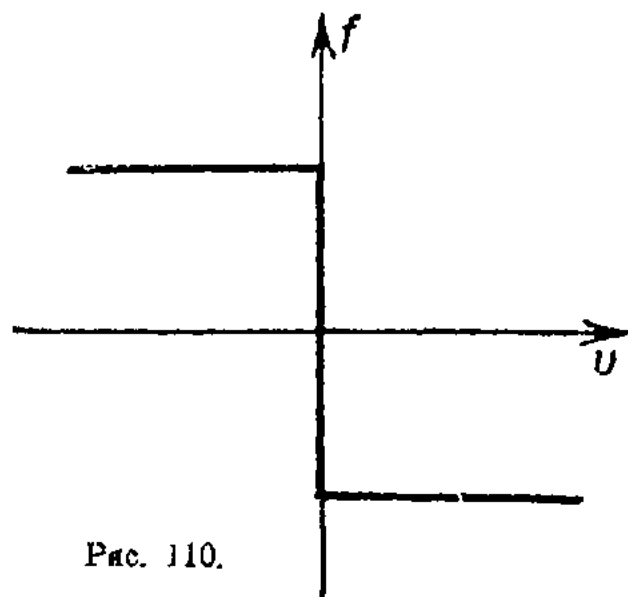


Рис. 110.

всегда противоположно направлению скорости [только в этом случае условие диссипативности, т. е. неравенство (177), соблюдается]. Зависимость кулоновской силы трения f от скорости v можно, как мы уже это делали, изобразить диаграммой, приведенной на рис. 110. При этом следует помнить, что величина силы трения для $v = 0$ неопределенна и может принимать, в зависимости от величины других действующих на систему сил, любые значения от $+f_0$ до $-f_0$. В том, что сила

трения при $v = 0$ действительно является величиной неопределенной и может принимать любые значения в пределах от $-f_0$ до $+f_0$, легко убедиться из следующего простого примера. Представим себе груз массы m на горизонтальной подставке. К грузу прикреплена веревка, перекинутая через блок. К концу веревки подвешена масса M (рис. 111). Пока сила натяжения веревки, т. е. Mg , меньше f_0 , груз будет оставаться в покое. Но если груз остается в покое, то, значит, сумма действующих на него вдоль подставки сил равна нулю. Этих сил две —

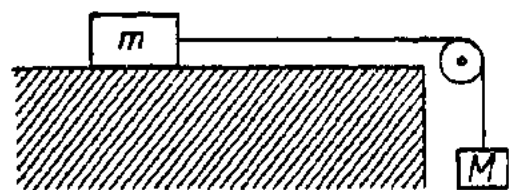


Рис. 111.

натяжение веревки и сила трения покоя; значит, в зависимости от силы натяжения веревки и сила трения может принимать любое значение от $-f_0$ до $+f_0$. Таким образом величина силы трения покоя определяется величиной той силы, которую она должна уравновесить. Однако это возможно только, пока эта последняя

сила по абсолютной величине меньше f_0 . Если же эта сила по абсолютной величине будет больше f_0 , то груз придет в движение; при движении сила трения $f = -f_0$ (для $v > 0$) и $f = +f_0$ (для $v < 0$). По закону Кулона f_0 прямо пропорциональна давлению, т. е. в нашем случае $f_0 = \rho_0 mg$, где ρ_0 — так называемый коэффициент трения¹⁾.

1) Заметим, что иногда лучше соответствует действительности несколько более общее предположение о виде характеристики твердого трения, чем вышеизложенная кулоновская идеализация. Именно, иногда бывает целесообразно считать, что абсолютная величина максимальной силы трения покоя больше, чем абсолютная величина постоянной (по величине, но не по направлению) силы трения при движении.

Простейшей моделью осциллятора при наличии кулоновского трения может служить уже описанное во введении устройство, изображенное на рис. 112.

Уравнение движения для движения влево имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx + f_0 \quad (\dot{x} < 0), \quad (186)$$

а для движения массы вправо — вид:

$$m\ddot{x} = -kx - f_0 \quad (\dot{x} > 0). \quad (187)$$

Таким образом при принятой нами идеализации закона трения мы не можем с помощью единого дифференциального уравнения описать рассматриваемый процесс¹⁾, при движении массы влево вступает в силу одно уравнение, при движении вправо — другое.

Как найти движение такой системы? Пусть, например, в начальный момент у нас $\dot{x} > 0$. Движение системы описывается первым дифференциальным уравнением (186). Скорость будет уменьшаться до некоторого момента $t = t_1$, и когда система достигнет координаты $x = x_1$, скорость обратится в нуль. Затем скорость переменит знак²⁾, и система будет двигаться в обратном направлении. Обратное движение, само собой разумеется, описывается уже вторым уравнением (187), причем теперь в качестве начальных условий обратного движения нужно взять те значения координаты и скорости $(x_1, 0)$, которыми обладала система в конце предыдущего движения. Таким же образом поступают и дальше: меняют уравнение при каждом изменении направления движения, «припасовывая» начальные условия, т. е. принимая за начальное состояние то состояние, в которое пришла система в предыдущем движении. Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{f_0}{m} = a\omega_0^2$ (очевидно, что в таком случае $a = \frac{f_0}{k}$), напишем уравнения движения рассматриваемой системы в таком виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} +a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ -a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (188)$$

Вводя для первого уравнения новую переменную $x_1 = x - a$, а для второго $x_2 = x + a$, получим два одинаковых уравнения: $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$

1) Точнее, нет единого линейного уравнения, описывающего процесс, так как мы могли бы охватить не только этот частный случай, но и значительно более общие случаи законов трения нелинейным дифференциальным уравнением $m\ddot{x} + kx = f(x)$, где $f(x)$ — функции, допускающая разрывы. Излагаемый далее на примере метод замены одного нелинейного уравнения несколькими линейными часто весьма сильно упрощает задачу и позволяет быстро получить количественные ответы.

2) Тело, конечно, может остановиться. Остановится оно или не остановится, зависит от того, что больше в точке x , максимальное значение силы трения f_0 или сила упругости.

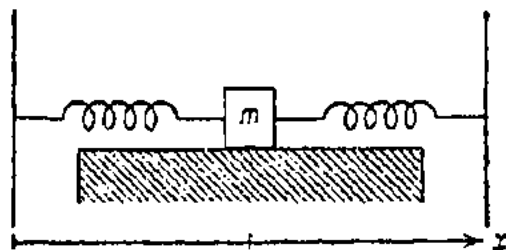


Рис. 112.

(при $\dot{x}_1 < 0$) и $\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$ (при $\dot{x}_2 > 0$), но для переменных, отнесенных к разным началам координат. Решениями этих уравнений являются уравнения гармонического колебания. Следовательно, движение рассматриваемой нами системы мы можем представить себе составленным из двух «половин» гармонических колебаний, происходящих относительно двух различных положений равновесия, сдвинутых соответственно на расстояние $+a$ и $-a$ от истинного положения равновесия, которое занимала бы система при отсутствии трения. «Смена уравнений» происходит в тот момент, когда скорость системы обращается в нуль, но координата отлична от нуля. Следовательно, при каждой «смене уравнений» мы имеем начальные условия $x = x_{0i}$; $\dot{x} = 0$. Решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, есть $x_{0i} \cos \omega_0 t$ (если для момента «смены уравнений» положить $t = 0$). Поэтому каждое «полуколебание» мы должны изображать отрезком косинусоиды от 0 до π , т. е. от одного экстремального значения до следующего.

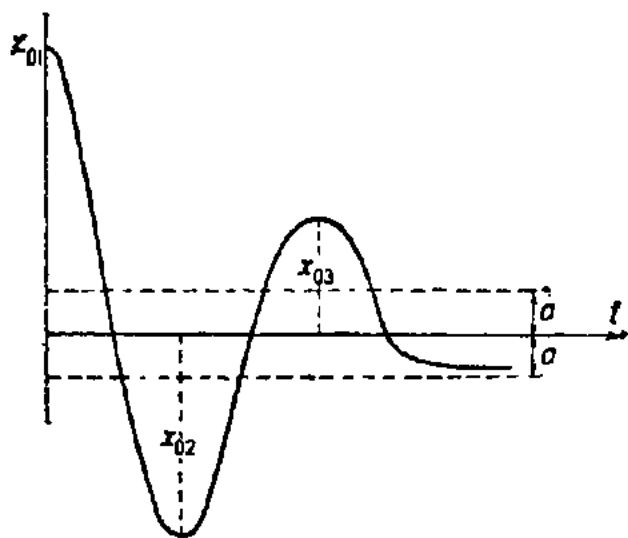


Рис. 113.

Изображая движение на диаграмме $x = f(t)$, мы должны поступить следующим образом (рис. 113). Пусть начальное отклонение системы x_{01} , а начальная скорость $\dot{x}_{01} = 0$. Если начальное отклонение положительно, то скорость первое время будет отрицательна и, значит, положение равновесия будет смещено на $+a$, т. е. на величину a кверху от оси времен. Поэтому в результате первого полуколебания от одного экстремального значения до другого система дойдет вниз до наибольшего отклонения x_{02} , причем $|x_{02}| = |x_{01} - 2a|$.

Дальше, для второго полуколебания (при $\dot{x} > 0$) вступает в силу второе уравнение, и, следовательно, это будет полуколебание относительно положения равновесия, сдвинутого на $-a$, т. е. на величину a книзу от оси времен, начинающееся также с экстремального значения. К концу этого полуколебания система достигнет наибольшего отклонения x_{03} (над осью t), причем

$$|x_{03}| = |x_{02} - 2a| = |x_{01} - 4a|.$$

То обстоятельство, что положение равновесия смещается в сторону начального отклонения, как легко видеть, и обуславливает затухание колебаний. Наибольшие отклонения, которых достигает система (экстремумы отклонений), убывают каждый раз по абсолютной величине на $2a$, а наибольшие отклонения в одну сторону (максимумы или минимумы) представляют собой убывающую арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной $4a$. Ясно, что эта прогрессия состоит из конечного числа членов, и движение прекращается по прошествии конечного числа колебаний. Действительно, когда наибольшее отклоне-

ние упадет до величины, меньшей, чем $3a$, например отклонение x_{03} на рис. 113, то следующее движение приведет систему в область, заключенную между прямыми $+a$ и $-a$, в которой система при отсутствии скорости может оставаться в покое в любой точке, так как в этой области $kx < f_0$. Таким образом в рассматриваемом случае наибольшие отклонения убывают не по геометрической прогрессии, как в случае линейного осциллятора (с силой трения, пропорциональной скорости), а по арифметической прогрессии, и движение прекращается через конечный промежуток времени. Термин «логарифмический декремент затухания» в этом случае теряет свой смысл, ибо логарифм отношения двух последовательных отклонений уже не есть постоянная величина.

«Условный период» колебаний системы в том смысле, как мы его определили для затухающего колебания в случае трения пропорционального скорости, т. е. расстояние по оси времени между двумя максимумами или двумя нулевыми значениями, соответствующими движению системы в одну и ту же сторону, для случая постоянного трения не зависит от величины силы трения и совпадает с периодом гармонического осциллятора. При этом, как легко убедиться из рассмотрения рис. 113, расстояние (по оси времени) между максимумом и следующим нулевым значением больше, чем между нулевым значением и следующим максимумом. Эта разница тем более заметна, чем меньше максимум. Такой же «сдвиг» максимальных значений по оси времени «назад» в направлении предшествующих нулевых значений, как мы видели, имеет место и в линейной системе с трением, пропорциональным скорости. Наконец, отметим еще одно различие между системами с линейным и постоянным трением (связь этого различия с только что отмеченным легко проследить). Именно, в случае линейного трения всегда можно, по крайней мере формально, разделять системы на колебательные и аperiodические. В случае же постоянного трения разделение систем на колебательные и аperiodические вообще теряет смысл, ибо всегда, при любом трении, можно выбрать достаточно большое начальное отклонение, так что система совершит ряд колебаний, прежде чем ее движение прекратится. Физический смысл этого свойства систем с постоянным трением выступает особенно ясно при рассмотрении вопроса о балансе энергии в системе.

Если начальное отклонение системы есть x_{01} , а начальная скорость равна нулю, то начальная энергия системы есть только потенциальная энергия V , причем $V_1 = \frac{kx_{01}^2}{2}$. Работа P_1 , затрачиваемая на преодоление силы трения, не зависит от скорости, а зависит только от пути (ибо сила трения постоянна). Очевидно, что за первую половину «условного периода» эта работа составляет:

$$P_1 = (x_{01} + x_{02}) f_0,$$

потенциальная же энергия будет:

$$V_2 = \frac{kx_{02}^2}{2},$$

и, следовательно (так как $V_1 - V_2 = P_1$):

$$\frac{k}{2} (x_{01}^2 - x_{02}^2) = (x_{01} + x_{02}) f_0$$

или

$$x_{01} - x_{02} = \frac{2f_0}{k} = 2a$$

(этот результат мы уже получили раньше из другого рассмотрения). Мы видим, что с увеличением начального отклонения P_1 растет линейно, а V_1 — по квадратичному закону. Следовательно, при достаточно большом начальном отклонении запас энергии в системе будет гораздо больше, чем потери энергии на трение за половину условного периода, и, значит, при достаточно больших начальных отклонениях система первое время всегда будет себя вести, как колебательная.

Посмотрим теперь, как изобразится исследованное нами движение на фазовой плоскости. Для этого положим, как обычно, $\frac{dx}{dt} = y$ и получим два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 (x - a)}{y} \quad \text{при } y < 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 (x + a)}{y} \quad \text{при } y > 0,$$

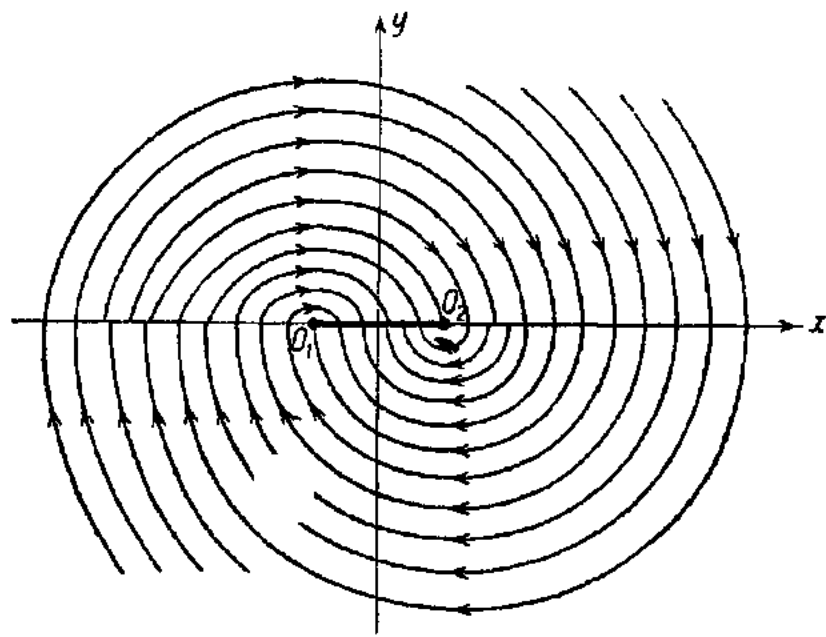
или, интегрируя, находим:

$$\frac{(x - a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y < 0, \quad (189)$$

$$\frac{(x + a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_2^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y > 0, \quad (190)$$

где R_1 и R_2 — константы интегрирования. Уравнения (189) и (190) определяют семейства «полуэллипсов», центры которых смещены соответственно вправо (189) и влево (190) на a . Пользуясь методом «припасования» (см. выше) и учитывая направление движения по фазовой плоскости, нетрудно построить фазовые траектории, как это и сделано на рис. 114. По этому рисунку, представляющему фазовый «портрет» рассматриваемой динамической системы, мы сразу можем судить о характере возможных движений. Все фазовые траектории суть спирали, составленные из полуэллипсов и упирающиеся с обеих сторон в отрезок $O_1 O_2$, который является геометрическим местом состояний равновесия. Таким образом, вообще говоря, наша система совершает колебания

Рис. 114.



рали, составленные из полуэллипсов и упирающиеся с обеих сторон в отрезок $O_1 O_2$, который является геометрическим местом состояний равновесия. Таким образом, вообще говоря, наша система совершает колебания

вокруг положения равновесия с уменьшающимися размахами и останавливается, совершив конечное число этих размахов, зависящее от начальных условий. В частном случае, когда начальные условия соответствуют одной из точек отрезка O_1O_2 , наша система остается в покое. Состоянию покоя, как мы видим, соответствуют не отдельные точки, а целый отрезок прямой O_1O_2 . Но на этом отрезке система обладает все же некоторой своеобразной «неустойчивостью». Действительно, пусть, например, система остановилась в точке $+x_1$, и мы, толкая ее в разные стороны, сообщаем ей одну и ту же величину начальной скорости. Но, толкая ее в одну сторону, мы «закидываем» представляющую точку на $+y_1$, а толкая в другую сторону — на $-y_1$ (рис. 115). Так как верхние полуэллипсы в этом месте имеют большие полуоси, чем нижние, то они идут «круче» к оси абсцисс, чем нижние, и, следовательно, при толчке $-y_1$ система в конечном счете больше прибли-

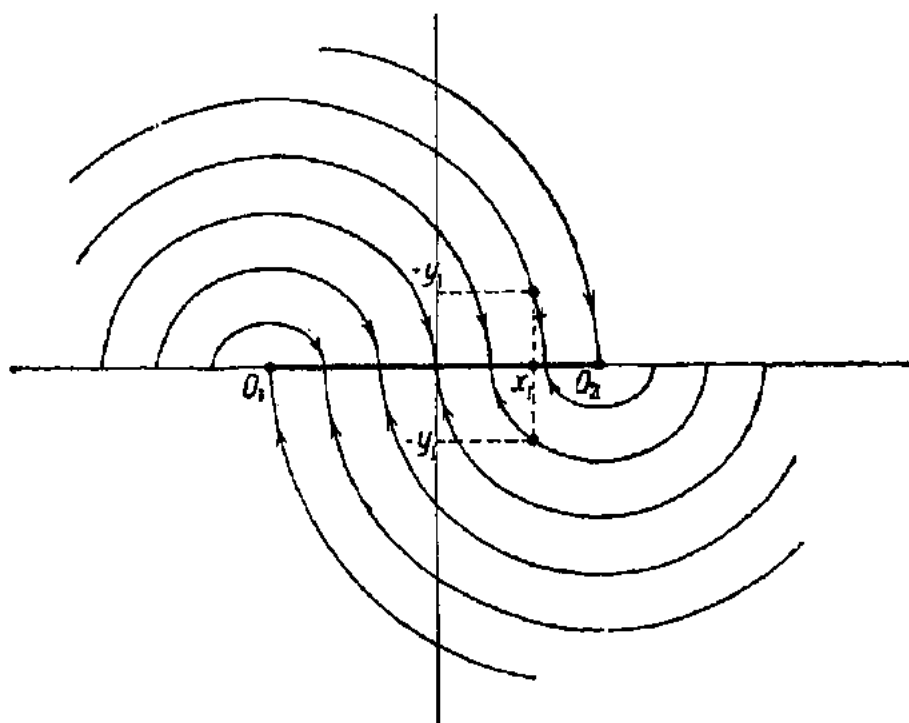


Рис. 115.

зится к «истинному» положению равновесия (к началу координат), чем при толчке $+y_1$ она удалится от этого положения равновесия. Следовательно, если толчки действуют как в ту, так и в другую сторону одинаково часто (например, этого можно достигнуть подвергая систему искусственному систематическому встряхиванию), то в конце концов наша система придет в область, непосредственно прилегающую (размеры этой области сколь угодно малы при достаточно малых толчках) к «истинному» положению равновесия.

Эти явления — наличие целой области положений равновесия (так называемый «застой») и приближение системы к истинному положению равновесия в результате толчков — наблюдаются в большей или меньшей степени во всех измерительных и указательных приборах, в которых подвижная система испытывает сухое трение (например трение в подшипниках). Застой представляет собой, конечно, вредное явление в измерительных приборах, и поэтому в них всегда стремятся

сделать трение в подшипниках и вообще сухое трение возможно малым. Ясно, что «жидкое» трение не может играть такой роли, так как оно влияет только на скорость установления подвижной системы, но не влияет на окончательное ее положение. Поэтому в некоторых системах измерительных и указательных приборов используется весьма остроумный прием, позволяющий «превратить» сухое трение в жидкое. Это так называемая система Брауна, в которой ось сообщается постоянное движение взад и вперед вдоль подшипника. Тогда составляющая силы трения оси о подшипник в направлении вращения пропорциональна скорости вращения (если скорость достаточно мала), и прибор ведет себя как система, обладающая жидким, а не сухим трением.

§ 4. Ламповый генератор в случае Г-характеристики

Прием, которым мы воспользовались в предыдущем параграфе, является, конечно, специфичным для диссипативных систем. Его можно применить в том случае, когда «силы трения» хотя и могут быть аппроксимированы разрывной характеристикой, но не подчиняются условию диссипативности. Мы рассмотрим сейчас при помощи этого же приема — замены нелинейного уравнения несколькими линейными с припасовыванием начальных условий — два примера, для которых не удовлетворяется условие диссипативности. Эти примеры имеют существенное значение; они позволяют нам подойти к теории периодических процессов в нелинейных системах. В качестве первого примера рассмотрим идеализированный ламповый генератор. Предположим, что колебательный контур расположен в цепи анода, а катушка обратной связи включена в цепь сетки (рис. 116). Пренебрегая сеточным током и реакцией анода и применяя обозначения, указанные на рисунке, мы можем, пользуясь законами Кирхгофа, написать дифференциальное уравнение для тока x в ветви контура, содержащей самоиндукцию:

$$L \frac{dx}{dt} + Rx + \frac{1}{C} \int_0^t (x - i_a) dt = 0$$

или

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{x}{C} = \frac{i_a}{C} = \frac{1}{C} f(e_g), \quad (191)$$

где L , R , C имеют обычные значения, а анодный ток $i_a = f(e_g)$, т. е. зависит лишь от напряжения на сетке e_g . Зависимость $i_a = f(e_g)$ — это характеристика лампы, о которой у нас уже шла речь. Мы идеализируем эту характеристику следующим образом: примем, что при $e_g > 0$ анодный ток сразу достигает своего максимального значения I_s , а при $e_g < 0$ анодный ток равен нулю (рис. 117). Нетрудно видеть, что если бы в генераторе происходили синусоидальные колебания, то рассмотрение, связанное с такой идеализированной характеристикой, тем лучше отображало бы положение дела при наличии лампы с обычной характеристикой, чем больше была бы амплитуда напряжения на сетке. Действительно, если амплитуда напряжений на сетке во много раз превосходит напряжение насыщения e_s , то в течение большей части

одного полупериода анодный ток будет отсутствовать (лампа будет заперта), а в течение большей части второго полупериода анодный ток будет равен току насыщения. Но напряжение на сетке $e_g = Mx$; следовательно, амплитуда напряжения на сетке будет тем больше, чем больше амплитуда синусоидального тока в контуре и чем больше коэффициент обратной связи. Как мы увидим дальше, в рассматриваемом случае ток в колебательном контуре будет тем ближе к синусоидальному и его размахи будут тем больше, чем — при прочих равных условиях — меньше затухание контура. Отсюда можно заключить, что наша идеализация характеристики лампы (так называемая Г-характеристика) в случае достаточно малого затухания контура и достаточно сильной обратной связи может привести к результатам, имеющим определенный физический интерес.

Так как $e_g = Mx$ и если мы так выбрали расположение катушек, что $M > 0$, то условие $e_g > 0$ эквивалентно условию $x < 0$, условие $e_g < 0$ эквивалентно условию $x > 0$. Поэтому уравнение для тока в колебательном контуре генератора имеет вид:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} \omega_0^2 I_s & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (192)$$

Как и в предыдущем случае, мы будем рассматривать два движения, подчиняющихся двум различным дифференциальным уравнениям, и будем «припасовывать» начальные условия нового движения к тому конечному состоянию, в которое привело систему предшествующее движение. Мы должны были бы припасовывать напряжение на обкладках конденсатора V и силу тока в ветви с катушкой самоиндукции x , так как мы считаем, что эти величины изменяются всегда непрерывно и, значит, при смене уравнений не должны претерпевать скачка (это именно предположение было нами введено выше в виде так называемых «условий скачка»).

Однако, так как, во-первых, уравнение написано нами для тока $x = C \frac{dv}{dt}$, а не для напряжения на обкладках конденсатора V и, во-вторых, смена уравнений происходит при изменении знака $\frac{dx}{dt}$, т. е. при переходе $\frac{dx}{dt}$ через нуль ¹⁾, то удобнее припасовывать не значения V и x , а значения x и $\frac{dx}{dt}$. Легко убедиться, что в рассматриваемом случае, припасовав значения x и $\frac{dx}{dt}$, мы обеспечим также непрерывность изменений напряжения на конденсаторе V .

¹⁾ В силу наличия сопротивления R в контуре, значения v и x одновременно проходят через нуль, так как когда ЭДС самоиндукции $L \frac{dx}{dt}$ равна нулю, то падение напряжения Rx не равно нулю, а значит, и напряжение на конденсаторе равно этой же величине с обратным знаком.

Действительно, если в схеме, приведенной на рис. 116а, обе величины $L \frac{dx}{dt}$ и Rx изменяются непрерывно, то непрерывно же изменяется и их сумма, равная напряжению на конденсаторе, взятому с обратным знаком. Скачкообразные изменения силы анодного тока i_a вызывают скачкообразные же изменения силы тока только в ветви, содержащей емкость C , но скачки тока в этой ветви дозволены, так как она не содержит самоиндукции. Таким образом в рассматриваемом частном случае, потребовав непрерывности в величинах $x = C \frac{dV}{dt}$ и $\frac{dx}{dt} = C \frac{d^2V}{dt^2}$, мы вместе с тем обеспечили непрерывность изменений величины V . Но само собой разумеется, что в общем случае непрерывность первой и второй производных совершенно не обеспечивает непрерывности самой функции. Так, например, можно указать схему, лишь немного отличную от рассматриваемой, в которой, припасовав

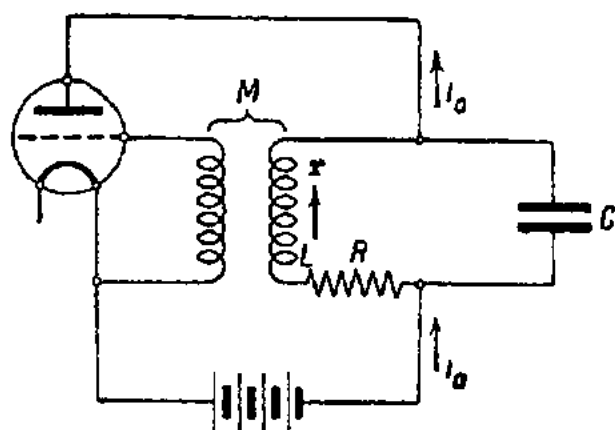


Рис. 116а.

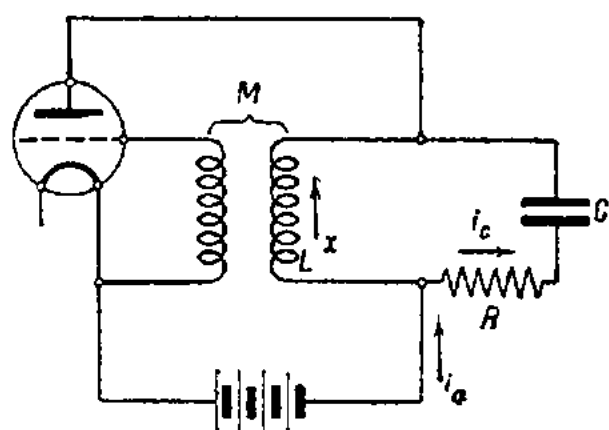


Рис. 116б.

значения x и $\frac{dx}{dt}$, мы не обеспечили бы непрерывности в изменениях напряжения на конденсаторе. Это схема, в которой сопротивление R входит в цепь с емкостью C (рис. 116б).

Действительно, так как величина i_a изменяется скачком, то по крайней мере в одной из ветвей контура сила тока также изменяется скачком. Но мы требуем, чтобы в ветви с самоиндукцией она изменялась непрерывно, и, значит, скачок силы тока должен происходить только в цепи, содержащей емкость и сопротивление. Если мы, кроме того, потребуем, чтобы $\frac{dx}{dt}$, а значит, и ЭДС самоиндукции изменялась непрерывно, то как следствие этого требования мы должны принять, что напряжение на концах всей правой ветви тоже изменяется непрерывно. Но оно ведь равно $Ri_c + V$, и так как i_c изменяется скачком, то V также должно совершать скачки. Значит, потребовав непрерывности в $\frac{dx}{dt}$, мы для этой схемы не обеспечили соблюдения условий скачка.

Чтобы соблюсти условия скачка, нужно непосредственно потребовать непрерывности V и x или, иначе, припасовывать значения V и x ,

а не x и $\frac{dx}{dt}$, причем значение $\frac{dx}{dt}$ будет изменяться скачком (так как если V непрерывно, а Ri_c скачет, то и $L \frac{dx}{dt}$ должно совершать скачки).

Мы ограничимся, однако, рассмотрением только первого более простого случая, определяемого уравнениями (192) и условиями, что x и $\frac{dx}{dt}$ при смене уравнений не совершают скачка.

Каждое из уравнений (192) определяет затухающее «полуколебание» (причем мы уже предположили, что затухание мало). Из этих двух «полуколебаний» только одно происходит относительно смещенного положения равновесия, именно то, для которого $\frac{dx}{dt} > 0$. Положение равновесия для этого «полуколебания» смещается на величину I_s в сторону, противоположную той, в которую смещалось состояние равно-

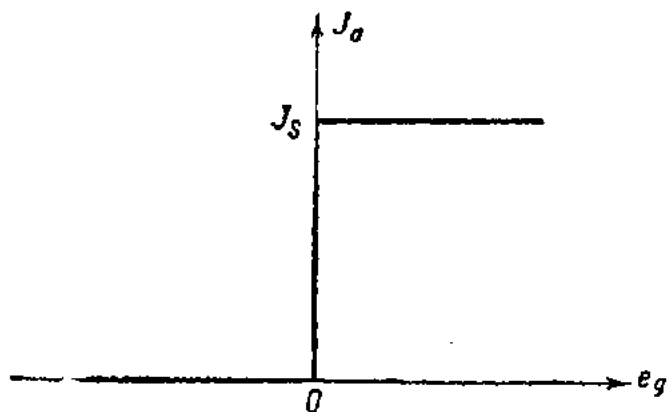


Рис. 117.

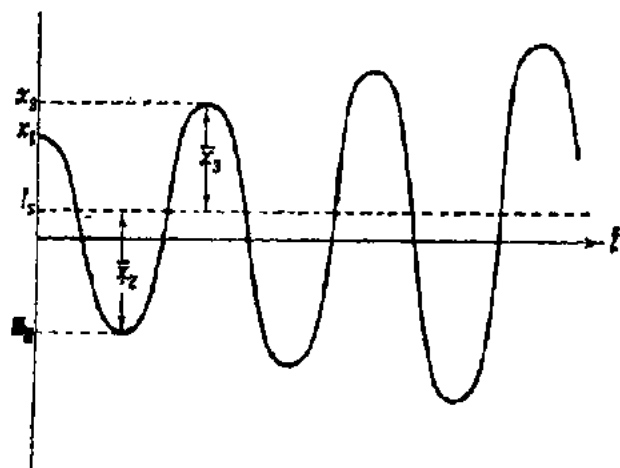


Рис. 118.

весия для соответствующего «полуколебания» в случае твердого трения. Нетрудно сообразить, что это обстоятельство при достаточно малых начальных отклонениях и достаточно малом линейном затухании приводит к последовательному увеличению размахов колебаний, а не к их уменьшению, как было в случае твердого трения. Такое нарастающее колебание, состоящее из двух «затухающих полусинусоид», из которых одна смещена в направлении оси ординат на величину I_s , изображено на рис. 118.

Однако легко убедиться, что это нарастание колебаний не будет продолжаться бесконечно и что в системе установятся незатухающие колебания с некоторой постоянной «амплитудой» ¹⁾. Прежде всего определим то максимальное значение тока в колебательном контуре, при котором прекратится дальнейшее нарастание колебаний. Обозначим какие-то три последовательных экстремума тока чередующихся знаков (два положительных и один отрицательный) соответственно

¹⁾ Мы здесь и в дальнейшем будем говорить об амплитуде в кавычках, понимая под «амплитудой» максимальный размах колебаний, т. е., например в данном случае — максимальное значение тока в колебательном контуре.

через x_1, x_2, x_3 (см. рис. 118). Так как при движении от x_1 до x_2 происходит рассеяние энергии в контуре (в омическом сопротивлении R), то

$$x_2 = x_1 e^{-\frac{\lambda T}{2}},$$

где T — длительность одного «полуколебания».

Далее, когда ток достигает значения x_2 , происходит изменение знака \dot{x} и смещение положения равновесия на величину I_s . Это соответствует увеличению начального отклонения на I_s , после чего снова происходит движение с рассеянием энергии до экстремума \bar{x}_3 (\bar{x} означает отсчет относительно смещенного положения равновесия). Следовательно:

$$\bar{x}_3 = \left(x_1 e^{-\frac{\lambda T}{2}} + I_s \right) e^{-\frac{\lambda T}{2}} = x_1 e^{-\lambda T} + I_s e^{-\frac{\lambda T}{2}}.$$

Так как $x_3 = \bar{x}_3 + I_s$, то отклонение относительно несмещенного положения равновесия выразится так:

$$x_3 = x_1 e^{-\lambda T} + I_s e^{-\frac{\lambda T}{2}} + I_s = x_1 e^{-\lambda T} + I_s \left(e^{-\frac{\lambda T}{2}} + 1 \right). \quad (193)$$

Если колебания установились, то должно быть $x_3 = x_1 = x_0$, и для этого случая мы получим:

$$x_0 = \frac{I_s \left(e^{-\frac{\lambda T}{2}} + 1 \right)}{1 - e^{-\lambda T}} = \frac{I_s}{1 - e^{-\frac{\lambda T}{2}}}. \quad (194)$$

x_0 и есть то наибольшее значение, которого достигает колебательный ток в контуре при установившемся режиме. Незатухающие колебания в контуре должны происходить с «амплитудой» x_0 , которая однозначно определяется током насыщения лампы и параметрами колебательного контура. Мы видим таким образом, что в контуре генератора *могут происходить незатухающие колебания с однозначно определенной и зависящей от свойств самой системы, а не от начальных условий, «амплитудой» x_0* . Однако, для того чтобы утверждать, что эти незатухающие колебания действительно могут происходить и что наши высказывания о наличии периодического режима имели физическое значение, нам следует ответить еще на два вопроса. Во-первых, на вопрос о том, при каких начальных условиях устанавливается найденное нами периодическое решение — в частности установится ли оно, если начальные значения \dot{x} и x будут достаточно малы. Во-вторых, на вопрос о том, *устойчиво* ли найденное периодическое движение по отношению к произвольным малым изменениям начальных условий, например по отношению к изменениям максимального значения силы тока. На оба эти вопроса мы легко сможем ответить, рассматривая графически

(рис. 119) связь между двумя последовательными экстремумами одного знака, т. е. x_1 и x_3 . Можно x_3 рассматривать как функцию x_1 ; вид этой функции определяется выражением (193). Очевидно, эта зависимость изображается прямой линией, образующей с осью абсцисс угол α , причем $\operatorname{tg} \alpha = e^{-hT}$ (так как $e^{-hT} < 1$, то $\alpha < \frac{\pi}{4}$), и отсекающей от оси ординат положительный отрезок $I_s \left(e^{-\frac{hT}{2}} + 1 \right)$. С другой стороны, стационарное значение x_0 должно лежать на прямой, проходящей через начало координат под углом в 45° , так как при стационарных колебаниях $x_3 = x_1$. Следовательно, пересечение этой прямой с прямой, изображающей зависимость x_3 от x_1 , определяет стационарную «амплитуду» x_0 . Начиная с любого наибольшего отклонения (начального значения) x'_1 , мы определяем по диаграмме значе-

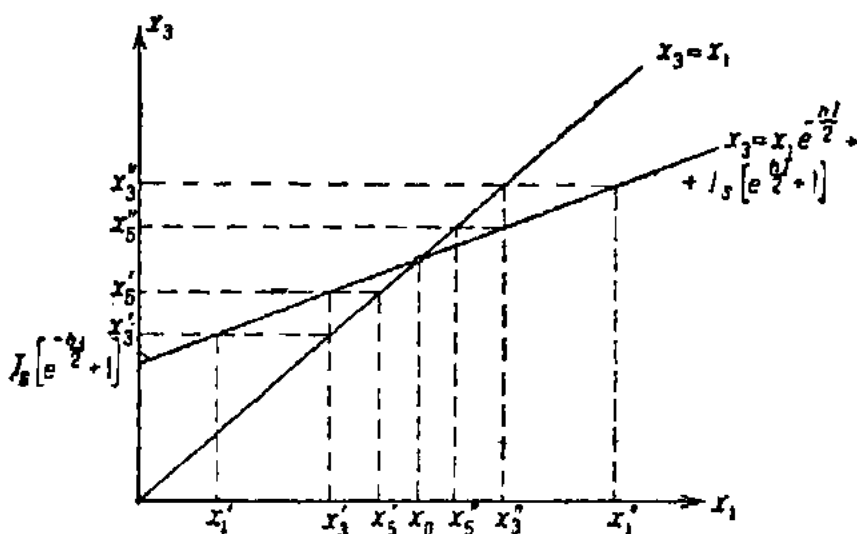


Рис. 119.

ние следующего максимума x'_3 и рассматриваем его как первый максимум, определяя снова графически следующий максимум x'_5 . Из этого построения видно, что, как бы ни были малы колебания вначале, они будут возрастать, пока максимальное значение не достигнет стационарного значения x_0 . Если максимальное отклонение в какой-либо момент больше, чем стационарное значение, например, если оно равно x'_1 , то, производя такое же построение и определяя последовательные значения x''_3, x''_5, x''_7 и т. д., мы убедимся, что в этом случае максимумы уменьшаются (колебания затухают), опять-таки пока они не достигнут стационарного значения. Полученные результаты дают право ответить сразу на оба интересующих нас вопроса. Действительно, во-первых, каковы бы ни были начальные условия, в системе установятся незатухающие колебания, и, во-вторых, эти незатухающие колебания устойчивы¹⁾, так как отклонения (в обе стороны) от стационарного режима затухают. Таким образом мы видим, что в данном случае несмотря на наличие трения в нашей системе уста-

1) Можно легко показать, что рассматриваемое периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Рассуждения в тексте доказывают лишь абсолютную орбитальную

навливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы, причем «амплитуда» этих колебаний определяется свойствами системы, а не начальными условиями. Такие колебания мы будем называть *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания — *автоколебательными системами*¹⁾.

Период этих стационарных колебаний в рассматриваемом случае совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного осциллятора. Но это справедливо только для рассматриваемого частного случая. В дальнейшем мы увидим, что, вообще говоря, период автоколебаний вовсе не совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного контура, входящего в состав автоколебательной системы.

Воспользовавшись тем, что $hT = d$, где d — логарифмический декремент контура, мы можем формулу (194), выражающую амплитуду автоколебаний, привести к следующему виду:

$$x_0 = \frac{I_s}{1 - e^{-d}}.$$

Предположим, о чем уже шла речь, что затухание контура мало, или иначе, что логарифмический декремент контура $d \ll 1$. Тогда, разлагая e^{-d} в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, мы получим следующее приближенное выражение для «амплитуды» автоколебаний: $x_0 = \frac{2I_s}{d}$. Мы видим, что «амплитуда» колебаний тем больше, чем меньше затухание контура.

Энергия, необходимая для поддержания незатухающих колебаний в контуре, доставляется анодной батареей. Легко видеть, что эта компенсирующая потери энергия поступает из анодной батареи не все время, а только в течение полупериода за каждый период, именно того полупериода, в течение которого течет анодный ток. (Рассеяние же энергии в колебательном контуре происходит, конечно, все время, так как контур обладает постоянным сопротивлением R)²⁾. Так как батарея дает ток только в течение полупериода, то средняя мощность, отдаваемая батареей:

$$W_B = \frac{I_s V_B}{2},$$

где V_B — напряжение, даваемое батареей. Так как x как функция времени нам известна, то мы можем подсчитать мощность, развиваемую в колебательном контуре, подставляя в интеграл $\int Ri^2 dt$ выражение для $x = i$ для первой и второй половины периода. Однако, как будет показано ниже, при достаточно малых затуханиях колебания

устойчивость рассматриваемого движения. В дальнейшем мы подробно остановимся на исследовании устойчивости периодических движений в неконсервативных системах.

1) В главе V мы дадим (для случая одной степени свободы) математическое определение понятий автоколебания, автоколебательная система.

2) Конечно, за исключением тех моментов времени, для которых ток в колебательном контуре равен нулю.

в контуре близки к синусоидальным. Ограничиваясь этим случаем, мы можем для подсчета мощности, рассеиваемой в контуре, считать колебания синусоидальными с амплитудой $\frac{2I_s}{d}$. Но в таком случае можно принять с достаточной степенью точности, что переменное напряжение на контуре $V_A = \frac{2I_s}{d} \omega L$, а средняя за период рассеиваемая в контуре мощность

$$W_A = \frac{RI^2}{2} = \frac{R}{2} \frac{4I_s^2}{d^2} = \frac{I_s R V_A}{d \omega L} = \frac{I_s R T V_A}{d 2\pi L} = \frac{I_s V_A}{\pi}$$

и, наконец, КПД генератора

$$\eta = \frac{W_A}{W_B} = \frac{I_s V_A}{\pi} \cdot \frac{2}{I_s V_B} = \frac{2}{\pi} \frac{V_A}{V_B}.$$

Ясно, что переменное напряжение на контуре V_A должно быть меньше анодного напряжения батареи V_B , так как в противном случае в некоторые моменты напряжение на аноде падало бы до нуля и даже становилось отрицательным, а тогда лампа не вела бы себя так, как мы предполагали, и наша идеализация характеристики в таком случае не была бы применима. Следовательно, КПД генератора при сделанных нами предположениях не может превышать $\frac{2}{\pi}$, т. е. 64% ¹⁾. Остальная часть мощности, отдаваемой батареей, как легко сообразить, рассеивается на аноде лампы в виде тепла.

Если бы мы рассматривали ту же ламповую схему, но с «перевернутой» обратной связью, т. е. при $M < 0$, то мы получили бы результат, сходный с полученным в предыдущем параграфе. Действие лампы при Г-характеристике было бы эквивалентно некоторому кулоновскому трению в соответствующей механической задаче. Конечно, автоколебания в этом случае были бы невозможны, а характер затухания собственных колебаний в контуре был бы лампой существенно изменен.

Исследуем теперь фазовую плоскость лампового генератора с Г-характеристикой. Нетрудно видеть, что фазовые траектории в нижней полуплоскости совпадают с фазовыми траекториями (спиралями) затухающего линейного осциллятора (гл. I, § 4). В верхней — с такими же траекториями, но для случая осциллятора со смещенным на $a = I$ положением равновесия. Так как мы знаем направление движения изображающей точки на фазовой плоскости, то, пользуясь соотношением (193), можно исследовать картину, имеющую место на фазовой плоскости. Для этой цели введем две различные системы полярных координат: одну для верхней полуплоскости ($x = a - r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), другую для нижней полуплоскости ($x = r \cos \varphi$, $y = -r \sin \varphi$) с таким направлением возрастания углов, которое соответствует движению изображающей точки на фазовой плоскости (как мы уже это делали в гл. I, § 4).

¹⁾ КПД генератора может быть выше 64% , если рабочая точка на характеристике смещена влево, т. е. если анодный ток появляется не при нулевом, а при каком-то положительном напряжении на сетке.

Начнем исследование движения изображающей точки на фазовой плоскости, причем будем нумеровать те точки, в которых соответствующая фазовая траектория пересекает ось x . Пусть, например,

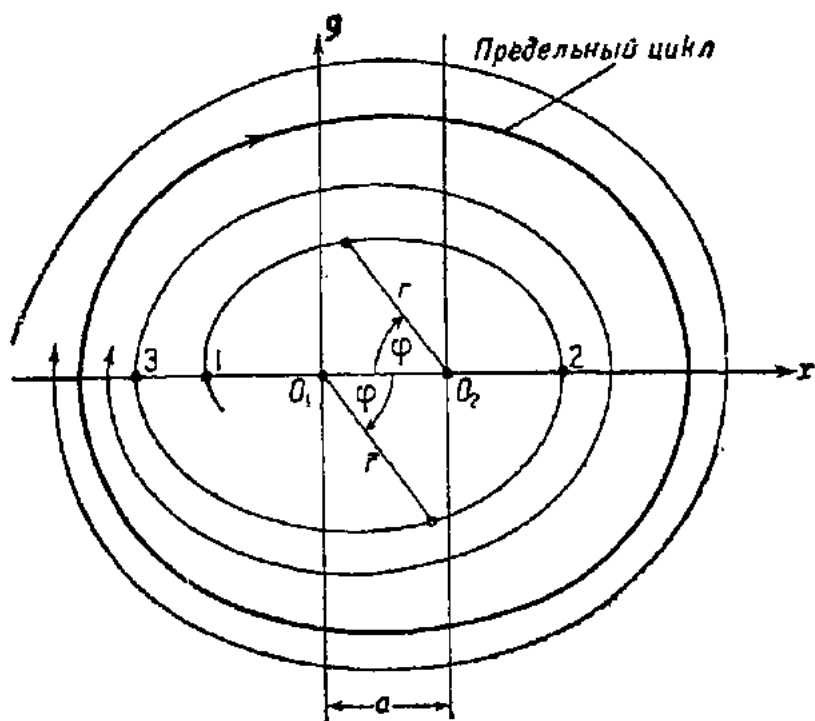


Рис. 120.

первая из этих точек лежит на отрицательной части оси x (точка 1 на рис. 120), и пусть ее координаты будут $r = r_1$, $\varphi = 0$.

После пересечения изображающая точка будет двигаться в верхней полуплоскости, причем, совершив полуоборот, придет в точку 2 с координатами $r = r_2$, $\varphi = \pi$; но мы знаем, что $r_2 = r_1 e^{-\frac{\pi h}{\omega}}$. Придя в точку 2, в дальнейшем наша изображающая точка переходит на нижнюю полуплоскость, для которой нами введена другая система полярных координат; совершив полуоборот в нижней полуплоскости, изображающая точка пересечет ось x в точке 3, причем, очевидно,

$$r_3 = \bar{r}_3 e^{-\frac{\pi h}{\omega}};$$

так как $r_2 = \bar{r}_2 - a$, $r_3 = \bar{r}_3 + a$, то

$$\bar{r}_3 = a e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + r_1 e^{-\frac{2\pi h}{\omega}},$$

$$r_3 = a + a e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + r_1 e^{-\frac{2\pi h}{\omega}}.$$

Следя далее за представляющей точкой полуоборот за полуоборотом, найдем, что

$$\left. \begin{aligned} r_k &= a \left\{ 1 + e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi h}{\omega}} + \dots + e^{-(k-2)\frac{\pi h}{\omega}} \right\} + r_1 e^{-(k-1)\frac{\pi h}{\omega}}, \\ \bar{r}_k &= a \left\{ e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi h}{\omega}} + \dots + e^{-(k-2)\frac{\pi h}{\omega}} \right\} + r_1 e^{-(k-1)\frac{\pi h}{\omega}}, \end{aligned} \right\} (195)$$

$$\left. \begin{aligned} r_s &= a \left\{ e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi h}{\omega}} + \dots + e^{-(s-2)\frac{\pi h}{\omega}} \right\} + r_1 e^{-(s-1)\frac{\pi h}{\omega}}, \\ \bar{r}_s &= a \left\{ 1 + e^{-\frac{\pi h}{\omega}} + \dots + e^{-(s-2)\frac{\pi h}{\omega}} \right\} + r_1 e^{-(s-1)\frac{\pi h}{\omega}}, \end{aligned} \right\} (196)$$

причем $k = 1, 3, \dots$ (нечетные) и $s = 2, 4, \dots$ (четные).

Нетрудно убедиться, что при увеличении числа оборотов (т. е. при увеличении k и s) движение изображающей точки все более и более приближается к движению по замкнутой кривой, которая получится, если мы в этих формулах перейдем к пределу, считая, что $k \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \rho_I = \frac{a}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}}; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{r}_s = \bar{\rho}_{II} = \frac{a}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}}. \quad (197)$$

Предельная кривая (рис. 121) состоит из двух совершенно одинаковых полуоборотов спирали, смещенных как раз так, чтобы получилась замкнутая кривая. Эта изолированная замкнутая кривая и соответствует единственному возможному периодическому процессу в системе, причем амплитуда этого процесса не зависит от начальных условий и целиком определяется свойствами самой системы.

Исследуем более подробно характер того периодического процесса, который, как мы обнаружили, может протекать в ламповом генераторе. С этой целью найдем разложения функции, изображающей зависимость силы тока от времени для этого периодического процесса, в ряд Фурье. В частности, это разложение даст нам возможность показать (о чем у нас уже шла речь), что при достаточно малом затухании рассматриваемый периодический процесс будет как угодно близок к синусоидальному.

Функция, изображающая этот периодический процесс с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (рис. 122), может быть записана следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \frac{1}{e^{-\frac{\pi h}{\omega}} - 1} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} + a \quad \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ x &= a \frac{e^{\frac{\pi h}{\omega}}}{e^{-\frac{\pi h}{\omega}} - 1} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} \quad \text{при } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{h}{\omega}; \quad a = I_s.$$

Здесь константы интегрирования выбраны так, чтобы получалось найденное периодическое решение, т. е. чтобы: 1) соблюдалось условие

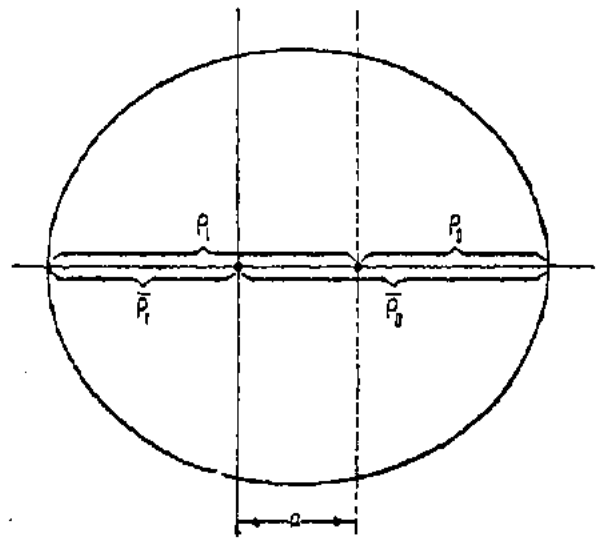


Рис. 121.

периодичности $x(0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = x_1 = -(\rho_1 - a) = -\bar{\rho}_1$, $\dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$, причем для $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ было $\dot{x} > 0$ и для $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$ было бы $\dot{x} < 0$. Воспользовавшись выражениями (198), можно найти по известным формулам разложение $x(t)$ в ряд Фурье. Однако это разложение может быть найдено в рассматриваемом случае совершенно иным путем, не зная наперед аналитического выражения $x(t)$. Мы используем этот второй путь, который, допуская простую физическую интерпретацию, приводит к менее громоздким выкладкам. Именно мы можем рассуждать следующим образом. Исследуя поведение изображающей точки на фазовой плоскости, мы убедились, что в течение промежутка времени от 0 до $\frac{\pi}{\omega}$ [$x(0) < 0$, $\dot{x}(0) = 0$] величина $\dot{x} > 0$, а в промежутке от $\frac{\pi}{\omega}$ до $\frac{2\pi}{\omega}$ величина $\dot{x} < 0$ и т. д.

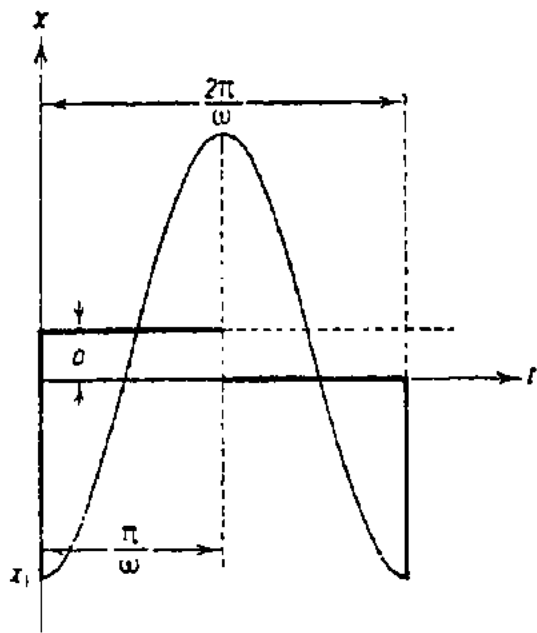


Рис. 122.

Это справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося процесса. Но если это так, то мы можем утверждать, что функция $i_a = f(e_g)$ в уравнении (191) есть периодическая функция времени с периодом T . Вид этой функции для рассматриваемого нами случая Γ -характеристики таков, что нашим утверждением однозначно определяется значение функции $i_a = F(t)$ в любой момент времени. Именно, $i_a = f(e_g)$

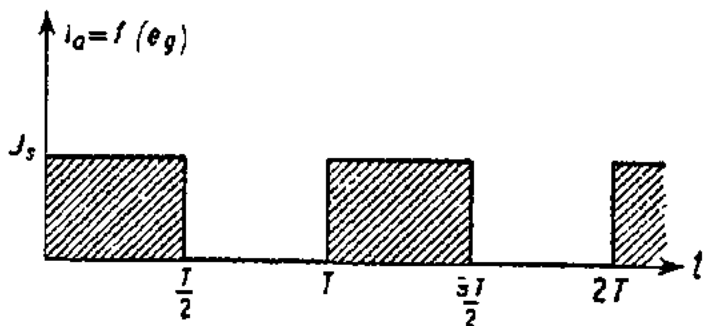


Рис. 123.

представляет собой «ступенчатую» функцию (рис. 123), причем в течение одного полупериода, когда $e_g > 0$, $f(e_g) = I_s = a$, а в течение другого полупериода, когда $e_g < 0$, $f(e_g) = 0$. Другими словами, хотя i_a и является функцией e_g , т. е. в конечном счете функцией силы тока в колебательном контуре, но он зависит от нее только в том смысле, что период функции $F(t)$ определяется свойствами системы, а форма или иначе амплитуды членов ряда Фурье, представляющего эту периодическую функцию, не зависит от характера движений в системе. Мы можем поэтому рассматривать функцию $f_1(x) = f(M\dot{x}) = f(e_g)$ в уравнении

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f_1(\dot{x}) \tag{199}$$

не как функцию \dot{x} , а как некую действующую на линейный колебательный контур периодическую, заданную как функцию времени «внешнюю силу» $F(t)$, частота которой, однако, не является произвольной, а совпадает с «условной частотой» затухающих колебаний в системе, т. е. с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + h^2}$. Свойства системы таковы, что она приспособливает «внешнюю силу» к своему периоду, как бы «рубит» эту силу на части, совпадающие с периодом системы. Таким образом задача сводится к исследованию действия внешней силы на колебательную систему. В рассматриваемом случае мы можем, следовательно, амплитуды основного тока и обертонов изучаемого периодического процесса определять так же, как в задаче о вынужденных колебаниях, если вынуждающая «внешняя сила» $F(t)$ задана таким образом:

$$F(t) = a \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega},$$

$$F(t) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}.$$

Разлагаем эту функцию в ряд Фурье:

$$F(t) = a \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\omega t \right\}. \quad (200)$$

Так как здесь мы имеем дело с линейной задачей, для которой соблюдается принцип суперпозиции, то полное решение для «вынужденных» колебаний мы можем искать как сумму «вынужденных» решений, обусловленных отдельными членами ряда (200), т. е. искать «вынужденное» периодическое решение в виде:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t). \quad (201)$$

В таком случае:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^{\infty} (-a_s s\omega \sin s\omega t + b_s s\omega \cos s\omega t), \\ \ddot{x} &= \sum_1^{\infty} (-a_s s^2 \omega^2 \cos s\omega t - b_s s^2 \omega^2 \sin s\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Подставляя значения x , \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (199) и приравнявая нулю коэффициенты при косинусах и синусах, найдем, что все коэффициенты Фурье с четными номерами равны нулю, а коэффициенты Фурье с нечетными номерами определяются уравнениями:

$$-\omega^2 s^2 a_s + 2h\omega s b_s + \omega^2 a_s = 0,$$

$$-\omega^2 s^2 b_s - 2h\omega s a_s + \omega_0^2 b_s = \frac{2\omega_0^2 a}{\pi} \frac{1}{2k+1},$$

где

$$s = 2k + 1. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Решая эти уравнения, находим интересующие нас выражения для нечетных коэффициентов Фурье:

$$a_{2k+1} = -\frac{2\omega_0^2 a}{\pi(2k+1)} \frac{2h\omega(2k+1)}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2},$$

$$b_{2k+1} = \frac{2\omega_0^2 a}{\pi(2k+1)} \frac{\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2},$$

и для квадратов амплитуд соответствующих обертонов

$$K_{2k+1}^2 = a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2 = \left[\frac{2a\omega_0^2}{\pi(2k+1)} \right] \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}. \quad (202a)$$

Мерой несинусоидальности периодической функции $x(t)$, характеризующей относительную величину отклонений ее осциллограммы от синусоиды, является так называемый *кларфактор* χ^2)

$$\chi^2 = \frac{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} (a_s^2 + b_s^2)}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Оценим для нашего случая кларфактор χ^2), предполагая, что h достаточно мало.

Формулы (202a) представляют собой применение обычной теории линейного резонанса к рассматриваемому случаю. Основной «резонансный» тон внешней силы порождает основной тон $x(t)$, причем квадрат амплитуды этого тона $a_1^2 + b_1^2$, как нетрудно убедиться, неограниченно растет при $h \rightarrow 0$. Остальные члены разложения внешней силы имеют частоты, далекие от резонанса и поэтому они порождают движение, для которого интересующая нас сумма квадратов коэффициентов ряда Фурье при $h \rightarrow 0$ стремится к конечному положительному пределу (этот предел соответствует случаю действия нерезонансных членов на гармонический осциллятор без трения).

Отсюда ясно, что при достаточно малом h периодическое движение в генераторе с Γ -характеристикой имеет сколь угодно малый кларфактор или, иначе говоря, что в этом случае автоколебания сколь

1) Обычно кларфактор определяют иначе, опуская в верхней сумме первый член

$$\chi^2 = \frac{\sum_{s=2}^{\infty} (a_s^2 + b_s^2)}{a_1^2 + b_1^2},$$

так как $\chi_1 < \chi_2$, то при достаточно малом h и χ_1 сколь угодно мало.

2) Следует заметить, что в рассматриваемом случае можно найти точное выражение для кларфактора в конечном виде.

угодно близки к синусоидальным в смысле относительного отклонения осциллограммы от синусоиды.

Мы пользовались в вышеприведенных рассуждениях представлениями обычной теории резонанса.

Известно, что благодаря явлению резонанса сильно несинусоидальная внешняя сила при наличии линейного затухания может поддерживать в гармоническом осцилляторе колебания, весьма близкие (в смысле близости периода и малости клирфактора) к одному из его собственных (и следовательно, синусоидальных) колебаний. Мы можем поэтому сказать, что в задаче о генераторе с Γ -характеристикой при достаточно малом h мы имеем дело с *авторезонансом*, т. е. с резонансом под действием силы, порождаемой движением самой системы ¹⁾.

Заметим, что в данном частном случае благодаря особым свойствам характеристики мы смогли бы, исходя из теории вынужденных колебаний, решить задачу не только об установившемся режиме, но и о процессе установления автоколебаний при любых начальных условиях.

§ 5. Теория часов

Часы представляют собой, как известно, такую колебательную систему, которая способна совершать колебания со стационарной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Правда, для того чтобы часы пошли, т. е. чтобы эта стационарная амплитуда установилась, обычно нужен некоторый достаточно большой начальный толчок, но амплитуда установившихся колебаний сама по себе не зависит от величины начального толчка. Если начальный толчок слишком мал, то периодический процесс вообще не установится — колебания затухнут. Эта область начальных значений, из которой система стремится к состоянию равновесия, а не к состоянию периодического движения, в разных часах может быть разной величины и зависит от устройства часов, но как правило существует во всяких часах. Эти характерные черты часового механизма мы и попытаемся объяснить, рассматривая возможно более простую, идеализированную модель часов.

Всякий часовой механизм грубо может быть разделен на три основных части: 1) колебательная система — например маятник, балансир, горизонтальный маятник и т. д., 2) заводной механизм — гиря, пружина и, наконец, 3) спусковой механизм, связывающий колебательное устройство с заводным механизмом. Эта связь заключается в следующем: при определенных положениях колебательной системы (в дальнейшем мы будем для краткости говорить о маятнике) приходит в действие спусковой механизм, за счет энергии заводного механизма сообщаящий маятнику некоторый импульс. Длительность этого импульса в различных часах бывает различна, но в хороших часовых механизмах импульс бывает весьма кратковременным. Действует спусковой механизм обычно два раза за период и притом вблизи положения равновесия колебательной системы, т. е. в той области, где скорость сис-

¹⁾ В дальнейшем изложении мы еще вернемся к теории авторезонанса.

темы наибольшая. Таково в общих чертах устройство всякого часового механизма. Для нас в устройстве часов наиболее существенно то, что момент, когда начинает действовать спусковой механизм, целиком определяется положением колебательной системы (например спусковой механизм приходит в действие каждый раз, когда маятник проходит через положение равновесия). Кроме того, характер воздействия и величина импульса также зависят от состояния маятника. Следовательно, всякие силы, которые могут возникнуть в механизме, зависят только от положений и скоростей отдельных частей системы, но не зависят явно от времени. Таким образом часы — это автономная система.

Для теоретического рассмотрения описанный механизм оказывается довольно сложным, и мы поэтому для облегчения задачи введем следующие упрощающие предположения об устройстве часов. Во-первых, мы будем считать, что спусковой механизм действует только раз, а не два раза за период, и, во-вторых, будем считать, что импульс, сообщаемый колебательной системе, является мгновенным, т. е. что колебательная система в момент прохождения системы через положение равновесия испытывает со стороны спускового механизма мгновенные удары, и эти удары вызывают мгновенные же изменения скорости колебательной системы, причем эти изменения происходят в момент, когда скорость системы наибольшая. Что касается закона изменения скорости при ударе, то тут уместны два наиболее простых предположения. Во-первых, можно предположить, что при ударе скорость системы всегда увеличивается на одну и ту же величину, независимо от скорости системы до удара. Пусть, например, скорость до удара v_0 и после удара v_1 . Тогда наше предположение сводится к тому, что $v_1 - v_0 = \text{const.}$ или что $mv_1 - mv_0 = \text{const.}$; наше предположение сводится таким образом к предположению о постоянстве количества движения, сообщаемого спусковым механизмом колебательной системе. Другое простое предположение сводится к тому, что кинетическая энергия системы при ударе изменяется на одну и ту же величину независимо от скорости системы до удара. Это предположение сводится к тому, что $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const.}$ Наши предположения, конечно, не исчерпывают всех возможных типов удара и являются лишь простейшими допущениями. Однако, присматриваясь к устройству часового механизма, можно подметить некоторые обстоятельства, говорящие в пользу второго допущения. Именно в случае гиревого заводного механизма гиря при каждом ударе часов опускается на одно и то же расстояние, т. е. совершает одну и ту же работу. Поэтому вполне естественно второе предположение, что колебательная система получает одно и то же количество энергии¹⁾. В случае же первого предположения, так как энергия, сообщаемая механизму, существенно зависит от скорости системы, мы должны были бы сделать довольно искусственное допущение, что потери энергии в спусковом механизме изменяются в широ-

¹⁾ Это второе предположение и делается обычно в теории часов. См., например J. Andradé, *Horlogerie et chronometrie*, Paris 1924.

вих пределах, причем чем меньше скорость системы, тем больше потери энергии в спусковом механизме (так как чем меньше скорость системы до толчка, тем меньшую энергию она получает при толчке в случае первого предположения). Но все же первое предположение ($mv_1 - mv_0 = \text{const.}$) хотя и кажется в силу этих соображений менее естественным, но отнюдь не является невозможным, поэтому мы рассмотрим оба эти предположения, причем, как мы убедимся, они приводят в некоторых случаях к существенно различным результатам.

Помимо предположения о характере удара мы должны сделать известные предположения о характере силы трения в часовом механизме. Здесь мы также ограничимся двумя простейшими предположениями, которые мы уже применяли в других случаях. Во-первых, мы предположим, что сила трения пропорциональна скорости («линейное трение») и, во-вторых, что сила трения не зависит от скорости («постоянное трение»). Эти предположения также приведут нас к существенно различным результатам.

1. Часы в случае линейного трения. Мы начнем рассмотрение со случая «линейного трения» и удара с постоянным количеством движения. Этот случай может быть исследован методом, аналогичным методу, примененному для рассмотрения лампового генератора с Γ -характеристикой. Действительно, если логарифмический декремент затухания системы d (затухание мы считаем малым), а приращение скорости, которое получает система при ударе, есть a , то при начальной скорости y_1 (мы считаем начальным моментом момент, непосредственно следующий за ударом) скорость через период будет:

$$\left. \begin{array}{l} \text{непосредственно до удара: } y_2 = y_1 e^{-d}, \\ \text{» после удара: } y_2 = y_1 e^{-d} + a. \end{array} \right\} \quad (203)$$

Для того чтобы процесс был периодическим, нужно, чтобы $y_2 = y_1 = y_0$, где y_0 — стационарная амплитуда.

Следовательно,

$$y_0 = \frac{a}{1 - e^{-d}}.$$

Стационарная амплитуда имеет всегда конечную величину, и a оказывается по сравнению с этой амплитудой тем меньше, чем меньше d . Рассуждениями, аналогичными тем, которые были приведены для лампового генератора, можно показать, что эта стационарная амплитуда устойчива и что при малом y_1 колебания будут нарастать.

В этом можно убедиться и непосредственно из выражения (203), связывающего две последующих амплитуды; действительно, при сколь угодно малом y_1 последующая амплитуда y_2 непременно будет больше y_1 .

Следовательно, рассматриваемая нами модель часов обладает свойством самовозбуждения: колебания в ней нарастают при сколь угодно малых начальных отклонениях. Картина на фазовой плоскости для этого

случай изображена на рис. 124. Фазовая плоскость заполнена кусками спиралей, начинающихся и кончающихся на верхней полуоси y ¹⁾. Дойдя по спирали до верхней полуоси y , представляющая точка делает скачок каждый раз на одну и ту же величину a кверху по оси y и снова продолжает движение по соответствующей спирали. Из соображений непрерывности ясно, что благодаря скачку путь представляющей точки по

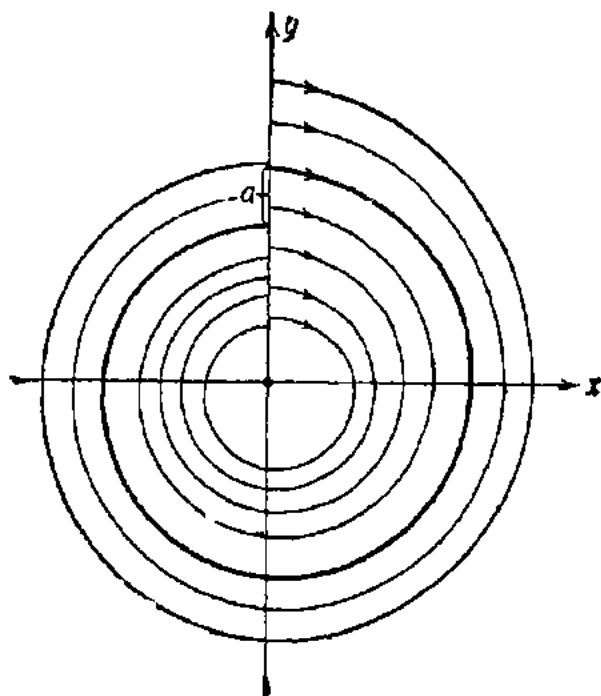


Рис. 124.

одной из спиралей окажется замкнутым, что и соответствует периодическому движению.

Таким образом при сделанных предположениях мы получаем нужные нам свойства часового механизма в смысле наличия периодического процесса с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Но наш идеализированный механизм обладает способностью самовозбуждения; при сколь угодно малом начальном толчке в конце концов часы будут совершать незатухающие колебания. Между тем в реальных часах всегда нужен некоторый начальный толчок конечной величины, для того чтобы часы пошли. Значит, наши предположения не дают возможности объяснить одно из наиболее типич-

ных свойств часового механизма. К тому же результату мы придем, сохраняя предположение о линеинном трении и переходя к другому закону удара, именно, полагая, что

$$y_3^2 - y_2^2 = h^2 = \text{const.}$$

В таком случае скорость будет:

$$\text{непосредственно до удара: } y_2 = y_1 e^{-a},$$

$$\text{» после удара: } y_3 = \sqrt{y_2^2 + h^2} = \sqrt{y_1^2 e^{-2a} + h^2}.$$

Стационарная амплитуда \bar{y} определяется из условия:

$$y_3 = y_1 = \bar{y} \text{ и } \bar{y}^2 (1 - e^{-2a}) = h^2 \text{ или } \bar{y} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-2a}}}.$$

И в этом случае также, как легко видеть, будет иметь место самовозбуждение.

Картина на фазовой плоскости изменится по сравнению с картиной для предыдущего случая только в том смысле, что скачки a вдоль

¹⁾ Мы предположили, что толчок происходит раз в период и при наибольшей скорости; для определенности будем считать, что толчок происходит при наибольшей положительной скорости.

оси y будут уже не постоянны по величине, а будут функцией y_2 (т. е. скорости, которая предшествует удару):

$$a = \sqrt{y_2^2 - h^2} - y_2.$$

Значит, при возрастании предшествующей скорости скачки скорости будут убывать. Так как шаг спирали, т. е. разница между двумя последовательными значениями y , соответствующими значению $x=0$, наоборот, возрастает при возрастании y , то опять-таки из соображений непрерывности ясно, что должна существовать такая спираль, движение которой будет замкнутым. Наша модель снова объясняет наличие периодического процесса в однозначно определенной амплитудой, но не объясняет необходимости начального толчка конечной величины.

Чтобы объяснить это свойство часов, нужно, как мы увидим, отказаться от предположения о линейном трении и принять, что часы представляют собой колебательную систему с постоянным трением, не зависящим от скорости.

2. Часы в случае постоянного трения. Мы уже рассмотрели линейный осциллятор при наличии постоянного трения. При надлежащем выборе единиц уравнение движения такого осциллятора имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + x &= -f_0 & \text{при } \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x &= +f_0 & \text{при } \dot{x} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

где f_0 — постоянная сила трения, отнесенная к единице массы. На фазовой плоскости, как мы уже видели, фазовые траектории будут спиралями, составленными из кусков полуэллипсов или в нашем случае (в силу выбора единиц) из кусков полуовружностей. Для простоты рассмотрения мы несколько «перенесем» место удара и будем считать, что удар происходит в момент, когда система проходит через точку $x=f_0$, а не через точку $x=0$. Рассмотрим сначала первое предположение относительно закона удара, именно положим, что

$$mv_1 - mv_0 = \text{const.} \quad (205)$$

или, пользуясь обозначениями фазовой плоскости:

$$y_1 - y_0 = a. \quad (206)$$

Чтобы ответить на вопрос о характере возможных движений в этом случае, мы сразу рассмотрим характер траекторий на фазовой плоскости. Пусть, например, изображающая точка начала двигаться из положения A (координаты $x_0, 0$). Как мы только что отмечали, она двигается по кругу с центром в точке $(-f_0, 0)$, радиус которого равен $R_0 = x_0 - f_0$ (рис. 125). В точке $(-f_0, R_0)$ на нее действует удар, величина которого определяется соотношением (206). Изображающая точка переходит на другой круг радиуса $R_1 = x_0 - f_0 + a$, имеющий тот же самый центр. Дойдя опять до оси x , наша изображающая точка будет иметь

абсциссу $x_1 = R_1 - f_0 = x_0 - 2f_0 + a$. Движение по нижней полуплоскости совершается без ударов; фазовая точка двигается по полуокружности с центром в точке $(0, +f_0)$ и с радиусом $R_2 = x_1 - f_0 = x_0 - 3f_0 + a$ и приходит к оси y в точку ϵ , имеющую координаты $(-x_2, 0)$, где $x_2 = x_0 - 4f_0 + a$.

Повторяя аналогичные рассуждения, найдем, что

$$x_2 = x_0 + a - 4f_0,$$

$$x_4 = x_2 + a - 4f_0 = x_0 + 2a - 8f_0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{2n} = x_{2n-2} + a - 4f_0 = x_0 + n(a - 4f_0).$$

Легко видеть, что характер возможных движений в нашей системе зависит от знака $a - 4f_0$.

Случай I. $a - 4f_0 < 0$.

В этом случае (рис. 126), каковы бы ни были начальные условия, колебания системы будут затухать, и изображающая точка после конечного числа размахов дойдет до отрезка состояний равновесия, простирающегося на f_0 в обе стороны от начала координат.

Случай II. $a - 4f_0 > 0$.

В этом случае фазовая плоскость может быть разбита на две области с различными характерами возможных движений. Именно, если в начальный момент представляющая точка находится внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 127), то система в конечном время дойдет до отрезка состояний равновесия; колебания системы прекратятся. Если же начальные условия соответствуют точкам, лежащим вне этой области или на границе, колебания системы будут неограниченно нарастать.

Случай III. $a - 4f_0 = 0$.

В этом идеальном случае полного равенства фазовая плоскость также может быть разбита на две части с различным характером возможных движений. Если начальные условия лежат внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 128), то изображающая точка придет, еще не успев сделать полного оборота, к отрезку состояний равновесия. Если же начальные значения лежат вне этой области, то все движения суть

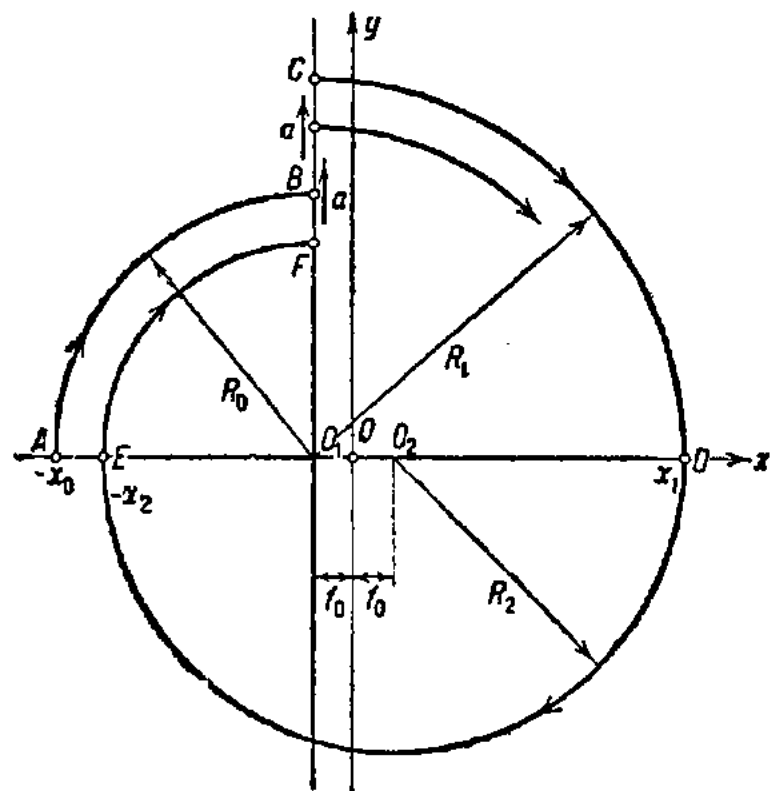


Рис. 125.

сти или на границе, колебания системы будут неограниченно нарастать.

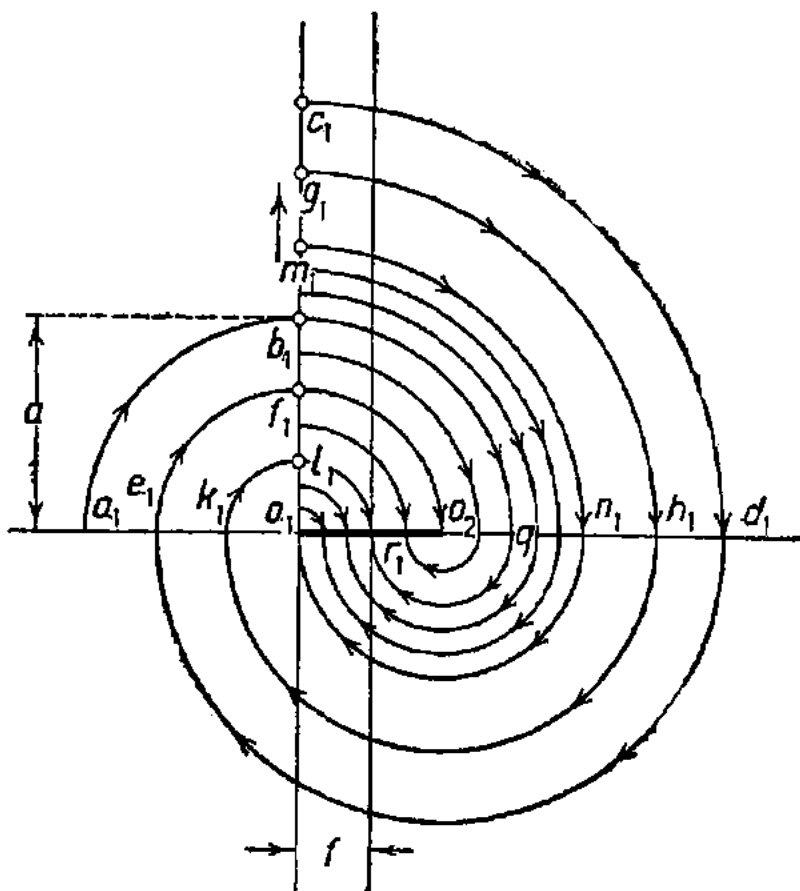


Рис. 126.

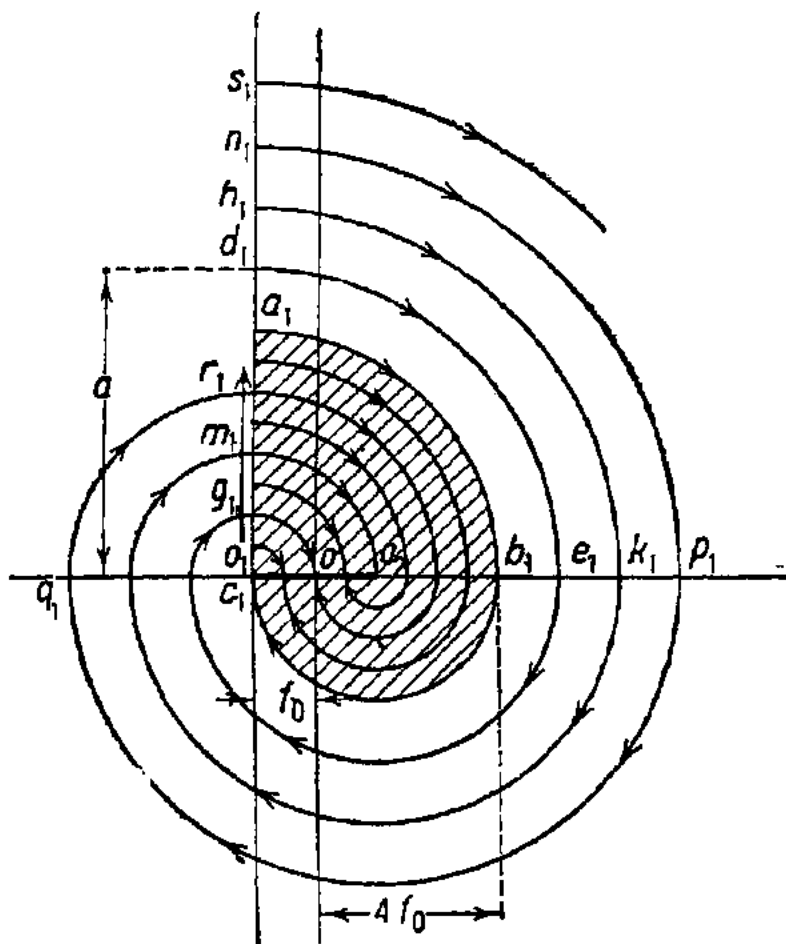


Рис. 127.

периодические, с амплитудой, которая определяется начальными условиями.

В этом последнем случае мы имеем дело с континуумом периодических движений, т. е. с обстоятельством, характерным для консервативной системы. Но как и всякая консервативная система, наша система неустойчива по отношению к малым изменениям параметров. Достаточно, например, немного изменить величину f_0 , чтобы перейти к случаю I

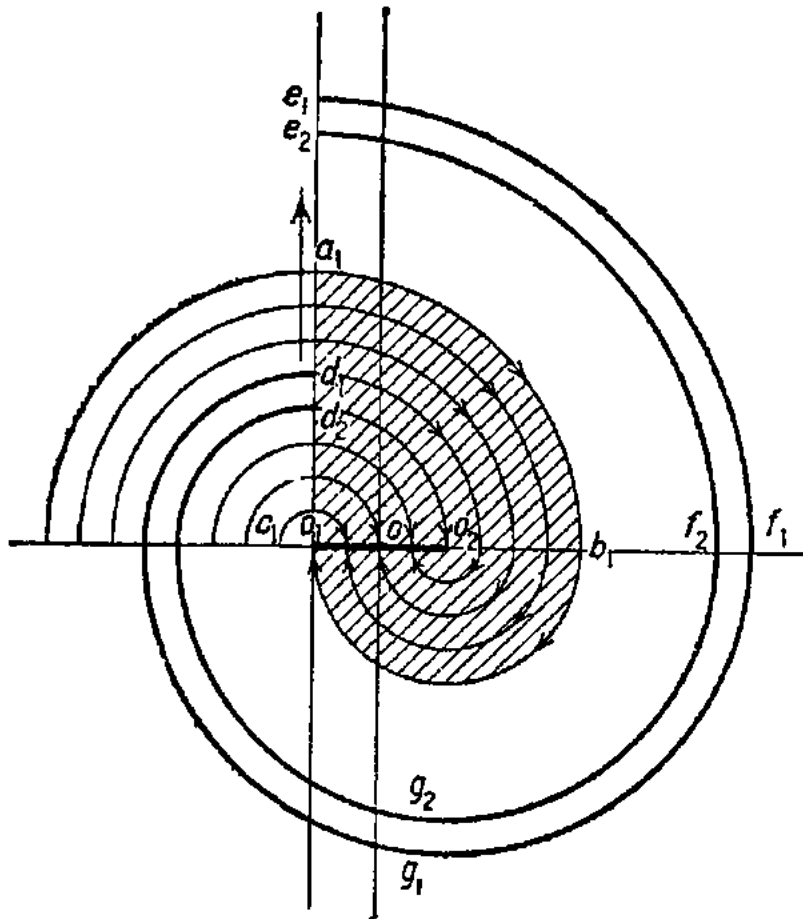


Рис. 128.

или II, т. е. к существенно иной картине.

Мы видим таким образом, что принятая нами на этот раз идеализация закона трения и закона удара не отображает наиболее существенной черты реальных часов, именно того, что в часах возможны периодические движения только с вполне определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Достаточно, однако, изменить допущение о характере ударов, сохранив предположение о характере сил трения, чтобы снова получить систему, способную совершать периодическое движение только с одной, вполне определенной амплитудой.

Примем снова, что при ударе спусковой механизм сообщает системе одну и ту же кинетическую энергию, т. е. положим, что

$$\frac{mv_1}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const.} \quad (207)$$

или

$$y_1^2 - y_0^2 = h^2, \quad (208)$$

где h — константа, величина которой определяется устройством спускового механизма.

В этом случае величина «скачка» на фазовой плоскости снова не будет постоянна, а будет зависеть от скорости движения нашей системы в момент, непосредственно предшествующий удару. Именно, как следует из выражения (208): $a = \sqrt{y_0^2 + h^2} - y_0$, величина «скачка» убывает в зависимости от скорости по гиперболическому закону (рис. 129). Рассмотрим движение изображающей точки по фазовой плоскости при такой гипотезе ударов, сохранив старые наши предположения как

о характере трения, так и о месте ударов (рис. 130). Пусть наша изображающая точка начинает двигаться из точки f_1 с координатами $(-x_0, 0)$. Она двигается, как и раньше, по кругу радиуса $R_0 = x_0 - f_0$. В точке $(-f_0, R)$ на нее действует удар, и она переходит на круг радиуса R_1 , причем теперь уже согласно (208):

$$R_1^2 - R_0^2 = h^2. \quad (209)$$

Когда изображающая точка достигает оси x (точка k_1), она имеет координаты $(x_1 = R_1 - f_0, y_1 = 0)$. Пройдя нижнюю полу-плоскость по полуокружности радиуса $R_2 = R_1 - 2f_0$, фазовая точка пересечет второй раз ось x в точке l_1 с координатами $(-x_2, 0)$ ($x_2 = R_1 - 3f_0$). Таким образом в силу соотношения (209)

$$(x_2 + 3f_0)^2 - (x_0 - f_0)^2 = h^2.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, найдем:

$$(x_4 + 3f_0)^2 - (x_2 - f_0)^2 = h^2,$$

$$\dots \dots \dots (x_{2n} + 3f_0)^2 - (x_{2n-2} - f_0)^2 = h^2.$$

Если в рассматриваемом случае возможен периодический процесс, то для такого процесса $x_2 = x_0 = \bar{x}$, где \bar{x} — стационарная амплитуда, которая определяется соотношением:

$$(\bar{x} + 3f_0)^2 - (\bar{x} - f_0)^2 = h^2,$$

откуда

$$\bar{x} = \frac{h^2}{8f_0} - f_0.$$

Очевидно, что для существования такого периодического движения необходимо, чтобы

$$\bar{x}_0 > f_0$$

или

$$h^2 > 16f_0^2, \quad (210)$$

так как иначе представляющая точка в положении $(-x_0, 0)$ будет находиться на отрезке состояний равновесия. Условие (210), как легко видеть, предъявляет известные требования к силе пружины или весу гири заводного механизма. Действительно, так как путь, проходимый гирей при каждом ударе, задан конструкцией механизма, то работа, совершаемая гирей, должна быть во всяком случае больше, чем энергия, сообщаемая системе. Следовательно, чем больше f_0 , тем

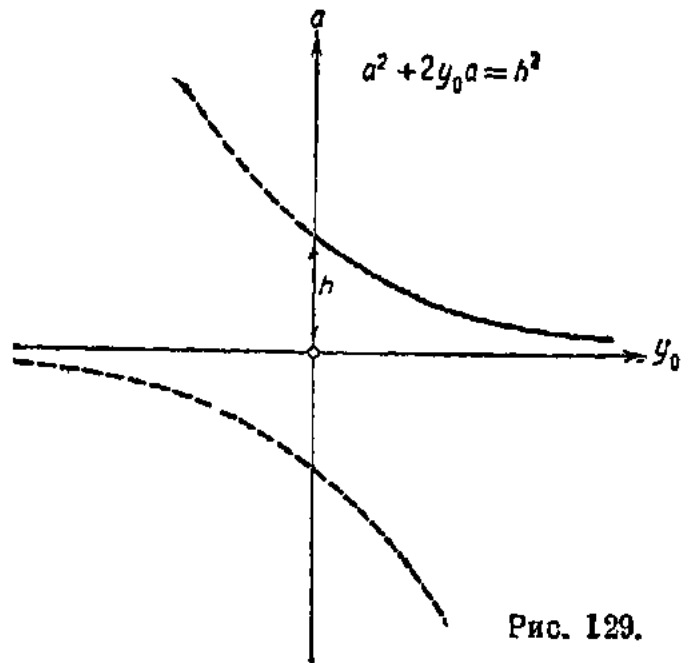


Рис. 129.

имеет место процесс приближения соседних движений в рассматриваемому периодическому и что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \bar{x}$, если только x_0 не слишком отличается от \bar{x} . Отсюда же следует, что предельное периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Полученная нами картина на фазовой плоскости (рис. 130) показывает, что при сделанных предположениях (постоянное трение и постоянное приращение энергии при ударе) система обладает обеими наиболее характерными свойствами часового механизма: 1) наличие единственной стационарной амплитуды и 2) необходимость начального толчка (или отклонения) конечной величины для того, чтобы эта амплитуда установилась. Второе из этих свойств, как легко видеть, обусловлено наличием постоянного трения в системе, и чем больше постоянное трение, тем больше область, в которой начальные отклонения затухают, и тем больше должен быть начальный толчок, чтобы часы пошли. Постоянное трение неизбежно присутствует в часах, так как маятник часов должен при движении произвести спуск спускового механизма, а для этого при любой конструкции механизма необходимо преодолеть трение покоя, имеющее конечную величину, для чего маятник должен обладать некоторой энергией. Таким образом второе типичное свойство часов (необходимость начального толчка достаточной величины) тесно связано с самим принципом устройства часов. Особенности же устройства часов, обуславливающие это свойство, прежде всего могут быть охвачены предположением, что в часах присутствует постоянное трение. Самое предположение о постоянном трении, как и всякая идеализация, конечно, не охватывает всех свойств системы, а отражает наиболее характерную черту этой системы. Именно, предположение о постоянном трении может быть сделано тогда, когда в системе присутствуют силы трения, которые при сколь угодно малой скорости движения все же сохраняют конечную величину. Если же при достаточно малой скорости силы трения становятся сколь угодно малыми, то лучше отражает свойства системы предположение о «линейном трении». Конечно, в часах присутствует и то и другое трение, трение в спусковом механизме лучше может быть отражено при помощи первой идеализации, а сопротивление воздуха движению маятника — при помощи второй. Однако учет трения в воздух, т. е. введение линейного трения, не дало бы ничего нового; только вместо частей окружности на фазовой плоскости нужно было бы проводить части

В нашем случае

$$F(x_{2n}, x_{2n-2}) = (x_{2n} + 3f_0)^2 - (x_{2n-2} - f_0)^2 - h^2 = 0$$

и

$$\left| \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \right| = - \left(\frac{-2(x_{2n-2} - f_0)}{2(x_{2n} + 3f_0)} \right) = \frac{\bar{x} - f_0}{\bar{x} + 3f_0} < 1,$$

т. е. последовательность $x_0, x_2, \dots, x_{2n} = x_{2n-2} = \bar{x}$ является сходящейся, если x_0 не слишком разнится от \bar{x} . Заметим, что кроме так называемой «регулярной» сходимости, которая имеет место в рассмотренном примере, могут быть другие, более сложные случаи «нерегулярной» сходимости [5].

спирали. Постоянное же трение связано с существенно новым свойством — с отсутствием самовозбуждения колебаний и необходимостью начального толчка для установления периодического процесса.

Такой режим колебательной системы, при котором в системе возможен периодический процесс, но когда для установления этого процесса необходим некоторый начальный толчок (т. е. режим, при котором существуют одновременно и устойчивое периодическое движение и устойчивое состояние равновесия), называется «жестким режимом», в отличие от «мягкого режима», при котором в системе либо вовсе невозможен периодический процесс, либо этот процесс устанавливается при любых начальных условиях, т. е. имеет место самовозбуждение колебаний. В случае мягкого режима существует одновременно только одно устойчивое состояние — это может быть либо состояние равновесия, либо периодическое движение.

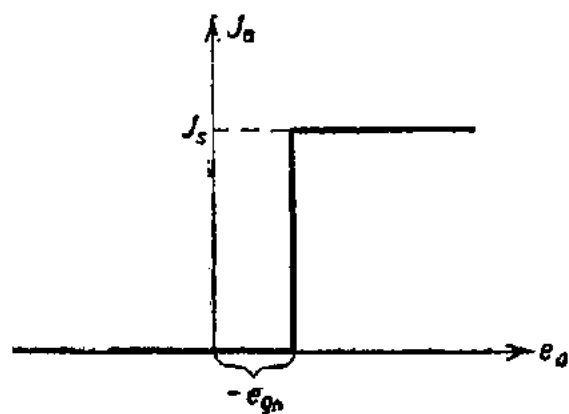


Рис. 131.

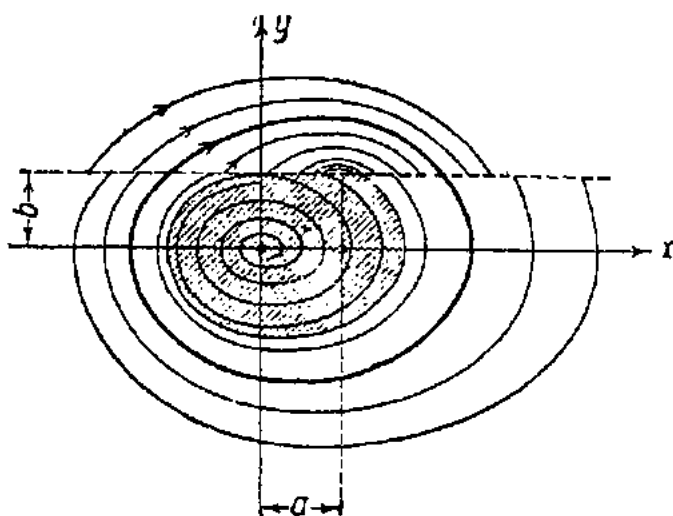


Рис. 132.

В случае часов такой жесткий режим обусловлен наличием сухого трения; при «линейном трении» мы получали мягкий режим. Рассмотренный раньше случай лампового генератора с характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков, также привел нас к мягкому режиму. В этом случае, как мы сейчас увидим, «мягкость» режима была обусловлена тем, что характеристика лампы не смещена, т. е. что вертикальная часть характеристики проходит через точку $e_0 = 0$. В случае же смещенной характеристики для лампового генератора также получается жесткий режим. Смещенная Γ -характеристика может служить удовлетворительной идеализацией для того случая, когда, во-первых, переменные напряжения на сетке далеко превосходят напряжение насыщения лампы и, во-вторых, рабочая точка смещена либо в область тока насыщения, либо в область, где анодный ток равен нулю. В случае смещенной Γ -характеристики поведение лампового генератора будет определяться уравнениями такого же вида, как и при отсутствии смещения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= a & \text{при } \dot{x} > b, \\ \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 & \text{при } \dot{x} < b, \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

причем для случая смещения, изображенного на рис. 131, величина $b > 0$ (затухание мы попрежнему считаем малым). Разница заключается в том, что в этом случае «смена уравнений» происходит не при $x=0$, а при $x=b$. В соответствии с этим должно быть изменено все наше рассмотрение, и в частности изменится картина на фазовой плоскости (рис. 132). Фазовую плоскость мы должны «разрезать» не по прямой $y=0$ (т. е. по оси x , как в случае отсутствия смещения), а по прямой $y=b$, и верхнюю часть полуплоскости сместить на величину a вправо. Из соображений непрерывности и в этом случае вытекает необходимость существования одной замкнутой траектории, состоящей из двух «полуспиралей». К этой траектории стремятся все другие траектории, кроме тех, которые лежат внутри заштрихованной области, образованной «пределной спиралью» и прямой $y=b$. Из всех начальных состояний, лежащих внутри этой области, система стремится к состоянию равновесия, которое является, следовательно, устойчивым (устойчивый фокус). Из картины на фазовой плоскости со всей очевидностью следует, что в генераторе установится периодический процесс только в том случае, когда в начальный момент напряжение или сила тока в контуре достаточно велики.

Мы рассматривали в теории часов удары, которые мгновенно изменяли количество движения и энергию системы. Аппарат, создававший эти удары, развивал бесконечно большую мощность, мгновенно отдавая определенные порции энергии. Естественен вопрос, применима ли такая идеализация при рассмотрении электрических колебательных систем.

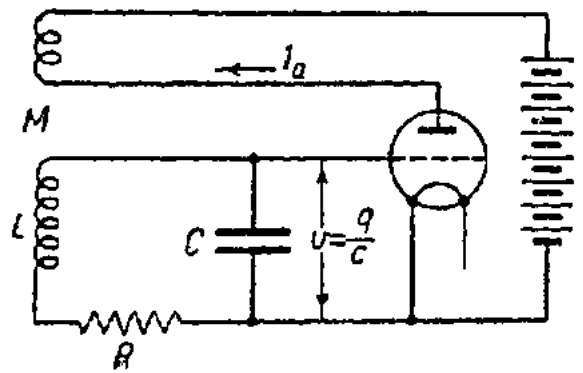


Рис. 133.

Покажем, что аналогичное положение вещей встречается и в электрических системах. Предположим, например, что в генераторе с колебательным контуром в цепи сетки (в дальнейших рассуждениях мы, как и обычно, пренебрегаем реакцией анода и сеточным током) устанавливаются настолько большие синусоидальные колебания, что напряжение на сетке дажеко заходит как в область, где анодный ток нуль, так и в область насыщения. Но если в контуре происходит синусоидальный колебательный процесс, то напряжение на сетке v (см. рис. 133) дважды за период меняет знак. Когда v проходит через нуль в положительном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро (т. е. в течение времени τ очень малого по сравнению с периодом колебаний T) переходит от значения нуль к значению I_a . За время τ электродвижущая сила индукции $M \frac{di_a}{dt}$ очень быстро нарастает от значения нуль, которое она имела прежде (когда $i_a = 0$), до некоторого очень большого значения, а затем, примерно, также быстро, когда i_a становится равным I_a , спадает до нуля. Когда v проходит через нуль в отрицательном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро изменяется от значения I_a до нуля. При этом ЭДС индукции очень быстро изменяется от значения нуль до

некоторого очень большого (по абсолютной величине) отрицательного значения, а затем снова очень быстро принимает значение нуля. Таким образом на контур в этом случае действуют кратковременные электродвижущие силы, достигающие очень большой величины и притом тем большей, чем круче изменяется анодный ток от нуля до I_a при увеличении v . Если мы примем, что этот переход происходит скачком (Γ -характеристика), то нам придется иметь дело с мгновенной бесконечно-большой электродвижущей силой. Нетрудно видеть, что здесь мы имеем полную аналогию с рассмотренным нами случаем часов, когда на колеблющуюся массу действует в надлежащие моменты мгновенный импульс, сообщаящий этой массе фиксированное количество движения.

В механике можно рассматривать действие силы $f(t)$, отличной от нуля в течение достаточно малого промежутка времени τ , как мгновенный удар, изменяющий скачком количество движения mx (речь идет о простейшем прямолинейном движении) на величину $\Delta(mx) = \int_t^{t+\tau} f(t) dt$.

Аналогично можно считать, что если электродвижущая сила $f(t)$ отлична от нуля лишь в течение достаточно малого промежутка времени, то она вызывает скачкообразное изменение потока индукции Lq на величину $\Delta(Lq) = \int_t^{t+\tau} f(t) dt$; в момент скачка потока индукции сама координата q (заряд конденсатора) не меняется, так что скачок (так же как и удар в механическом случае) не нарушает непрерывности изменений координаты.

В нашем случае при переходе напряжения на сетке через нуль в положительном направлении

$$\Delta(Lq) = \int_t^{t+\tau} M \frac{di_a}{dt} dt,$$

где t — время, когда i_a перестает быть равным нулю, $t + \tau$ — время, когда i_a принимает значение I_a . Интегрируя, имеем:

$$\Delta(Lq) = M [i_a(t + \tau) - i_a(t)] = MI_a.$$

Точно так же при переходе v через нуль в отрицательном направлении

$$\Delta(Lq) = -MI_a.$$

Величина скачка потока индукции Lq , а следовательно, и скачка силы тока не зависит от хода изменения i_a со временем от t до $t + \tau$, а зависит лишь от I_a , т. е. от полного изменения анодного тока. Поэтому несущественно, происходит ли скачок действительно мгновенно (бесконечно большая $M \frac{di_a}{dt}$) или только очень быстро. Принимая Γ -характер-

ристку, мы считаем, что скачок происходит мгновенно. Тогда, как нетрудно видеть, поведение системы определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q &= 0 \quad (q \neq 0), \\ \Delta\dot{q} &= \frac{M}{L} I, \quad (q=0, \dot{q} > 0), \\ \Delta\dot{q} &= -\frac{M}{L} I, \quad (q=0, \dot{q} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

и тем дополнительным условием, что q изменяется непрерывно. Таким образом осциллограмма всякого движения системы будет состоять из дуг «затухающих синусоид»:

$$q = Ae^{-h(t-t_0)} \cos [\omega(t-t_0) + \varphi],$$

начинающихся и кончающихся на оси времен. Между двумя соседними дугами существует в точке их смыкания (на оси t) разность наклонов, определенная условиями скачка.

Исследование системы (212) вполне аналогично исследованию, проведенному нами для часов в случае ударов, сообщающих постоянное количество движения. Разница здесь лишь в том, что в настоящем случае \dot{q} испытывает не один (как мы принимали для часов), а два скачка за период — как и в большинстве реальных часов.

Можно показать, хотя бы путем рассмотрения траекторий на фазовой плоскости, что всякое решение системы (212) стремится к периодическому движению, отображающему устойчивый автоколебательный процесс:

$$q = (-1)^n Ae^{-h(t-t_0 - \frac{nT}{2})} \sin(t-t_0 - \frac{nT}{2}) \quad t_0 + \frac{nT}{2} < t < t_0 + \frac{(n+1)T}{2},$$

где

$$A = \frac{MI_s}{L\omega} \frac{1}{1 - e^{-\frac{hT}{2}}} \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \frac{2\pi}{T}$$

(n — целые числа), а t_0 — произвольная фаза.

При малых логарифмических декрементах $d = hT$, приближенно имеем:

$$A = \frac{2MI_s}{\omega_0 Ld}$$

Можно показать, подобно тому, как это было сделано для случая генератора с Γ -характеристикой и колебательным контуром в цепи анода, что с уменьшением затухания (при заданных остальных параметрах) колебания все более и более приближаются к синусоидальным, в том смысле, что клирфактор стремится к нулю.

Вернемся теперь опять к теории часов.

Все те выводы, в которых мы пришли, рассматривая разные предположения о законе трения и характере толчков, могут быть пояснены простыми энергетическими соображениями. Для этого нужно лишь иметь

в виду, что при линейном трении энергия, рассеиваемая за период, пропорциональна квадрату амплитуды (рис. 134), а при постоянном трении она представляет собой линейную функцию амплитуды (рис. 135).

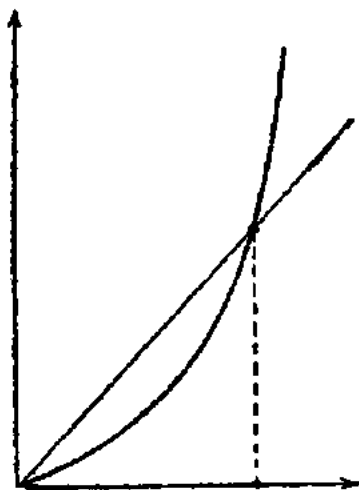


Рис. 134.

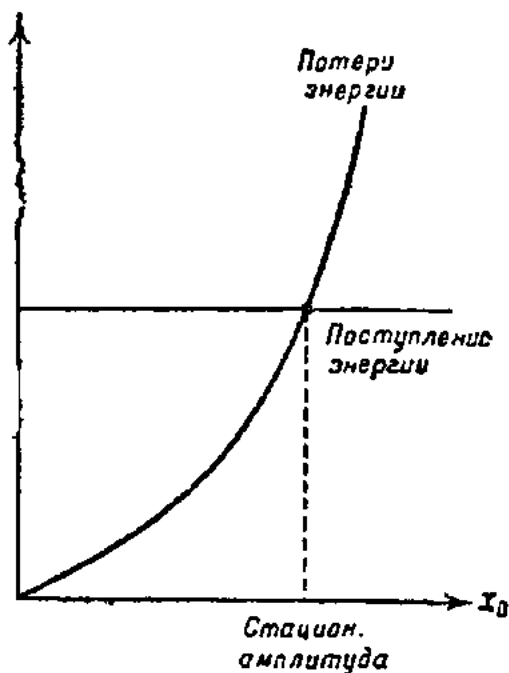


Рис. 135.

С другой стороны, при ударе по закону $v_1 - v_0 = \Delta v_0 = \text{const.}$, энергия, поступающая в систему за период, изменяется (возрастает) на величину

$$\frac{m}{2} (v_0 + \Delta v_0)^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (2v_0\Delta v_0 + \Delta v_0^2), \quad (213)$$

т. е. (так как $\Delta v_0 = \text{const.}$) является линейной функцией амплитуды.

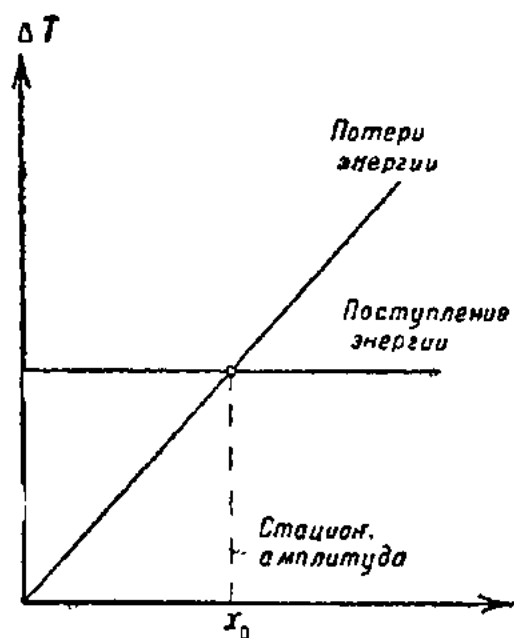


Рис. 136.

При ударе же по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const.}$

энергия системы возрастает за период на постоянную величину. После этого сразу становятся ясными основные полученные нами результаты. Всякий периодический процесс возможен только при условии, что энергия системы по прошествии периода имеет ту же величину, что и в начале периода. Посмотрим, может ли быть соблюдено это условие в разных рассмотренных нами случаях. В первом случае («линейное трение» и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const.}$) потери энергии растут пропорционально квадрату амплитуды, а поступление энергии в систему есть линейная функция амплитуды. Ясно, что где-то и только при одной определенной

амплитуде наступает баланс энергии и существует только одна стационарная амплитуда (рис. 134). Во втором случае (линейное трение и удар по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const.}$) потери пропорциональны

квадрату амплитуды, а поступление энергии — постоянная величина. Опять-таки существует только одна стационарная амплитуда, при которой имеет место баланс энергии (рис. 135). В третьем случае (постоянное трение и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const.}$) и потери и поступление энергии — линейные функции амплитуды. Следовательно, либо вообще нет стационарной амплитуды, либо таких стационарных амплитуд бесконечное множество.

Наконец, в четвертом случае (постоянное трение и удар по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const.}$) потери энергии есть линейная функция амплитуды, а поступающая энергия имеет постоянную величину, и снова возможна только одна стационарная амплитуда, для которой наступает баланс энергии (рис. 136).

§ 6. Свойства простейших автоколебательных систем

На частных примерах часов и лампового генератора (с характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков), рассмотренных в предыдущих параграфах, мы познакомились с основными чертами весьма многочисленных и практически весьма важных устройств, которые целесообразно объединить в отдельный своеобразный класс, именно класс *автоколебательных систем*. Общей чертой этих систем является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы. К числу таких автоколебательных систем следует помимо рассмотренных нами (часы и ламповый генератор) относить, например, электрический звонок, дуговой генератор электрических колебаний, всевозможные зуммеры, целый ряд музыкальных инструментов, как то: духовые и смычковые инструменты, и т. д.

Свойство автоколебаний — независимость амплитуды от начальных условий — является весьма характерным их признаком. Однако не всегда автоколебательные системы обладают этим свойством в совершенно «чистом» виде. Так, например, амплитуда колебаний маятника часов, как мы видели, в известном смысле зависит от начальных условий. Если отклонить маятник мало, то он будет совершать затухающие колебания — часы остановятся. Для того чтобы установились незатухающие колебания (чтобы часы пошли), обычно нужно дать маятнику достаточно большое начальное отклонение или сообщить достаточно большую начальную скорость. Таким образом целой области начальных условий (начальное отклонение больше данной величины) соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний. Как мы увидим в дальнейшем, в некоторых автоколебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, и тот или другой из них устанавливается в зависимости от начальных условий, хотя и в этом случае целой области начальных условий соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний.

Другая типичная черта автоколебаний заключается в следующем: во всякой автоколебательной системе происходит компенсация потерь за счет какого-то источника энергии, и поэтому в автоколебательной системе непременно должен существовать такой источник энергии, причем так как мы рассматриваем случай автономной системы, т. е. системы, на которую не действуют силы, явно зависящие от времени, то и источник энергии должен создавать силу, которая сама по себе не является заданной функцией времени, а определяется самой системой. Такова, например, анодная батарея в рассмотренном в предыдущей главе примере с ламповым генератором (или заводной механизм в часах); батарея дает некоторое постоянное напряжение, не зависящее от времени, но зато энергия, отдаваемая батареей, будет при колебаниях периодически изменяться. Так же как и для случая лампового генератора, для всех автоколебательных систем является весьма характерной именно такая связь между системой и источником энергии. Сам по себе источник отдавал бы постоянную энергию, но вследствие того, что работа, которую совершает этот источник, зависит каким-то образом от состояния (координат и скоростей) системы, действие источника энергии может стать периодическим, причем этот период определяется свойствами самой автоколебательной системы. Таким образом автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии, т. е. *за счет неперiodического источника энергии создает периодический процесс*. С точки зрения этого определения сразу видно, что, например, паровая машина является автоколебательной системой.

§ 7. Предварительное рассмотрение автоколебаний, близких к синусоидальным

Весьма общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением¹⁾:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (214)$$

К уравнению такого типа мы всегда приходим, если в составе нашей системы имеется колебательный контур с линейным затуханием. Если мы, например, имеем дело с обычным ламповым генератором, то $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $2h = \frac{R}{L}$, а $F(x, \dot{x})$ — приведенная²⁾ электродвижущая сила, действующая на колебательный контур благодаря обратной связи³⁾.

1) В ряде простейших случаев $F(x, \dot{x})$ не зависит от x , так что вместо (214) имеем:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \phi(\dot{x}).$$

2) Размерность $F(x, \dot{x})$ может не совпадать с размерностью электродвижущей силы.

3) Заметим, что уравнение (214) может быть записано в виде:

$$\ddot{x} = G(x, \dot{x}) = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x} - \omega_0^2 x.$$

С математической точки зрения разбиение правой части на эти три слагаемых неоднозначно. Это разбиение задается физическими соображениями.

Работа этой силы, в конечном счете, восполняет потери энергии, обусловленные наличием сопротивления, благодаря чему и становится возможным периодический процесс.

Как по заданной функции $f(x, \dot{x})$ (которую можно, например, предположить аналитической на всей фазовой плоскости x, \dot{x}) определить, возможны ли в системе устойчивые автоколебания, и если возможны, то хотя бы приближенно найти спектр таких колебаний — эта задача является *основной* для теории нелинейных колебаний в автономных системах с одной степенью свободы. В сущности почти все дальнейшее изложение в той или иной форме связано с этой основной задачей. Однако, прежде чем перейти к систематическому изложению теории, мы сейчас дадим предварительное, нестрогое, рассмотрение практически наиболее важного класса автоколебаний, так называемых *автоколебаний, близких к синусоидальным*¹⁾, имеющее целью уяснить постановку задачи теоретического изучения автоколебаний. О колебаниях, близких к синусоидальным, предварительно заметим следующее. Если, например, мы знаем, что периодическое решение уравнения (214) существует и соответствующая ему замкнутая фазовая траектория расположена на фазовой плоскости вне круга фиксированного радиуса R_0 и если $f(x, \dot{x})$ достаточно мала всюду вне этого круга (мы предполагаем ω_0 заданным), то мы можем сказать, что наше решение будет достаточно близко к синусоидальному²⁾. С другой стороны, как нетрудно видеть,

1) Хотя автоколебания по своей физической природе, по характеру действующих сил, существенно отличаются от колебаний консервативных систем, тем не менее форма установившихся автоколебаний может сколь угодно мало отличаться и даже совпадать с формой колебаний консервативной системы.

В частности, в целом ряде практически весьма важных случаев форма автоколебаний весьма мало отличается (в смысле малости клирфактора) от формы колебаний линейного гармонического осциллятора. Например, глядя на осциллограмму колебаний генератора с Γ -характеристикой в случае малого h , мы не сможем установить ее природу, т. е. отличить ее от осциллограммы гармонического осциллятора.

2) Чтобы пояснить смысл этого утверждения, приведем доказательство. Рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + \varphi(x, y).$$

К такой системе легко преобразуется уравнение (214) после надлежащей замены переменных.

Пусть дано, что эта система имеет периодическое движение, фазовая траектория которого лежит вне круга радиуса R_0 . Пусть далее вне круга R_0 $|\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0$, где $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\dot{\varphi} = -1 + \frac{x\varphi(x, y)}{r^2}; \quad \dot{r} = + \frac{y\varphi(x, y)}{r}.$$

Вне круга радиуса R_0

$$\left| \frac{x\varphi(x, y)}{r^2} \right| < \frac{|\varphi(x, y)|}{R_0} < \varepsilon < \frac{1}{2}; \quad \left| \frac{y\varphi(x, y)}{r} \right| < |\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0.$$

требование малости функции $f(x, \dot{x})$ отнюдь не является необходимым. Возможны автоколебания, имеющие форму сколь угодно близкую к синусоидальной, хотя функция $f(x, \dot{x})$ принимает в некоторые моменты движения сколь угодно большие значения. С такими системами мы имели дело в теории часов и в теории генератора с Γ -характеристикой и с колебательным контуром в цепи сетки, так как, очевидно, что если мы имеем дело с мгновенной передачей конечного количества движения, то это может произойти только в результате действия бесконечно большой силы. Вопрос о спектральном составе периодического процесса, по крайней мере, для случая автоколебаний, близких к синусоидальным, может быть приближенно продискутирован при помощи представления об *авторезонансе*, о котором мы уже упоминали при изложении теории генератора с Γ -характеристикой.

Напомним предварительно некоторые элементарные положения обычной теории резонанса. Мы говорили о резонансе в линейном осцилляторе, когда под действием внешней периодической силы и силы трения пропорциональной скорости, в нем поддерживается движение, близкое к одному из его собственных колебаний в том смысле, что период этого движения достаточно близок к собственному периоду осциллятора, а коэффициент достаточно мал. Пусть мы имеем внешнюю периодическую силу $\Phi(t)$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, действующую на гармонический осциллятор с линейным затуханием, собственная частота которого также равна ω (этот частный случай нас главным образом будет интересовать):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \Phi(t) - 2h\dot{x}. \quad (215)$$

Дадим оценку «поправки» к периоду гармонического осциллятора

$$\int_0^{2\pi} \dot{\varphi}(t) dt = -2\pi + a, \quad \text{где } |a| < 2\pi\varepsilon,$$

$$\int_0^{\tau} \dot{\varphi}(t) dt = -2\pi, \quad \text{где } \tau \text{ — искомый период.}$$

Отсюда $\left| \int_{2\pi}^{\tau} \dot{\varphi}(t) dt \right| < 2\pi\varepsilon$, что дает поправку к периоду $|\tau - 2\pi| < 4\pi\varepsilon$.

Оценим максимальное изменение радиуса-вектора за период:

$$\Delta r < \int_0^{\tau} |\dot{r}_{\max}| dt < \int_0^{\tau} \varepsilon R_0 dt < \varepsilon R_0 (2\pi + 4\pi\varepsilon).$$

Отсюда следует, что замкнутая траектория, соответствующая периодическому решению, лежит на фазовой плоскости между двумя концентрическими окружностями, разность радиусов которых меньше $R_0(2\pi\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2)$. Само собой разумеется, что если мы заранее знаем, что траектория периодического движения лежит между окружностями с радиусами R_0 и R_1 ($R_1 > R_0$), то нам достаточно требовать малости $\varphi(x, y)$ лишь в области между двумя окружностями.

Представим $\Phi(t)$ в виде:

$$\Phi(t) = P \cos \omega t + Q \sin \omega t + G(t), \quad (215a)$$

выделив резонансные члены ¹⁾. Существует *определенное* собственное колебание

$$x_1(t) = \frac{P \sin \omega t - Q \cos \omega t}{2h\omega}, \quad (I)$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются развивающейся при этом колебании силой трения. Нетрудно видеть, что при достаточно малом h (если $P^2 + Q^2 \neq 0$) в системе будет поддерживаться под действием силы $\Phi(t)$ периодическое движение сколь угодно близкое к собственному колебанию (I) в том смысле, что для этого движения собственное колебание (I) будет как угодно сильно доминировать над остальными членами соответствующего разложения в ряд Фурье, или, говоря более точно, в том смысле, что для этого движения клирфактор будет как угодно мал. Докажем это утверждение. Обозначим разность между точным решением уравнения (215) и собственным колебанием $x_1(t)$ через $z(t)$: $x(t) = x_1(t) + z(t)$. Очевидно, что $z(t)$ порождается нерезонансным «хвостом» $G(t)$ и удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = G(t) - 2h\dot{z},$$

где

$$G(t) = \frac{P_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n \cos n\omega t + Q_n \sin n\omega t).$$

Понимая в дальнейшем под $z(t)$ «вынужденное» решение этого уравнения, мы можем написать квадрат клирфактора нашего периодического движения в виде:

$$x^2 = \frac{\frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} z^2(t) dt}{\frac{P^2 + Q^2}{4h^2\omega^2}},$$

так как

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} z^2(t) dt \leq \frac{1}{\omega^4} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t) dt,$$

1) Т. е. подобрав постоянные P и Q так, чтобы

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \cos \omega t dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \sin \omega t dt = 0.$$

то

$$\chi^2 \ll \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t) dt}{P^2 + Q^2} \frac{4h^2}{\pi\omega}.$$

Таким образом условие малости кляирфактора имеет вид:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{G^2(t) dt}{\pi\omega} \ll \frac{P^2 + Q^2}{4h^2}.$$

Если $\Phi(t)$ задано, то при достаточно малом h кляирфактор сколь угодно мал, каков бы ни был спектр $\Phi(t)$, если только $P^2 + Q^2 \neq 0$.

Нас интересует сейчас не случай внешней силы (вынужденные колебания), а автоколебания, где сама система порождает действующую на нее силу. Уравнение движения здесь имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2hx. \quad (214)$$

Предположим, что нам известно периодическое движение этой системы, соответствующее автоколебательному процессу: $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$. Очевидно, что это решение удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)] - 2hx, \quad (216a)$$

т. е. уравнению системы, находящейся под действием силы, явно зависящей от времени¹⁾. Таким образом автоколебания можно рассматривать, как вынужденные колебания, поддерживаемые внешней силой, вид которой определяется видом самих автоколебаний. Если функция времени $F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ такова, что для нее выполняются условия резонанса, в частности если ее период достаточно близок к $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то целесообразно говорить об авторезонансе²⁾.

1) Заметим, что уравнению (216a) удовлетворяет только рассматриваемое периодическое движение и, вообще говоря, ему не удовлетворяют другие движения, определяемые уравнением (214). Отсюда следует, что, исходя из решений этого неавтономного уравнения, нельзя, например, рассматривать вопросов устойчивости.

2) В частности, при помощи представления об авторезонансе, можно заключить, что всякий раз, когда функция $f[x(t), \dot{x}(t)]$ в уравнении (214) как функция времени практически не зависит от характера колебаний в контуре (например, от величины размахов) и, если при уменьшении затухания контура ее период стремится к периоду гармонического осциллятора $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то при уменьшении затухания контура мы будем получать колебания все более и более синусоидальные. Это замечание имеет практический интерес. В частности, как раз такое положение дела мы имеем в теории генератора с Γ -характеристикой

Заметим, что мы имеем известный произвол в выборе уравнения вида (216а), например, часто бывает целесообразно писать это уравнение в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2) \dot{\varphi} - 2h\dot{x}, \quad (216)$$

где ω — частота автоколебаний, и таким образом рассматривать действие измененной внешней силы

$$F_1(\varphi, \dot{\varphi}) = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2) \dot{\varphi}$$

на линейный осциллятор с иной («поправленной») частотой. Ибо может оказаться, что при написании уравнения в виде (216а) мы не будем иметь выполнения условий резонанса, в то время как при написании в виде (216) и подходящем выборе ω они будут выполняться.

Покажем теперь, как, пользуясь представлением об авторезонансе и *заранее постулировав* существование у уравнения (214) периодического решения, близкого к синусоидальному, можно получить приближенные выражения для амплитуды основного тона и для частоты этого решения.

Предположим, что периодическое решение уравнения (214) близко (в смысле малости клирфактора) к синусоидальному колебанию:

$$x_0(t) = A \cos \omega t; \quad \dot{x}_0(t) = -A\omega \sin \omega t,$$

где A и ω — пока неопределенные константы. Подставляя тогда в уравнение (216) вместо точного решения φ «нулевое приближение» $x_0(t) = A \cos \omega t$, мы можем опять, теперь уже приближенно, рассматривать автоколебания, как вынужденные колебания. Мы получаем, таким образом, следующую задачу на вынужденные колебания:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) - 2h\dot{x}. \quad (217)$$

Разлагая $F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t)$ в ряд Фурье, имеем (см. 215а):

$$F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) = P(A) \cos \omega t + Q(A) \sin \omega t + G(A, t),$$

где

$$P(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \cos \omega t dt,$$

$$Q(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt.$$

Вынужденное решение уравнения (217) имеет вид:

$$x_1(t) = \frac{P(A) \sin \omega t - Q(A) \cos \omega t}{2h\omega} + z_1(A, t),$$

где $z_1(A, t)$ — члены, порождаемые нерезонансным членом $G(A, t)$. Если предположить, что ω , $P(A)$ и $Q(A)$ заданы, то можно сказать, что существует определенное собственное колебание

$$\frac{P(A) \sin \omega t + Q(A) \cos \omega t}{2h\omega},$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются с равнваемой этим собственным колебанием силой трения. Очевидно, что мы можем отождествить это собственное колебание с тем собственным колебанием $x_0(t) = A \cos \omega t$, которое по нашему предположению порождает внешнюю силу. Это сразу дает два уравнения ¹⁾:

$$P(A) = 0, \quad Q(A) + 2h\omega A = 0, \quad (218)$$

которые «отбирают» те A и ω , которые характеризуют возможные автоколебания, близкие к синусоидальным.

Однако следует ясно отдать себе отчет, что найденные по уравнениям (217) амплитуда и частота, вообще говоря, отнюдь не являются амплитудой основного тона и частотой *точного* периодического решения [даже если, как мы предположили, такое точное решение действительно существует и имеет малый клирфактор ²⁾], так как мы при переходе к «вынужденному» рассмотрению вместо точного решения подставили $A \cos \omega t$. Можно ожидать, что мы получим следующее приближение к амплитуде основного тона и частоте точного решения, если мы при «вынужденном» рассмотрении вместо нулевого приближения подставим «первое приближение» ³⁾.

$$x_1(t) = A \cos \omega t + z_1(A, t).$$

1) Эти уравнения часто называют уравнениями, получаемыми путем приравнивания нулю коэффициентов при «резонансных членах». Поясним происхождение этого названия и одновременно дадим другой, с известной точки зрения более убедительный, вывод этих уравнений. Именно, вместо уравнения (216) рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2) x - 2h\dot{\varphi} = f_1(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Предполагая существование колебаний, близких к синусоидальному колебанию $x = A \cos \omega t$, получаем задачу из теории вынужденных колебаний гармонического осциллятора без трения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P(A) \cos \omega t + [Q(A) + 2h\omega A] \sin \omega t + G(A, t).$$

Как известно, отсутствие неограниченного нарастания колебаний может иметь место в рассматриваемом случае лишь тогда, когда коэффициенты при резонансных членах внешней силы равны нулю. Это замечание снова приводит к уравнениям (218).

2) Следует подчеркнуть, что наличие действительных решений уравнений (218) еще само по себе ничего не говорит о существовании периодических решений дифференциального уравнения (214).

3) Заметим, что если «первое приближение» с достаточной точностью представляет искомое периодическое движение, которое по нашему предположению близко к синусоидальному, то для него должно соблюдаться условие малости клирфактора. Однако, если это условие выполнено, то мы, вообще говоря, еще ничего не можем сказать о том, будут ли полученные из уравнений (218) A и ω с достаточной точностью представлять основной тон нашего решения, и о том, каков будет клирфактор для дальнейших «приближений».

Мы получим совершенно аналогичным образом [вместо (218)] новые, вообще говоря, измененные условия для определения A и ω , а также найдем «второе приближение»:

$$x_2(t) = A \cos \omega t + \varepsilon_2(A, t).$$

Такой процесс составления уравнений для определения A и ω и составления последовательных «приближений» можно продолжать неограниченно. Если этот процесс сходящийся, то может оказаться, что мы таким путем найдем точное решение. Для обоснования этого процесса и для доказательства существования периодического решения нужно специальное математическое рассмотрение. Мы затронем связанные с этим вопросы в дальнейшем, когда будем изучать количественные методы Пуанкаре.

Предположение о том, что автоколебания близки к синусоидальным, широко используется в теории колебаний для решения целого ряда задач. Например, приближенные количественные методы рассмотрения обычных ламповых генераторов, графический метод Мёллера^[28] или аналитический метод ван-дер-Поля^{[29], [106]} основаны на этом предположении. Также и строгие методы Пуанкаре удобно применять в тех случаях, когда разыскиваемые решения близки к синусоидальным.

Условия близости колебаний к синусоидальным соблюдаются, конечно, далеко не всегда. В некоторых случаях эти условия не могут быть соблюдены, а иногда специально выбираются такие условия работы системы, чтобы колебания возможно больше отличались от синусоидальных и обладали возможно большим числом резко выраженных обертонов. Таковы, например, всевозможные мультивибраторы, которые благодаря богатству обертонами находят широкое применение в различных измерительных устройствах, в частности в установках для точного измерения частот. Значение таких автоколебательных систем, создающих колебания, существенно отличные от синусоидальных, за последнее время весьма возросло, и поэтому таким системам в нашей книге будет уделено известное внимание.

Автоколебательные системы, в которых один из двух «колебательных параметров» (т. е. упругость или масса, либо емкость или самоиндукция) играет второстепенную роль, а трение (или сопротивление) существенно влияет на характер (прежде всего период и форму) колебаний, мы будем называть *релаксационными* системами¹⁾ в противоположность системам Томсоновским, в которых существенное влияние на период колебаний оказывают только емкость и самоиндукция.

Это обстоятельство позволяет во многих случаях для описания релаксационных колебаний применить новую идеализацию, заключающуюся в том, что при рассмотрении автоколебаний мы пренебрегаем

1) Термин «релаксация» заимствован из механики, где этим термином обозначается постепенное исчезновение упругой деформации в среде, обладающей трением. В электрических системах этому соответствует разряд конденсатора через сопротивление, поэтому и колебания рассматриваемого типа, впервые полученные как периодически повторяющийся разряд конденсатора через сопротивление, были названы «релаксационными».

каким-либо колебательным параметром системы (играющим второстепенную роль). Эта идеализация приводит к представлению о *разрывных* колебаниях, которые представляют собой таким образом идеализированную форму релаксационных колебаний. Поэтому в дальнейшем вместо несколько расплывчатого термина «релаксационные колебания» мы будем применять более определенный термин «разрывные колебания». Пренебрежение одним из колебательных параметров системы и разрывная трактовка релаксационных систем настолько упрощают задачу, что как качественное, так и количественное рассмотрение «вырожденных» нелинейных систем и разрывных колебаний становится при прочих равных условиях задачей более простой, чем рассмотрение невырожденной системы и колебаний, близких к синусоидальным. Поэтому строгое изложение мы начнем именно с рассмотрения систем, описываемых одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, и изучения разрывных колебаний в таких системах. Необходимо, однако, оговориться, что разрывная трактовка автоколебаний может оказаться целесообразной не только в системе, в которой можно пренебречь одним из колебательных параметров, но в некоторых случаях целесообразно рассматривать как разрывные автоколебания в системах, обладающих обоими колебательными параметрами. Один из таких случаев также будет нами рассмотрен.

ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОДНИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Введение

Мы приступим сейчас к систематическому изложению теории нелинейных систем и методов исследования и решения нелинейных дифференциальных уравнений, обратив особое внимание на вопросы так называемого качественного интегрирования, о важности которого мы уже упоминали. Однако наша задача будет заключаться не столько в том, чтобы дать математически безупречные доказательства всем высказываемым утверждениям, или в том, чтобы дать исчерпывающую классификацию всех возможных случаев, сколько в том, чтобы пояснить идею качественного интегрирования и развить существующие методы в связи с их применениями к теории колебаний и к некоторым другим вопросам.

Наиболее общим случаем среди тех, которыми мы ограничили наше рассмотрение, является нелинейная система, описываемая одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, или, что то же самое, двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Однако мы начнем изложение общей теории не с этого общего случая, а с более простого случая одного нелинейного уравнения первого порядка, к которому приводит рассмотрение целого ряда задач, имеющих немалый физический интерес. При рассмотрении нелинейных механических и электрических систем с одной степенью свободы в результате пренебрежения одним из колебательных параметров мы приходим, как и в случае систем линейных, к *одному* дифференциальному уравнению первого порядка, но уже нелинейному. Например, мы приходим к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, пренебрегая массой (самоиндукцией) или упругостью (величиной, обратной емкости) в простейших автоколебательных системах, примеры которых мы уже рассматривали. Действительно, вместо «полного» уравнения такой автоколебательной системы

$$m\ddot{x} + kx = \varphi(\dot{x})$$

мы получаем в случае малой массы (или самоиндукции), т. е. при $m \rightarrow 0$, уравнение:

$$kx = \varphi(\dot{x}),$$

разрешая которое относительно x , приходим к уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (219)$$

в случае же малой упругости (очень большой емкости), т. е. при $k \rightarrow 0$, уравнение:

$$m\ddot{x} = \varphi(x).$$

Заменяя здесь \dot{x} через y , опять получаем уравнение вида (217):

$$\frac{dy}{dt} = g(y).$$

Мы начнем рассмотрение с систем, движение которых с достаточной точностью определяется уравнением (219), где $f(x)$ — аналитическая функция на всей прямой x за исключением, может быть, некоторого конечного числа точек.

Общая теория, которую мы будем излагать, имеет конечной целью установление зависимости координаты системы от времени, т. е. вида функции $x(t)$, установление же картины в одномерном фазовом «пространстве», т. е. на фазовой прямой, играет лишь вспомогательную, хотя и весьма существенную роль.

§ 2. Теорема существования и единственности

Рассмотрим плоскость t, x . Решениями нашего уравнения $\dot{x} = f(x)$ являются кривые на плоскости t, x . Эти кривые мы также будем называть интегральными кривыми (их не следует, однако, смешивать с фазовыми траекториями и интегральными кривыми на фазовой плоскости).

Пусть нам даны начальные условия: $x = x_0$ при $t = t_0$ или, иначе, пусть на плоскости t, x дана точка с координатами t_0, x_0 . Прежде всего возникает вопрос: при каких условиях существует решение нашего дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим начальным условиям, или, иначе, при каких условиях существует интегральная кривая, проходящая через точку t_0, x_0 ?

Ответ на этот вопрос дается теоремой Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Эта теорема для данного случая формулируется следующим образом. Пусть в интервале¹⁾ от $x_0 - a$ до $x_0 + a$ функция $f(x)$ будет аналитической функцией. Тогда можно указать такое b ($b > 0$), что в интервале от $t_0 - b$ до $t_0 + b$ существует единственное решение, принимающее

1) Мы употребляем термин интервал от A до B , понимая под этим совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $A < x < B$, т. е. отрезок без начальной и конечной точек.

значение $x = x_0$ при $t = t_0$. Это решение является аналитической функцией t в интервале $t_0 - b, t_0 + b$).

Дадим геометрическую интерпретацию этой теоремы.

Интервал $x_0 - a, x_0 + a$ выделяет на плоскости t, x полосу с границами, параллельными оси t . Интервал $t_0 - b, t_0 + b$ выделяет из этой полосы прямоугольник (рис. 137), внутри которого лежит точка t_0, x_0 . Теорема Коши гарантирует (на интервале от $t_0 - b$ до $t_0 + b$) существование единственной интегральной кривой, проходящей через точку t_0, x_0 . Естественно возникает вопрос о том, может ли это решение быть продолжено, т. е. существует ли решение нашего уравнения на интервале большем, чем $t_0 - b, t_0 + b$, совпадающее с нашим решением на интервале $t_0 - b, t_0 + b$).

Для решения этого вопроса рассмотрим точку $t_0 - b, x_1$, являющуюся пределом точек нашей интегральной кривой при $t \rightarrow t_0 - b$. Здесь может быть два случая: или x_1 — точка голоморфизма функции $f(x)$; тогда мы к этой точке можем снова применить ту же теорему и получить решение на увеличившемся интервале; или x_1 — точка нарушения голоморфизма; тогда теорема в сформулированном здесь виде неприменима, и возможны случаи непродолжаемости, раздвоения и т. д.

Ясно, что то же самое относится и к другому концу нашего куска интегральной кривой — точке $t_0 + b, x_2$.

Таким образом мы видим, что наша интегральная кривая продолжается во всяком случае до тех пор, пока x не дойдет до того значения, в котором $f(x)$ не голоморфна. Если функция $f(x)$ аналитическая на всей прямой, то решение продолжаемо до тех пор, пока x не

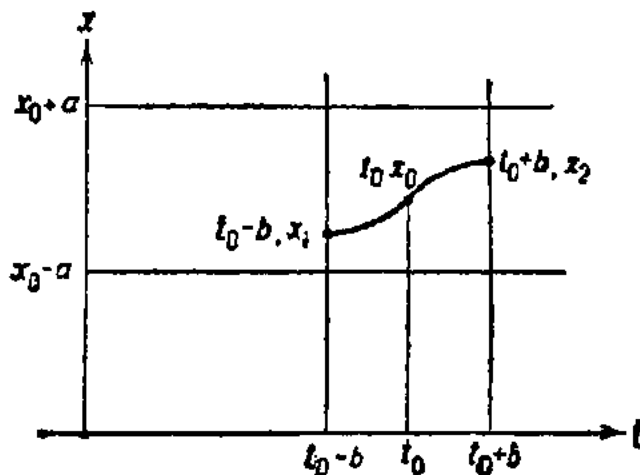


Рис. 137.

1) Если $f(x)$ не является аналитической функцией, но $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны и ограничены в интервале $x_0 - a, x_0 + a$ $\{ |f(x)| < M; |f'(x)| < k \}$, то теорема Коши сохраняется в следующем виде: в интервале $t_0 - \frac{a}{M}, t_0 + \frac{a}{M}$ существует единственное решение, принимающее значение $x = x_0$ при $t = t_0$. Эти условия могут быть еще ослаблены, именно: вместо существования производной достаточно выполнение так называемого условия Липшица $|f(x_2) - f(x_1)| < k|x_2 - x_1|$, где x_2 и x_1 — любые точки из интервала $x_0 - a, x_0 + a$. Заметим, что интервал существования решения $(t_0 - b, t_0 + b)$ в случае, если $f(x)$ — аналитическая функция, можно взять не меньше того, который получается по этому рецепту.

2) Это понятие о продолжении решения, хотя и независимое, тесно связано с известным из теории функций комплексного переменного понятием аналитического продолжения. Может показаться удивительным, зачем требуется подробное исследование столь простого дифференциального уравнения, где переменные разделяются и решение получается в квадратурах. Не говоря уже о том, что фактическое взятие квадратур удается лишь в редких случаях, даже при выполнении интегриации дискуссия получаемых результатов часто представляет тяжелую задачу. Для наших целей исследование этого простого уравнения представляет интерес также и с той точки зрения, что она позволяет конкретно пояснить общую идею качественного интегрирования.

уходит в бесконечность¹⁾. Если же x не уходит в бесконечность, то решение продолжаемо от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Даже тогда, когда существуют точки нарушения голоморфизма, возможны случаи продолжаемости решения от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. В этих случаях решение, например, протекает между двумя прямыми, параллельными оси t , ординаты которых являются точками нарушения голоморфизма для функции $f(x)$ (рис. 138).

Резюмируя, мы можем сказать следующее. Вся плоскость t, x может быть разбита на полосы, границы которых представляют собой прямые, параллельные оси t , такие, что их ординаты являются точками нарушения голоморфизма функции $f(x)$. В каждой такой полосе

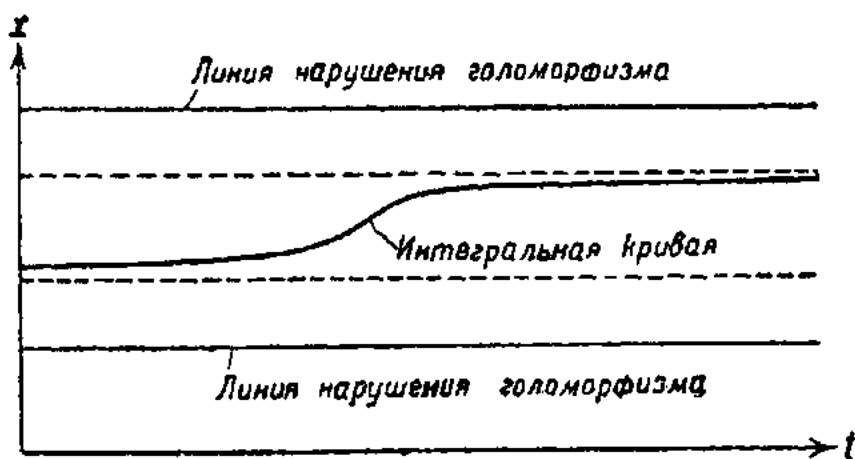


Рис. 138.

через каждую точку проходит единственная интегральная кривая. Эти кривые аналитические и не пересекаются друг с другом внутри полосы.

Из сформулированной нами теоремы мы ничего не можем заключить о том, что происходит на границах этих полос. Там может быть как не-

прерывный переход интегральной кривой через границу, так и всевозможные случаи нарушения непрерывности.

Рассмотрим пример, имеющий физический интерес, когда условия теоремы Коши не выполнены. Именно, рассмотрим равноускоренное падение тела массы m с ускорением g в случае, когда начальная скорость равна нулю (рис. 139).

На основании закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(x - x_0),$$

откуда, беря корень с положительным знаком (мы ограничиваемся рассмотрением движения в одном направлении), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{2g(x - x_0)}. \quad (220)$$

Найдем решение этого уравнения, соответствующее начальным условиям $t = t_0; x = x_0$. Нетрудно видеть, что при этом значении x функция $f(x) = \sqrt{2g(x - x_0)}$ не голоморфна, так как производная $f'(x)$ обращается в бесконечность при $x = x_0$, и, следовательно, в этой точке не

1) Заметим, что это может случиться в конечное время. Тогда решение продолжаемо (в указанном здесь смысле) вплоть до этого момента. В качестве простого примера можно указать на уравнение $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$.

существует разложения в ряд Тейлора. Таким образом на плоскости t, x вдоль прямой $x = x_0$ условия теоремы Коши не соблюдены. Отсюда мы можем заключить, что в точках этой прямой возможны случаи неединственности решений, случаи несуществования и т. д.

В рассматриваемом примере можно решить этот вопрос непосредственным интегрированием. Именно, уравнение (220) имеет при рассматриваемых начальных условиях решение:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

(заметим, что у этих парабол мы должны рассматривать только их правые от оси симметрии части, так как у нас $\frac{dx}{dt} \geq 0$ в силу условия, наложенного на знак корня).

Кроме этого решения наше уравнение имеет еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям:

$$x = x_0.$$

Это решение может быть получено по обычным правилам как опи-

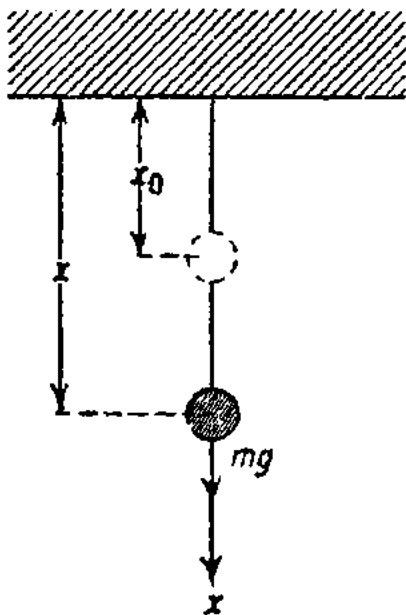


Рис. 139.

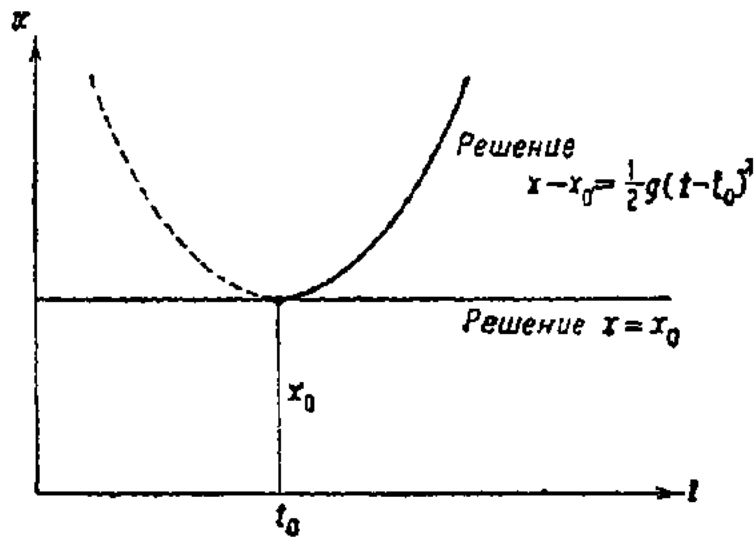


Рис. 140.

бающая семейства парабол $x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$ с переменным параметром t_0 . Таким образом мы видим (рис. 140), что через каждую точку прямой $x = x_0$ проходит не одна, а две интегральные кривые, т. е. что нарушены условия единственности решения. Нетрудно указать физический смысл неединственности решения. Мы исходили при исследовании падения тела не из ньютоновского закона движения $m \frac{d^2x}{dt^2} = f$, а из закона сохранения энергии. С точки зрения закона сохранения энергии тело может при выбранных нами начальных условиях как падать равноускоренно, так и находиться в покое. Этим еще раз иллюстрируется, даже для случая одной степени свободы, хорошо известное обстоятельство, что закон сохранения энергии является недостаточным для установления законов движения.

§ 3. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий

Практически всегда необходимо знать, что делается с решением дифференциального уравнения (219) в случае малых изменений начальных условий (x_0, t_0) , так как в реальных системах мы никогда не можем задать начальные условия совершенно точно. Ответ на этот вопрос дается теоремой о непрерывной зависимости решений от начальных условий. Как мы видели, задание начальных условий определяет интегральную кривую, по крайней мере на том промежутке, где выполнены требования теоремы Коши. Таким образом при заданных начальных условиях x является функцией только времени, что мы будем записывать в виде: $x = \varphi(t)$, вообще же решение зависит не только от t , но и от начальных условий t_0, x_0 , что мы будем записывать в виде:

$$x = \varphi(t, t_0, x_0)$$

или

$$x = \varphi(t - t_0, x_0) \quad (221)$$

(так как система автономна и, следовательно, x может зависеть явно только от комбинации $t - t_0$). Предположим, что мы имеем интегральную кривую $x = \varphi(t)$, проходящую через точку t_0, x_0 и не выходящую в течение заданного

конечного промежутка времени от t_1 до t_2 (содержащего точку $t = t_0$) из области аналитичности $f(x)$. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий выражает тот факт, что если в этом случае мы мало изменим начальные условия, то получим кривую $x = \bar{\varphi}(t)$, близкую к первоначальной на данном отрезке времени от t_1 до t_2 (рис. 141). Дадим точную формулировку этой теоремы: для заданного промежутка времени от t_1 до t_2 , в течение которого решение $x = \varphi(t)$ не выходит из области аналитичности, и всякого сколь угодно малого ε ($\varepsilon > 0$) существует такое положительное число δ , что

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad (t_1 < t < t_2),$$

если

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta, \quad |t_0 - \bar{t}_0| < \delta \quad \{x_0 = \varphi(t_0); \bar{x}_0 = \bar{\varphi}(\bar{t}_0)\}.$$

§ 4. Качественный характер кривых на плоскости xt в зависимости от вида функции $f(x)$

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая для всякого значения x . Посмотрим, какие существуют при этом возможные решения. Пусть уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней. Тогда

$\frac{dx}{dt}$ сохраняет все время один и тот же знак, и все решения суть монотонные функции, возрастающие или убывающие от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные корни $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k$, которые, очевидно, соответствуют состояниям равновесия. Соответствующие интегральные кривые на плоскости t, x — прямые, параллельные оси t и разбивающие плоскость t, x на полосы. Так как интегральные кривые не могут пересекаться (в силу теоремы Коши), то каждая интегральная кривая должна целиком заключаться в одной из таких полос и, следовательно, быть монотонной, так как внутри полосы $f(x)$ не меняет знака. Более того, нетрудно видеть, что если интегральная кривая заключена в полосе между двумя параллельными оси прямыми ($x = x_i, x = x_{i+1}$), являющимися решениями нашего дифференциального уравнения, то она асимптотически приближается к одной из этих прямых при $t \rightarrow +\infty$, к другой при $t \rightarrow -\infty$. Если же интегральная кривая заключена в части плоскости, ограниченной такой прямой, параллельной оси t , только с одной стороны, то эта интегральная кривая либо при возрастании t , либо при убывании t уходит в бесконечность; в другую же сторону она стремится к граничной прямой.

Таким образом, зная $f(x)$, нетрудно выяснить качественный характер кривых на плоскости t, x .

Очевидно, что эти кривые, если только $f(x)$ — аналитическая функция, не могут быть периодическими, так как они монотонны. Это замечание впоследствии окажется существенным.

§ 5. Представление движения на фазовой прямой

Рассмотрим теперь представление исследуемых движений в одномерном пространстве, в частности на фазовой прямой. Метод отображения движения при этом применяется тот же самый, как и в случае двумерной фазовой плоскости.

Рассматриваемый случай, однако, более прост, так как здесь мы имеем дело с одномерным движением изображающей точки (рис. 142).

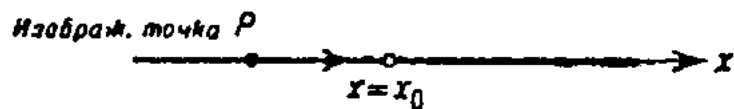


Рис. 142.

Возьмем прямую Ox ; пусть для данного x изображающая точка имеет скорость $f(x)$, т. е. ее движение подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (222)$$

Предположим, как мы уже делали, что на всей прямой, кроме, может быть, конечного числа точек, $f(x)$ — аналитическая функция. Тогда в силу теоремы Коши задание начального значения $x = x_0$ в начальный момент времени $t = t_0$ однозначно определит дальнейшее движение изображающей точки, по крайней мере до тех пор, пока изображающая точка не подойдет к границе области аналитичности.

Проследим движение во времени изображающей точки, находившейся в момент $t=t_0$ в области аналитичности. Проследим это движение в пределах от $t=-\infty$ до $t=+\infty$, если во время движения изображающая точка не выйдет из области аналитичности, и в пределах от $t=\tau_1$ до $t=\tau_2$ ($\tau_1 < t_0 < \tau_2$), если изображающая точка к моментам τ_1 , τ_2 подходит к границе области аналитичности. При этом движении изображающая точка опишет или точку (в частном случае покоя), или отрезок прямой, или полупрямую, или, наконец, всю прямую, которые таким образом являются возможными *траекториями* (орбитами) движений на фазовой прямой. Характер движения изображающей точки по фазовой прямой не зависит от того, в какой момент это движение началось, так как уравнения движения не зависят явно от времени. С этим связано то обстоятельство, что каждая отдельная траектория на фазовой прямой соответствует не одному движению, а бесконечному множеству движений, начинающихся в различные времена.

Каждым двум точкам A и B , расположенным на одной и той же траектории, соответствует определенный (конечный) промежуток времени, в течение которого изображающая точка проходит расстояние от A до B . Заметим, что изображающая точка, двигающаяся по траектории, не может достигнуть точки равновесия [точки равновесия, как мы знаем, определяются уравнением $f(x)=0$] в конечный промежуток времени. Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы Коши. Действительно, если бы изображающая точка, двигающаяся по закону $x=\varphi(t)$, достигла при каком-то конечном $t=t_0$ состояния равновесия $x=x_0$, то мы имели бы два *различных* решения дифференциального уравнения [первое $x=\varphi(t)$ и второе $x=x_0$], принимающих одно и то же значение при $t=t_0$, что противоречит теореме Коши. Траектория изображающей точки, которая в этом случае асимптотически стремится к состоянию равновесия, не достигая его в конечное время, будет представлять собой или отрезок или полупрямую, концом которой является точка $x=x_0$ (рис. 142). Существенным здесь является то обстоятельство, что сама точка $x=x_0$ не принадлежит к рассматриваемой траектории, а является самостоятельной траекторией. Это ясно в силу того, что какой бы конечный момент времени мы ни взяли, изображающая точка будет находиться на конечном расстоянии от точки $x=x_0$, хотя, может быть, это расстояние и будет очень мало ¹⁾. Сформулируем теперь для фазовой прямой теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий ²⁾.

Рассмотрим движение двух изображающих точек $P_1 \{x=x_1(t)\}$ и $P_2 \{x=x_2(t)\}$, начавших двигаться в один и тот же момент времени $t=t_0$, и проследим их в течение некоторого конечного промежутка времени T , в течение которого изображающая точка P_1 не выходит из области аналитичности. Тогда теорема о непрерывной зависимости

1) Мы не сможем здесь подробно останавливаться на различии между отрезками, которые содержат в себе свои концы, и теми, которые их не содержат. Обыкновенно первые называются сегментами, вторые — интервалами. См., например, Гревиль-Лузин, гл. I.

2) Мы даем теперь несколько иную формулировку этой теоремы, формулировку, которая приспособлена к фазовому пространству.

от начальных условий гласит: каково бы ни было T и каково бы ни было ϵ ($\epsilon > 0$), всегда можно найти такое δ ($\delta(\epsilon T) > 0$), чтобы

$$|x_1(t) - x_2(t)| <$$

для

$$t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

если

$$|x_1(t_0) - x_2(t_0)| < \delta,$$

т. е. что всегда можно выбрать начальные значения настолько мало отличающимися друг от друга, чтобы движения изображающих точек за данный промежуток времени T как угодно мало отличались друг от друга.

Перейдем теперь к исследованию траекторий на фазовой прямой в зависимости от вида функции $f(x)$.

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x . Если уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней, то все движения имеют одну и ту же траекторию, совпадающую со всей фазовой прямой. Если же $f(x)$ имеет действительные корни $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, ..., $x = x_k$, то могут быть траектории различных типов:

- а) состояния равновесия,
- б) интервалы между двумя корнями,
- в) интервалы между одним из корней и бесконечностью (полупрямые).

На каждой траектории движение происходит в какую-нибудь определенную сторону, так как $f(x)$ не меняет знака на траектории. Если $f(x) > 0$, то изображающая точка движется вправо; если $f(x) < 0$, то изображающая точка движется влево; точки, где $f(x) = 0$, как мы уже говорили, соответствуют состояниям равновесия. Зная вид кривой $z = f(x)$ и пользуясь этими соображениями, можно разбить фазовую прямую на траектории и указать направление движения изображающей точки по траекториям¹⁾. Пример такого построения приведен на рис. 143. Разбитая на траектории фазовая прямая дает наглядное отображение возможных движений рассматриваемой динамической системы, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка. Очевидно, что основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия. Зная состояния равновесия и их устойчивость, мы можем нарисовать себе качественную картину возможных движений. В частности, отсюда сразу видно, что в случае аналитичности $f(x)$ на всей прямой в системе не возможны периодические движения. Поведение интегральных кривых на плоскости t, x можно установить, если известен характер движений изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость t, x , причем фазовую прямую совместим с осью x . Пусть изображающая точка двигается по фазовой

1) Стрелками на фазовой прямой указывается направление движения изображающей точки.

прямой. Построим на плоскости t, x точку с абсциссой t и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси x в данный

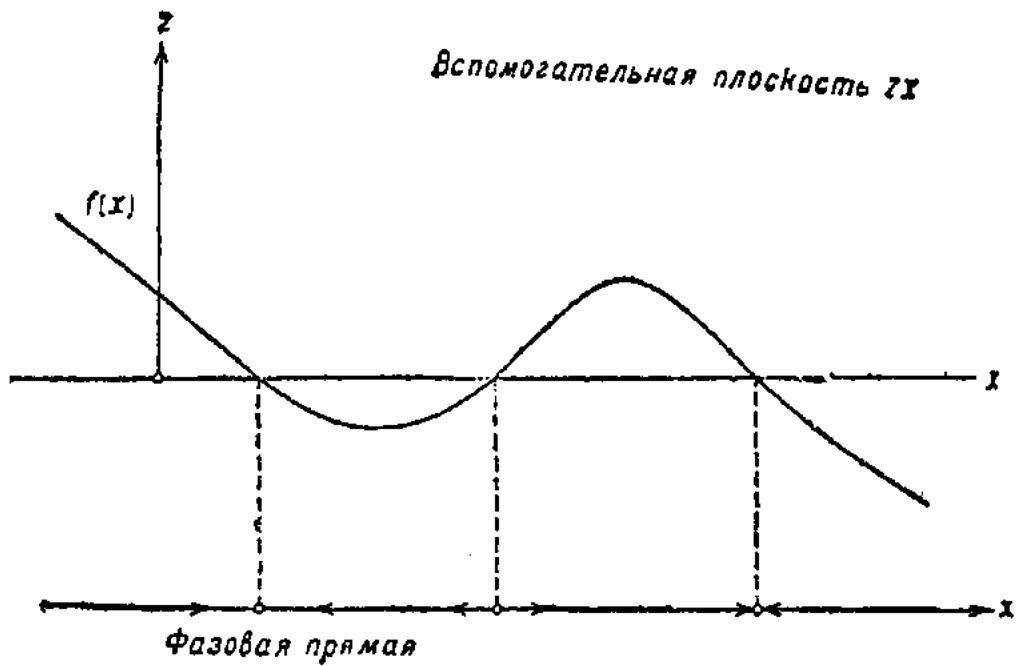


Рис. 143.

момент t . Абсцисса этой точки есть время и поэтому меняется; ордината, вообще говоря, тоже меняется, так как изображающая точка движется. Следовательно, наша точка будет двигаться на плоскости t, x ,

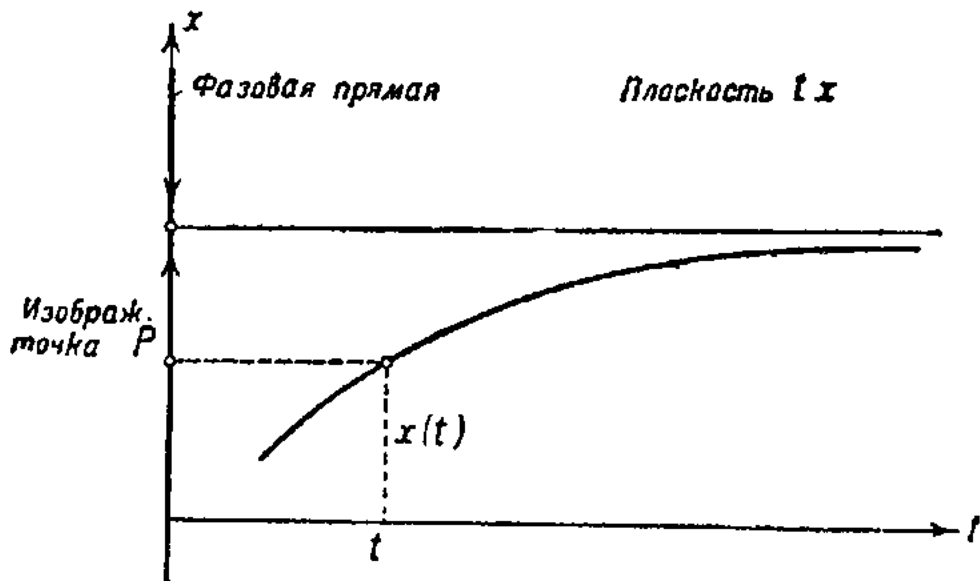


Рис. 144.

описывая какую-то кривую. Эта кривая и будет интегральной кривой нашего уравнения (рис. 144).

§ 6. Устойчивость состояний равновесия

В свое время мы дали уже определение устойчивости состояния равновесия, следуя Ляпунову. Посмотрим, как выглядит это определение для рассматриваемого случая и каким образом возможно аналити-

чески распознавать устойчивость или неустойчивость состояний равновесия.

В нашем случае состояние равновесия $x = x_0$ будет устойчиво по Ляпунову, если, задав сколь угодно малое ϵ , можно всегда найти такое δ , что

$$|x(t) - x_0| < \epsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leq t < +\infty, \quad \text{если} \quad |x(t_0) - x_0| < \delta.$$

Ляпунов дает аналитический рецепт исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим сперва самый рецепт, а затем дадим его обоснование.

Пусть нас интересует устойчивость состояния равновесия $x = x_0$. Так как мы подразумеваем при этом устойчивость по Ляпунову, то мы интересуемся малыми отклонениями от состояния равновесия. Положим, $x = x_0 + \xi$; тогда ξ — отклонение от состояния равновесия. По нашему предположению $f(x)$ — аналитическая функция. Переходя от переменной x к переменной ξ в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (222)$$

получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{2}f''(x_0)\xi^2 + \dots$$

или, так как $f(x_0) = 0$, то уравнение (222) примет вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, \quad (223)$$

где

$$a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0) \text{ и т. д.}$$

Данный Ляпуновым рецепт исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнении (223) нелинейные члены. Мы получим тогда *линейное* уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi, \quad (224)$$

которое носит название вспомогательного уравнения или уравнения первого приближения.

Интеграл этого уравнения находится сразу:

$$\xi = ce^{\lambda t}, \quad \text{где} \quad \lambda = a_1 = f'(x_0).$$

Ляпунов утверждает, что если $\lambda < 0$, то решение $x = x_0$ уравнения (222) устойчиво, т. е. что состояние равновесия устойчиво; если $\lambda > 0$, то состояние равновесия неустойчиво; если $\lambda = 0$, то уравнение первого приближения, вообще говоря, не может дать ответа на вопрос об устойчивости. Таким образом Ляпунов утверждает, что в известных

случаях уравнения, полученные путем отбрасывания нелинейных членов, могут дать правильный ответ на вопрос об устойчивости решений нелинейных уравнений.

В рассматриваемом простом случае весьма нетрудно обосновать этот рецепт исследования устойчивости. Умножим обе части уравнения (223) на ξ ; мы будем иметь:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\xi^2)}{dt} = a_1 \xi^2 + a_2 \xi^3 + \dots = F(\xi). \quad (225)$$

Представим $F(\xi)$ при помощи теоремы Тейлора, замечая, что

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 2a_1,$$

$$F(\xi) = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\vartheta \xi),$$

(где $0 < \vartheta < 1$) и полагая $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$, приведем уравнение (225) к виду:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\vartheta \xi). \quad (226)$$

В силу непрерывности функции $F''(\xi)$, если $F''(0) < 0$ (или, что то же самое, $a_1 < 0$), то и $F''(\vartheta \xi) < 0$ для достаточно малых ξ . Отсюда следует по (226), что и $\frac{d\rho}{dt} < 0$ для тех же ξ .

Если $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$ уменьшается, то уменьшается и ξ и никогда не сможет начать увеличиваться. Отсюда следует, что условие $a_1 = f'(x_0) < 0$ достаточно для устойчивости по Ляпунову рассматриваемого состояния равновесия $x = x_0$, так как в этом случае вокруг $x = x_0$ всегда существует такая область начальных значений, из которой наша изображающая точка будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Совершенно таким же образом можно показать, что при $a_1 = f'(x_0) > 0$ состояние равновесия $x = x_0$ неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом рецепт Ляпунова оправдывается, так как результат исследования устойчивости состояния равновесия при помощи полного нелинейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

совпадает с результатом исследования устойчивости при помощи линейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi,$$

если $a_1 \neq 0$. Основание для указанного таким образом отбрасывания нелинейных членов состоит в том, что нелинейные члены при малых значениях ξ весьма малы по сравнению с основным линейным членом; когда же линейный член равен нулю, то вопрос требует своего исследования.

Мы привели эти рассуждения, связанные с отбрасыванием нелинейных членов, так как аналогичные рассуждения нам будут встречаться при рассмотрении более сложных динамических систем и так как в нашем простейшем случае особенно отчетливо вырисовывается идея, лежащая в основе метода Ляпунова. Но, с другой стороны, в нашем

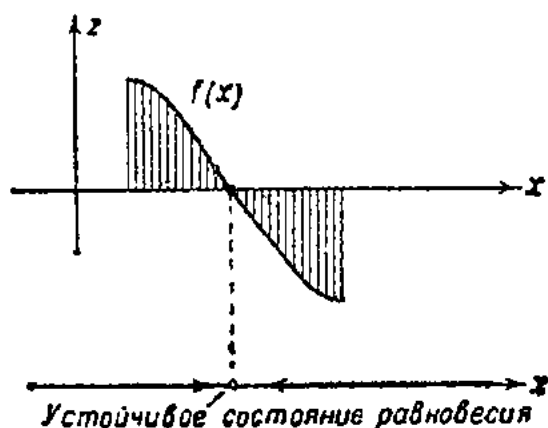


Рис. 145.

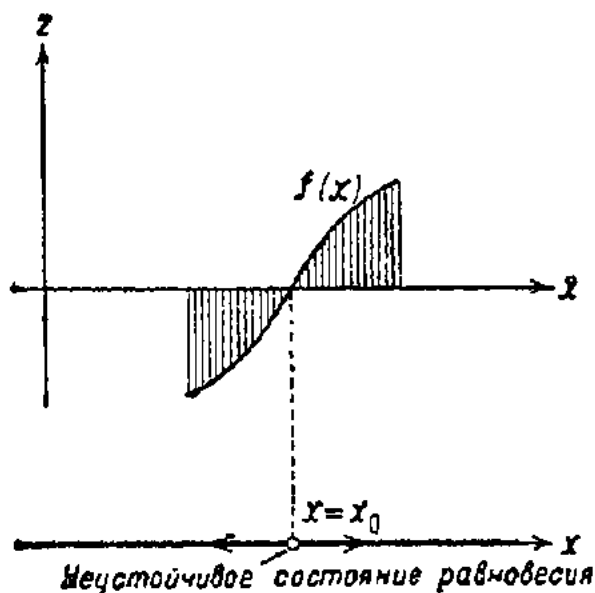


Рис. 146.

конкретном случае одного уравнения первого порядка нетрудно непосредственно, исследуя характер функции $f(x)$ вблизи состояния равновесия $x = x_0$, однозначно заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Так как $f(x_0) = 0$, то здесь могут быть три существенно различных случая:

1) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x = x_0$ с плюса на минус при возрастании x (рис. 145). Отсюда следует на основании предыдущего, что изображающая точка, находящаяся в достаточной близости к состоянию равновесия $x = x_0$, будет асимптотически к нему приближаться при возрастании t . Ясно, что в этом случае состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

2) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x = x_0$ с минуса на плюс при возрастании x (рис. 146). Это значит, что изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, будет удаляться от состояния равновесия; отсюда следует, что состояние равновесия неустойчиво в смысле Ляпунова.

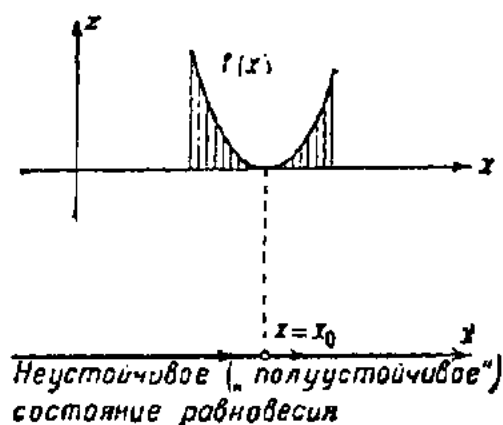


Рис. 147.

3) $f(x)$ не меняет знака вблизи состояния равновесия $x = x_0$ при возрастании x (рис. 147). Это значит, что изображающая точка, помещенная достаточно близко к положению равновесия с одной стороны, будет приближаться к нему, помещенная с другой — удаляться. Ясно, что состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Иногда, несколько неудачно, такое состояние равновесия называют «полуустойчивым».

Для рассматриваемого случая условия устойчивости можно сформулировать еще более кратко. Перенесем начало координат в точку x_0 . Тогда для устойчивости необходимо, чтобы x и f по обе стороны от положения равновесия были разных знаков, так как в противном случае, т. е. когда $\frac{dx}{dt}$ и x одного знака, раз возникшее отклонение от положения равновесия будет возрастать, т. е. состояние равновесия будет неустойчиво.

Все эти случаи могут быть исследованы и аналитически.

Если $a_1 \neq 0$, мы получим тогда как раз то, что мы нашли, следуя Ляпунову.

§ 7. Зависимость характера движений от параметра

Во всякой реальной системе на связь между скоростью и координатой, определяемую уравнением (222), в той или иной степени влияет ряд факторов. Так, например, если мы рассматриваем механическую систему и эта связь обусловлена наличием сухого трения, то величина трения зависит от целого ряда факторов — давления между трущимися поверхностями, их температуры и т. д.

Эти факторы часто считают неизменными, хотя, строго говоря, они никогда не бывают абсолютно постоянными. Поэтому небольшие изменения этих факторов неизбежны во всякой реальной системе, и с этим всегда необходимо считаться; значит, необходимо знать, как изменяется характер движения при небольших изменениях этих факторов.

Кроме того, в целом ряде случаев нас специально интересует вопрос о том, как изменяется характер движения в системе при изменении того или другого фактора. На математическом языке мы можем сформулировать эту задачу следующим образом: правая часть нашего дифференциального уравнения зависит от некоторого параметра λ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda). \quad (227)$$

Нас интересует вопрос, как изменяется характер движений в системе при изменении этого параметра λ . Как мы уже говорили, основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия.

Состояние равновесия рассматриваемой системы дается уравнением:

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (228)$$

Рассмотрим это уравнение на плоскости x, λ . Здесь оно определит некоторую кривую (рис. 148). Каждому значению λ соответствует одно

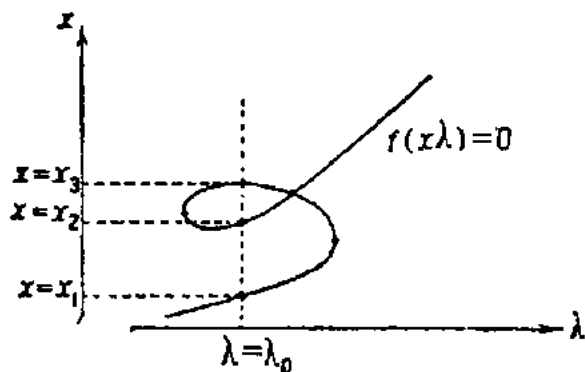


Рис. 148.

или несколько состояний равновесия $x = \bar{x}_1, x = \bar{x}_2, \dots, x = \bar{x}_3$, координаты которых суть функции $\bar{\lambda}$.

По-предыдущему состояние равновесия устойчиво, если

$$f'_x(x, \lambda) < 0, \quad (229)$$

и неустойчиво, если

$$f'_x(x, \lambda) > 0. \quad (230)$$

Мы видим таким образом, что теория зависимости динамической системы, определяемой одним уравнением первого порядка, от параметра в *точности копирует* теорию зависимости состояний равновесия простейшей консервативной системы с одной степенью свободы от параметра.

Совершенно так же, как и раньше, мы имеем здесь дело с линейными рядами состояний равновесия, с бифуркационными значениями параметра, сменой устойчивости и т. д.

Мы не будем повторять уже изложенную теорию бифуркации, а ограничимся лишь рассмотрением вопросов зависимости от параметра на примерах.

1. Вольтова дуга в цепи с сопротивлением и самоиндукцией. Рассмотрим несколько примеров физических систем, описываемых одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Как уже

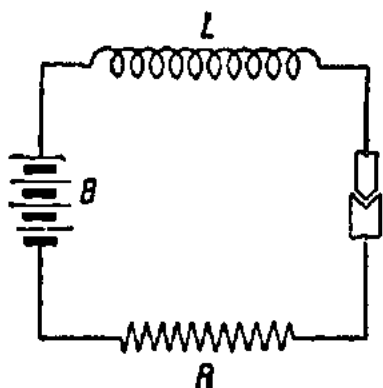


Рис. 149.

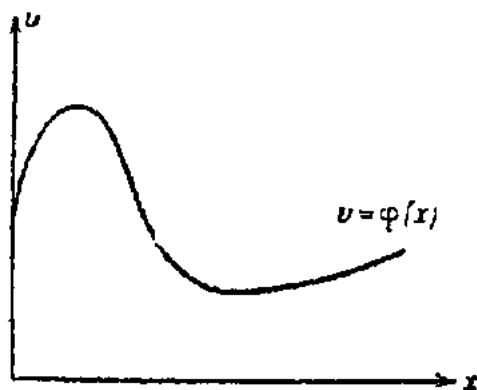


Рис. 150.

было сказано, к одному уравнению первого порядка нас приводит рассмотрение механической или электрической системы с одной степенью свободы, если мы отбрасываем один из ее колебательных параметров. Такова, например, схема вольтовой дуги, включенной на батарею через сопротивление R и самоиндукцию L (рис. 149). Эта схема привела бы нас к уравнению второго порядка, если бы мы учли, например, ту «паразитную» емкость, которой обладают витки катушки самоиндукции. Пренебрегая же этой паразитной емкостью (так же как и всеми другими паразитными параметрами), мы приходим к одному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Нелинейность этого уравнения обусловлена тем, что дуга представляет собой проводник, не подчиняющийся закону Ома, т. е. что сила тока, текущего через дугу, представляет собой нелинейную функцию напряжения на зажимах дуги. Связь напряжения на зажимах дуги с силой тока, текущего через дугу, может быть задана графически в виде так называемой характеристики дуги $v = \varphi(x)$ или $x = \psi(v)$, где v — напряжение, а x — сила тока (рис. 150).

Дифференциальное уравнение, связывающее напряжение и силу тока в такой системе, в силу второго закона Кирхгофа напишется так:

$$L \frac{dx}{dt} + Rx + \varphi(x) = E_0$$

или

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{E_0 - Rx - \varphi(x)}{L}. \quad (231)$$

Состояния равновесия даются условием $f(x) = 0$, т. е. уравнением:

$$E_0 - Rx - \varphi(x) = 0. \quad (232)$$

Чтобы найти корни этого уравнения, обычно в электротехнике строят две вспомогательные кривые — прямую $v = E_0 - Rx$ и характеристику $v = \varphi(x)$ — и находят их точки пересечения (рис. 151). Мы воспользуемся также этими вспомогательными кривыми, чтобы найти их разность (нижняя кривая на рис. 151), которая пропорциональна правой части нашего уравнения (231), т. е. в некотором масштабе изображает функцию $f(x)$. А зная $f(x)$, можно сразу построить траектории на фазовой прямой (рис. 152).

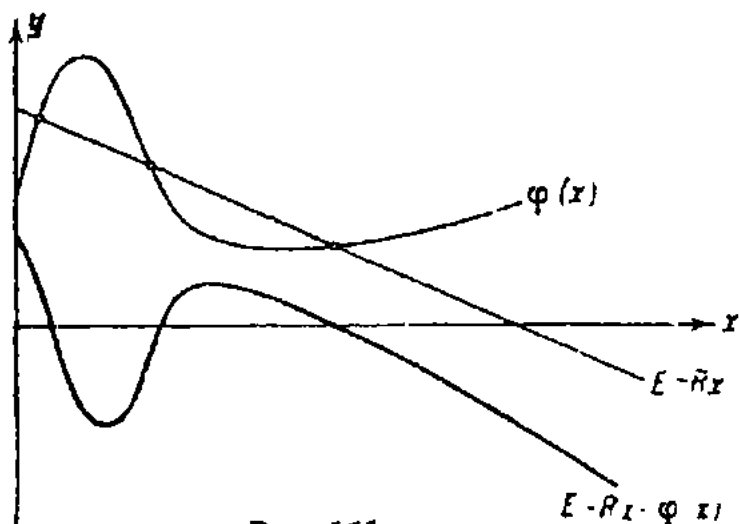


Рис. 151.

В рассматриваемом случае существуют три состояния равновесия $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, из которых, как это вытекает из приведенных выше признаков устойчивости, первое и последнее устойчивы, а среднее неустойчиво.

Установим, как зависит характер движения в нашей динамической системе от параметров, например от E или R .

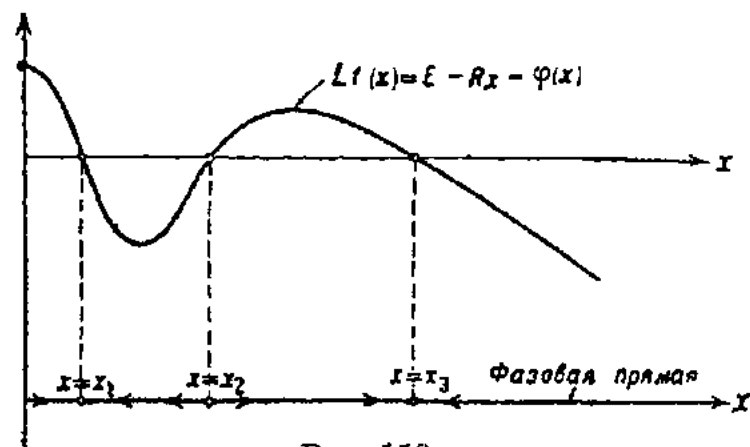


Рис. 152.

Пусть E будет переменный параметр. В согласии с общими правилами строим на плоскости xE кривую $f(x, E) = 0$ или $E - R_0x - \varphi(x) = 0$ (рис. 153). Эта кривая, как видно из чертежа, имеет две точки бифуркации и, следовательно, два бифуркационных значения параметра E : $E = E_1$ и $E = E_2$. Бифуркационное значение параметра $E = E_0$ соответствует столь большому напряжению

батареи (при заданном R), при котором состояния равновесия x_1 и x_2 сливаются и исчезают, так что при дальнейшем увеличении E остается только одно устойчивое состояние равновесия $x = x_3$, соответствующее значитель-

ному току. Бифуркационное значение параметра $E = E_0$ соответствует столь малому напряжению батареи (при заданном R_0), что состояния равновесия $x = x_2$ и $x = x_3$ сливаются и исчезают, и мы имеем при дальнейшем уменьшении E лишь одно устойчивое состояние равновесия x_1 , соответствующее незначительному току. Из этой диаграммы следует, что если мы будем медленно и непрерывно изменять E , то в бифуркационных точках мы будем иметь скачкообразные изменения силы тока в цепи дуги. Сила тока будет скачком увеличиваться от x_6 до x_7 и скачком падать от x_4 до x_2 . Картина зависимости стационарного тока от напряжения батареи имеет гистерезисный характер (рис. 154). Аналогично можно построить бифуркационную картину при заданном E и переменном R .

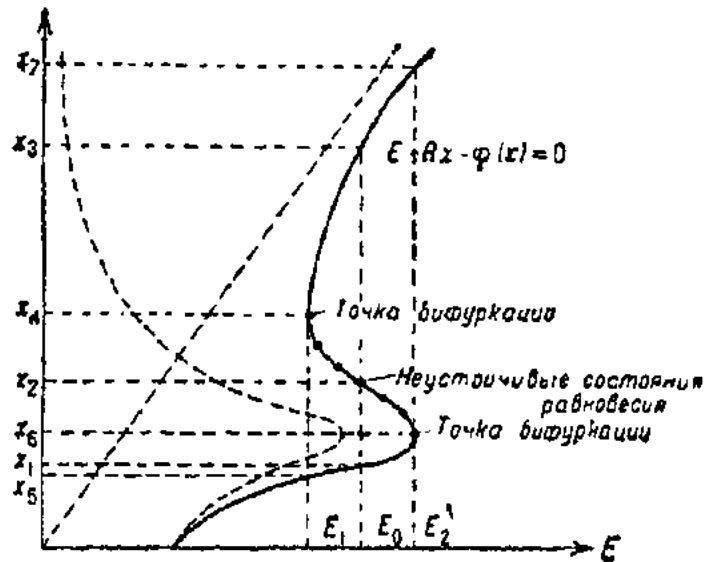


Рис. 153.

2. Однофазный асинхронный мотор. В качестве другого примера рассмотрим однофазный асинхронный мотор. Некоторые недостатки этого типа моторов (в чем заключаются эти недостатки — выяснится при нашем рассмотрении) делают его мало пригодным для работы в обычных условиях, и поэтому асинхронные однофазные моторы изготовляются только очень небольших мощностей и используются только в тех случаях, когда при трогании с места и малых оборотах мотора нагрузка на него мала. Этими условиями определяется область применения однофазных асинхронных моторов — ими пользуются, например, для вращения небольших вентиляторов. При питании статора мотора однофазным переменным током получается зависимость вращающего момента от числа оборотов, примерно указанная на рис. 155. С другой стороны, вращению ротора препятствует трение (в подшипниках) и сопротивление воздуха (движению вентилятора); учитывая как первое («твердое»), так и второе («жидкое») трение, мы можем зависимость момента сил трения от скорости изобразить примерно так, как это указано на рис. 156.

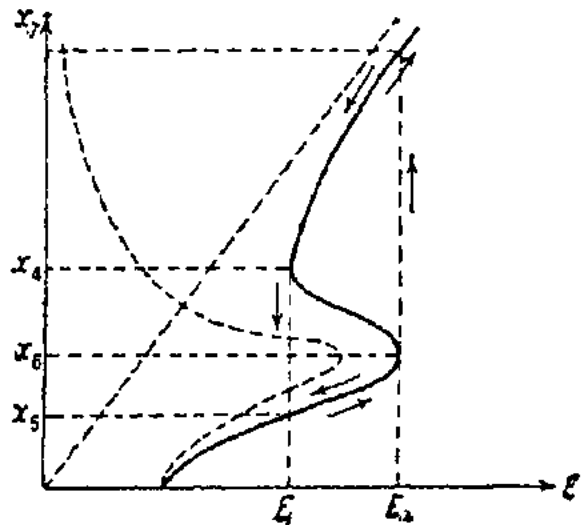


Рис. 154.

Обозначая вращающий момент через $M(\omega)$, момент сил трения через $m(\omega)$ и момент инерции через I , можно написать дифференциальное уравнение движения ротора:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - m(\omega).$$

Мы имеем дело таким образом с одной зависимой переменной — угловой скоростью ω .

Состояния равновесия даются уравнением:

$$M(\omega) - m(\omega) = 0.$$

Чтобы найти корни этого уравнения, строят две вспомогательные кривые $Z = M(\omega)$ и $\varepsilon = m(\omega)$ и находят точки их пересечения (рис. 157).

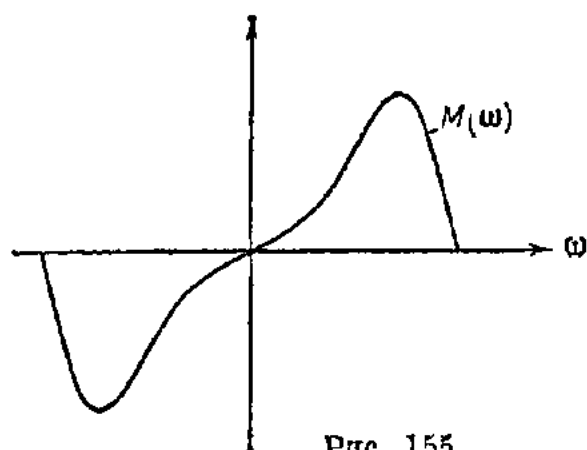


Рис. 155.

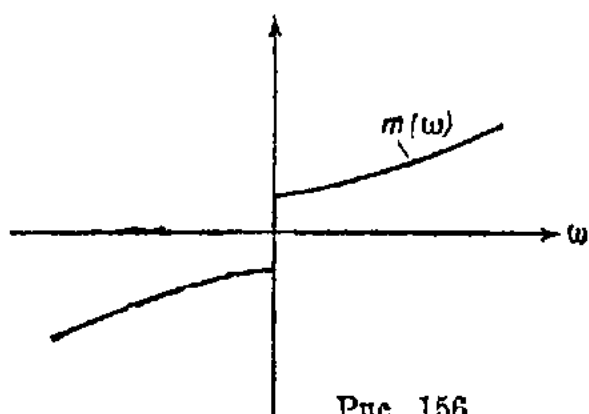


Рис. 156.

Поступая, как в предыдущем примере, найдем функцию $f(\omega)$ и далее построим траектории на фазовой прямой (рис. 158).

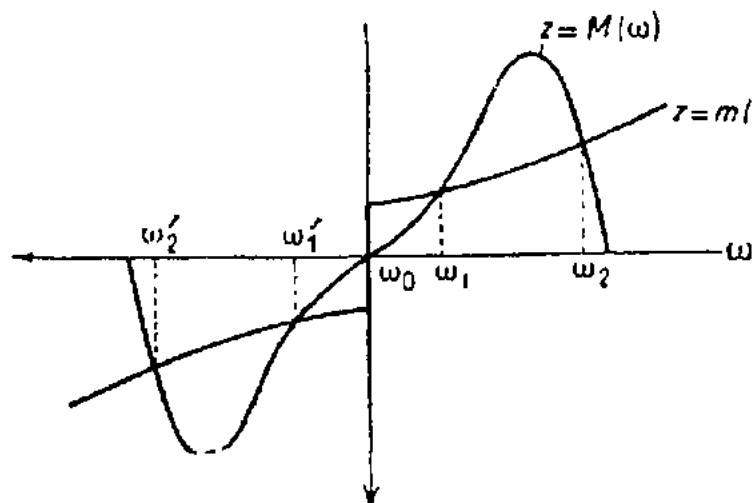


Рис. 157.

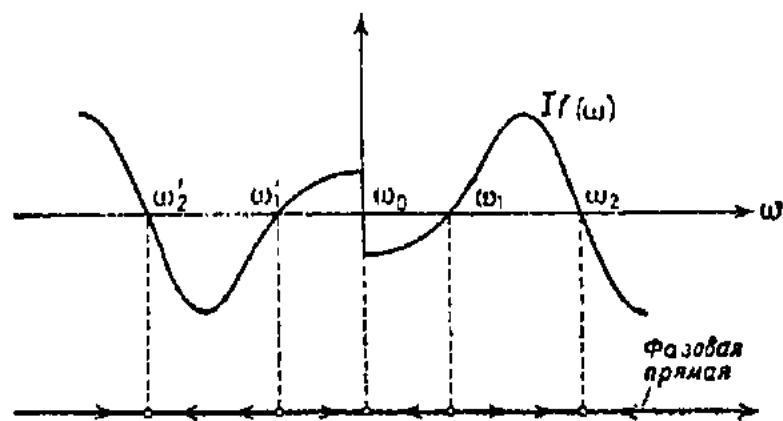


Рис. 158.

В нашем случае мы имеем три устойчивых состояния равновесия: $\omega = \omega_0$; $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega'_2$ и два неустойчивых: $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega'_1$. Из устойчивости состояния $\omega = \omega_0 = 0$, соответствующего полному покою (отсутствие вращения), следует, что ротор, вообще говоря, сам собою не приходит во вращение, его нужно каким-то образом забросить за состояния ω_1 или ω'_1 , т. е. раскрутить его до некоторого числа оборотов ω_1 , после чего он сам доходит до нормального числа оборотов ω_2 . Мотор может вращаться как в ту, так и в другую сторону (два устойчивых состояния равновесия ω_2 и ω'_2), и направление установившегося вращения зависит только от того, в какую сторону «заброшен»

(раскручен) ротор. Для того чтобы избавиться от необходимости раскручивать ротор мотора, употребляют специальные приёмы (добавочные

обмотки, полюса и т. д.), нарушающие симметрию в картине вращения в обе стороны, вследствие чего появляется некоторый начальный вращающий момент и мотор сам трогается с места и, конечно, уже всегда в одну сторону.

Однако начальный вращающий момент с помощью нарушения симметрии нельзя сделать достаточно большим, и поэтому мотор все же плохо трогает с места. Этот недостаток мы и имели в виду выше — он очень сильно ограничивает область применения однофазных асинхронных моторов.

§ 8. «Разрывные» движения

Среди всех движений, которые могут происходить в нелинейной системе, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка, с точки зрения теории колебаний нас главным образом будут интересовать периодические движения. Поэтому естественно, что на вопросе о периодических движениях в вырожденных нелинейных системах мы остановимся особенно подробно. При этом мы уже не сможем ограничиться условием, что функция $f(x)$ в уравнении (222) является аналитической во всей рассматриваемой области. Действительно, рассматривая случай, когда $f(x)$ есть функция, аналитическая на всей прямой, мы убедились, что периодические решения в этом случае невозможны. Более того, мы можем утверждать, что если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (219)$$

функция $f(x)$ однозначна, то непрерывных периодических решений это уравнение не допускает, так как в случае непрерывных периодических движений система должна дважды проходить через одно и то же значение x в противоположных направлениях, т. е. с двумя различными скоростями $\frac{dx}{dt}$.

Таким образом, когда $f(x)$ однозначна, то периодические движения в системе возможны только в том случае, если уравнение (219) хотя бы в некоторых точках не определяет поведения системы. Это может иметь место, во-первых, в тех случаях, когда из условий физической задачи заранее видно, что уравнение применимо только в некоторой ограниченной области. Другой возможный случай, когда само уравнение отказывается служить и не дает ответа на вопрос о поведении системы для каких-либо значений.

Когда система достигает такого состояния, при котором дальнейшее ее поведение уже не может быть определено из уравнений, для определения дальнейшей судьбы системы необходимо ввести некоторые добавочные постулаты, условия скачка (например, предположение о том, что энергия системы не изменяется скачком). Эти постулаты позволяют проследить дальнейшие движения системы и в некоторых случаях получить периодические движения.

В качестве примера первого случая может служить упругий шарик, движущийся без трения по направляющей между двумя параллель-

ными твердыми стенками, находящимися на расстоянии $2a$ (рис. 159). Уравнение движения шарика $\frac{dy}{dt} = 0$, откуда $y = v_0$ (y — скорость шарика). Наперед ясно, что это уравнение перестает быть справедливым, когда шарик достигает стенки. Для определения дальнейшего поведения шарика мы вводим добавочное предположение, что шарик отражается по закону упругого удара, и дальнейшее движение его определяется тем же уравнением с начальным условием $y = -v_0$. Как легко видеть, шарик будет совершать колебания между двумя стенками. Характер движений на фазовой плоскости, сопровождающийся скачками представляющей точки, изображен на рис. 160а. Форма колебаний изображена на рис. 160б.

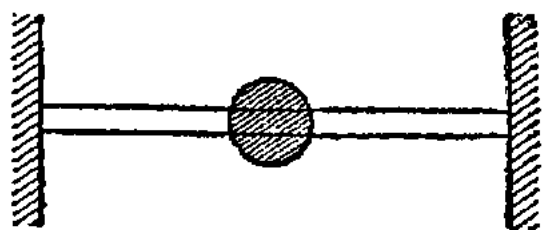


Рис. 159.

Что касается второй возможности, то нас будут интересовать главным образом также случаи, когда $f(x)$ обращается в бесконечность (само собой разумеется, что это — случай нарушения аналитичности). В таком случае элементарная математическая теория [развитая в предположении аналитичности $f(x)$] уже не может дать ответа на вопрос о поведении системы. Для определения дальнейшей судьбы системы требуется ввести какие-то новые постулаты, подсказанные физическими соображениями, например те же условия скачка. Эти постулаты снова могут нас привести к периодическим движениям. Мы рассмотрим в дальнейшем ряд примеров, относящихся к этому случаю.

Мы говорили о возможности появления периодических решений вследствие нарушения непрерывности функции $f(x)$. Но периодические решения становятся возможными и в том случае, когда функция $f(x)$ неодно-

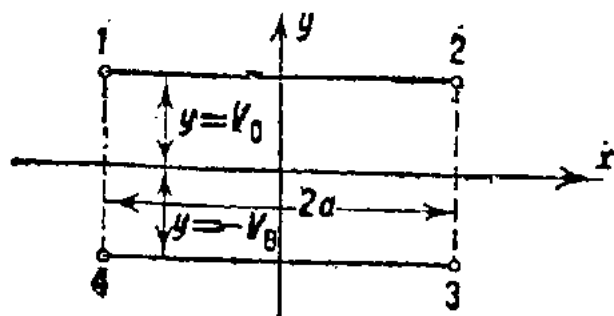


Рис. 160а.

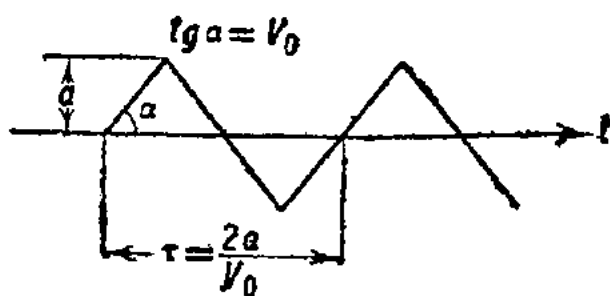


Рис. 160б.

значна, как это видно хотя бы из приведенного к виду (217) уравнения гармонического осциллятора. В дальнейшем на примерах вырожденных автоколебательных систем мы увидим, какая связь может существовать между нарушением непрерывности и появлением неоднозначности.

Перейдем к рассмотрению вырожденной системы, уравнение которой имеет вид:

$$kx = \varphi(x). \quad (233)$$

Как вытекает из сказанного выше, отбрасывая один из колебательных параметров, мы, вообще говоря, не исключаем возможности существования периодических движений в нелинейной системе. Эти решения могут быть непрерывными, если из исходного уравнения x опре-

делается неоднозначно. Если же уравнение однозначно, то периодические решения для x также могут существовать, однако это должны быть решения *разрывные*. Но для того чтобы в системе могли существовать разрывные периодические движения, необходимо, чтобы x могло совершать скачки; если же x не может изменяться скачком, и вместе с тем x однозначно определяется из уравнения (232), то в системе, описываемой этим уравнением, периодические движения вообще невозможны.

Положим для определенности, что x не может совершать скачков, потому что изменение x связано с изменением энергии системы, но зато x может изменяться скачком (к такому случаю мы придем, например, если x есть координата точки, масса которой очень мала, или если x есть заряд на обкладках конденсатора, а самоиндукция в цепи очень мала). Тогда, для того чтобы уравнение (232) допускало непрерывные периодические решения для x (а разрывных решений не может быть, так как x не может изменяться скачком), \dot{x} должно из этого уравнения определяться неоднозначно. Если для x существует периодическое решение, то также периодическое решение должно существовать и для \dot{x} . Но это решение для \dot{x} уже может быть разрывным, так как \dot{x} может изменяться скачком. При этом если из уравнения (233)

$$\psi'(\dot{x})\ddot{x} = k\dot{x} \quad (234)$$

\dot{x} определяется однозначно, то вообще для \dot{x} возможны только разрывные периодические решения. Для того чтобы эти разрывные периодические движения выделить, мы должны применить условие скачка, которое требует, чтобы при скачкообразном изменении \dot{x} значение x оставалось неизменным. Очевидно, что условие скачка может быть удовлетворено только при том условии, что x и \dot{x} связаны уравнением (232) неоднозначно, т. е. что по крайней мере два разных значения \dot{x} соответствуют одному и тому же значению x . Но ведь это самое условие является необходимым для того, чтобы уравнение (232) допускало непрерывные периодические решения для x . Поэтому, если уравнение (232) допускает непрерывные периодические решения для x , то оно допускает возможность соблюдения условий скачка для \dot{x} .

Итак, если уравнение (233) неоднозначно относительно x , но x не может изменяться скачками, а уравнение (234) однозначно относительно \dot{x} , но зато система допускает скачкообразные изменения x , то существующие в системе периодические движения определяются непрерывными периодическими решениями для x и разрывными периодическими решениями для \dot{x} .

Для отыскания разрывных периодических решений \dot{x} мы должны рассмотреть уравнение относительно \dot{x} , т. е. уравнение:

$$\psi'(\dot{x})\ddot{x} = k\dot{x}.$$

Ясно, что состояние $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ есть единственное состояние равновесия рассматриваемой системы. Вопрос об его устойчивости решается знаком $\psi'(\dot{x})$ при $\dot{x} = 0$. Если $\psi'(0) > 0$, то состояние равновесия не-

устойчиво, так как сколь угодно малая начальная скорость \dot{x} будет возрастать по абсолютной величине в силу того, что x и \ddot{x} одного знака. Следовательно, если система в начальный момент находилась вблизи положения равновесия, то она будет от него удаляться. Далее, если она попадет в точку x_1 , для которой $\varphi'(x) = 0$, т. е. в точку, в которой функция $\varphi(x)$ имеет экстремум, то в этой точке $\ddot{x} = \infty$ — это как раз и есть одна из точек нарушения непрерывности функции $\frac{kx}{\varphi(x)}$ играющей роль $f(x)$ в уравнении (222). Следовательно, система может скачком перейти из этой точки в другую в какое-либо другое состояние, определяемое условием скачка, т. е. требованием, чтобы при скачке x оставалось неизменным. Чтобы сформулировать это условие, мы должны вернуться к уравнению (232). Тогда требование, чтобы x оставалось неизменным при скачке, приводит к условию:

$$\varphi(\dot{x}_1) = \varphi(\dot{x}_2), \quad (235)$$

где \dot{x}_1 — значение \dot{x} до скачка, а \dot{x}_2 — значение \dot{x} после скачка. В силу неоднозначности функции обратной $\varphi(x)$ это условие, как мы уже показали, всегда может быть соблюдено; не нарушая условий скачка, система может мгновенно перейти в другое состояние, снова совместимое с уравнением (233). Дальнейшее движение системы будет происходить непрерывно и описываться уравнением (233) до тех пор, пока снова система не придет в точку x_3 , для которой $\varphi'(x_3) = 0$ и поэтому $\ddot{x} = \infty$. Из этой точки [опять-таки являющейся точкой нарушения непрерывности функции $\frac{kx}{\varphi(x)}$] снова происходит скачок в другое состояние (для которого $\dot{x} = \dot{x}_4$), совместимое с уравнением (233), снова непрерывное движение и т. д. Вопрос о том, вернется ли в конце концов система в одно из тех состояний, которое она уже однажды прошла, т. е. будет ли периодическим процесс, состоящий из непрерывных движений, подчиняющихся уравнению (233), и из скачкообразных изменений состояния, подчиняющихся условию скачка (235), можно решить, только сделав некоторые добавочные предположения относительно свойств системы и в частности вида функции $f(x)$.

Прежде всего мы можем сделать одно предположение относительно функции $\varphi(x)$, подсказываемое чисто физическими соображениями. Функция $[-\varphi(x)]$, выражающая обобщенную силу трения, при очень больших x не может быть убывающей и, следовательно, при достаточно больших \dot{x} , $\varphi'(\dot{x}) < 0$. Это предположение выражает тот факт, что трение не может быть отрицательным в области очень больших скоростей, ибо для этого система должна обладать бесконечно большим запасом энергии. Но если, при больших \dot{x} , $\varphi'(\dot{x}) < 0$, то, как следует из уравнения (234), x и \ddot{x} — величины разных знаков, и, значит, при больших \dot{x} «скорость» системы \dot{x} направлена к началу координат

(к точке $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$). Поэтому в фазовом «пространстве» (как и в случае линейной вырожденной системы для рассматриваемого случая, фазовое пространство одномерно и представляет собой прямую или вообще некоторую линию на обычной фазовой плоскости x, \dot{x}) движение представляющей точки направлено к началу координат. Но, с другой стороны, состояние равновесия в начале координат по нашему предположению неустойчиво [$f'(0) > 0$].

Так как система не стремится к состоянию равновесия и не уходит в бесконечность, то у нас есть основание ожидать, что в системе будет происходить единственно возможный (для систем с одной степенью свободы) вид стационарного движения — именно периодический процесс — «разрывные» автоколебания. Как происходят эти разрывные автоколебания и как они устанавливаются, мы выясним на конкретных примерах, которые сейчас будут приведены. Остановимся, однако, раньше на одном общем соображении, относящемся к вопросу о начальных условиях и характере установления периодического процесса. Как уже неоднократно указывалось, при той идеализации, которую мы ввели, мы лишены возможности рассматривать самый механизм скачка. Но, не рассматривая подробно процесса, мы при помощи условий скачка определяем то конечное состояние, в которое приходит система в результате скачка. Это конечное состояние будет однозначно определено, если тому значению x_1 , при котором происходит скачок, соответствует еще только одно значение x_2 , удовлетворяющее уравнению (233), т. е. лежащее на фазовой кривой. Соблюдение этого условия зависит от вида функции $f(x)$. Как мы увидим в дальнейшем, для реальных систем, которые мы будем рассматривать, это условие соблюдается в силу того, что скачки происходят в экстремальных значениях функции $f(x)$. Поэтому когда представляющая точка достигает экстремального значения, то условие скачка однозначно определяет дальнейшее поведение системы. Однако есть вопросы, на которые мы при помощи нашей идеализации не всегда можем получить однозначный ответ. Именно, на вопрос о характере установления автоколебательного процесса в вырожденной системе мы, вообще говоря, не можем дать исчерпывающего ответа и вот почему. Ведь в автоколебательной вырожденной системе, как и в вырожденной линейной системе, могут быть заданы два начальных условия, между тем как интеграл уравнения содержит только одну произвольную постоянную и, следовательно, вообще говоря, начальные условия находятся «в конфликте» с уравнением. Как и в случае линейной системы, мы должны предположить, что «конфликт» ликвидируется скачком системы в состояние, совместимое с уравнением, причем по условию скачка при этом будет оставаться неизменной энергия системы, т. е. не должна изменяться координата x . Однако в некоторых случаях этого условия может оказаться недостаточно для того, чтобы однозначно определить место на фазовой кривой, в которое скачком придет система из начального состояния. Ведь, как мы уже указывали, для того чтобы существовали непрерывные решения для x , нужно, чтобы x и \dot{x} были связаны

неоднозначно. В силу этой неоднозначности в известных областях начальных значений не может быть дан однозначный ответ и на вопрос о том, в какую точку фазовой линии скачком приходит система из начального состояния. Но, как мы убедимся на конкретных примерах, эта неоднозначность отражается лишь на движении представляющей точки в самом начале процесса. После того как система скачком перешла в ту или иную точку фазовой линии, дальнейшее ее движение однозначно определено. На вопрос же о движении в самом начале до установления мы, вообще говоря, не можем дать ответа, оставаясь на почве принятой нами идеализации, и должны учесть те паразитные параметры, которыми мы пренебрегли. Как только мы учтем эти параметры, конфликт между уравнением и начальными условиями будет ликвидирован, ибо порядок уравнения и число констант интеграции повысятся на единицу. При этом исчезнет, конечно, и неоднозначность, но для решения вопроса потребуются уже рассмотрение невырожденной системы, описываемой уравнением второго порядка. Методы, которые будут изложены в следующей главе, позволят дать качественный ответ на этот вопрос. Пока при рассмотрении вырожденных систем мы должны ограничиться только указанием на возможность такой неоднозначности. Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров автоколебаний в вырожденных системах.

§ 9. Механические разрывные колебания

В качестве первого примера разрывных автоколебаний в вырожденных системах мы рассмотрим колебания, которые при известных условиях могут совершать механические тела, испытывающие большое трение, но обладающие малой массой^[90]. Для конкретности мы можем считать, что речь идет об устройстве, которое мы уже рассматривали в первой главе, о массе на движущейся ленте (рис. 37).

Если эта масса мала, а трение велико, то о характере движений в системе можно утверждать следующее. Поскольку сила трения в системе изменяется в таких широких пределах, она в некоторых областях настолько сильно нарушает равенство между произведением массы на ускорение и силой упругости (или вообще восстанавливающей силой), что весь процесс отчетливо распадается на две существенно различные области:

1) Область, в которой сила упругости гораздо больше произведения массы на ускорение и где, следовательно, движение определяется главным образом силой упругости и силой трения. В этой области координата системы изменяется существенно, а скорость изменяется сравнительно медленно, т. е. ускорение невелико. При этом вследствие малости ускорений и массы произведение этих величин в уравнении движения не играет заметной роли, но вследствие больших изменений координаты существенно изменяется сила упругости системы.

2) Область, в которой произведение массы на ускорение гораздо больше, чем переменная составляющая силы упругости, и где, следовательно, движение определяется главным образом произведением массы на ускорение и силой трения. Так как масса мала, то ускорения

в системе очень велики. В этой области координата системы не успевает заметно измениться, но резко изменяется скорость системы. Так как скорости в системе всегда ограничены, а ускорения в этой второй области очень велики, то эта область проходит системой за очень короткий промежуток времени по сравнению с временем, в течение которого проходит первая область.

Именно поэтому произведение массы на ускорение в этой области играет существенную роль, несмотря на малую массу, а упругость не играет заметной роли, так как координата, а значит, и сила упругости, не успевает заметно измениться. В случае малого трения и колебаний, близких к синусоидальным, такое разделение на две области, конечно, невозможно, так как обе величины — произведение массы на ускорение и сила упругости — все время приблизительно равны, и там, где мала первая, мала и вторая, и наоборот.

Заметим кстати, что это разделение применяется в механике для решения целого ряда задач и не является специфичным для колебательных движений, оно может быть проведено для всякого движения большим трением; например, для шарика, падающего в сопротивляющейся среде, ускорение играет роль только в начале движения, а затем скорость устанавливается, и величина ее и вообще все движение определяется только силой тяжести и трением.

Итак, предположим, что масса системы исчезающе мала и поэтому в первой области, где ускорения невелики, она не играет никакой роли. Сила же трения $F(\dot{x})$ является некоторой функцией скорости. Тогда во всей этой области движение определяется дифференциальным уравнением первого порядка:

$$kx = -F(\dot{x}).$$

Однако этим уравнением мы можем охватить только именно первую область. Дифференцируя это уравнение по времени, мы получим:

$$F'(\dot{x}) \ddot{x} = -k\dot{x}.$$

Если $F'(0) < 0$, т. е. характеристика трения спадающая, то состояние равновесия неустойчиво, и, следовательно, в этом положении система не сможет оставаться в покое; далее, если в областях, где скорость \dot{x} имеет конечную величину, $F'(\dot{x})$ — крутизна характеристики трения — стремится к нулю, то ускорение \ddot{x} стремится к бесконечности, т. е. система выходит за пределы той области, где произведением массы на ускорение можно пренебречь, несмотря на малую массу. Конечно, при нашей идеализации такой результат — бесконечно большое ускорение — не является противоречием, поскольку мы пренебрегли массой, так как при отсутствии массы мы можем допустить, что скорость изменяется скачками. Таким образом в нашей идеализированной проблеме границы первой области определяются теми состояниями системы, в которых $F'(\dot{x}) = 0$ и $\ddot{x} = \infty$.

Во второй области, где ускорения велики, уже нельзя пренебречь даже малой массой, но с точки зрения изучения колебательного про-

цесса и вопросов, которые нас при этом интересуют, мы можем в нашей идеализированной проблеме просто отказаться от рассмотрения этой второй области и все же получить во многих случаях удовлетворительный ответ на все интересующие нас вопросы. Действительно, в этой второй области за короткие промежутки времени происходят очень быстрые изменения скоростей при мало изменяющихся координатах, и время прохождения этой области очень мало по сравнению с временем прохождения первой области. Следовательно, вторая область мало влияет на характер колебательного процесса и не изменяет существенно его периода (время мало), «амплитуды» (малы изменения координат) и формы (очень быстрые изменения производной, происходящие за очень короткий промежуток времени).

Однако, отказываясь от рассмотрения второй области, мы должны определить дальнейшую судьбу системы, т. е. определить то конечное состояние, в которое приходит система после того, как она прошла всю вторую область. Для этого мы должны применить «условие скачка», которое определяет, куда придет система после того, как она пройдет всю вторую область. Скачок, по предположению, произойдет в такое новое состояние, которое соответствует прежней энергии системы. Мы пренебрегли массой тела, значит, мы должны считать, что оно не обладает кинетической энергией, и вся энергия системы является потенциальной энергией и заключается в упругой деформации. Поэтому при скачке не будет изменяться координата системы (так как она определяет величину упругой деформации), и скачок может происходить только в скорости. Кроме того, так как после скачка система снова попадает в первую область, то она снова должна подчиняться уравнению:

$$kx = -F(\dot{x}), \quad (236)$$

и так как при скачке x осталось неизменным, то скачок скорости может произойти только на такое новое значение скорости, которое соответствует прежней величине силы трения $F(\dot{x})$. Для того чтобы это условие могло быть выполнено, сила трения должна быть однозначной функцией скорости, и тем значениям $F(\dot{x}_1)$, при которых $F'(\dot{x}_1) = 0$, т. е. экстремальным значениям силы трения, должны соответствовать другие (равные по величине экстремальным) значения $F(\dot{x})$, но при других значениях аргумента (скорости \dot{x}). Реальные характеристики трения обычно удовлетворяют этому требованию; если бы это требование однозначности не было соблюдено, то условия скачка не могли бы быть удовлетворены. (Однако и в этом случае могут быть сделаны некоторые указания о характере «скачка», которые будут приведены ниже.) Как мы увидим, для реальных характеристик трения постулированный нами скачок оказывается не только возможным, но и неизбежным, и условия его вполне однозначны. Таким образом дифференциальное уравнение (236) вместе с условием скачка вполне определяет движение системы.

Для того чтобы рассмотреть эти движения и выделить из них периодические, мы должны прецизировать вид функции $F(\dot{x})$. При этом прежде всего возникает вопрос о том, какой вид имеют реальные ха-

характеристики трения и обладают ли они свойствами, необходимыми для того, чтобы можно было при помощи разрывной трактовки, т. е. вводя в рассмотрение скачкообразные изменения скорости, объяснить существование периодических движений в рассматриваемой системе.

Эти свойства, как уже указывалось, должны быть следующие: характеристика трения должна иметь падающий участок и хотя бы по одной точке максимума и минимума. Скорость будет испытывать скачок (при неизменной координате системы) в точках экстремума и меняться непрерывно на участке от скорости, приобретенной после скачка, до скорости в следующей экстремальной точке. Реальные характеристики трения, которые мы уже приводили (на рис. 38) в общих чертах, обладают необходимыми свойствами. Нужно лишь немного идеализировать их вначале при малых скоростях, чтобы удовлетворить поставленным выше требованиям наличия падающего участка и двух экстремальных значений.

Принимая изображенную на рис. 161 характеристику трения (для удобства дальнейшего рассмотрения она расположена влево от оси ординат), рассмотрим такую конкретную задачу: малая масса m насажена в виде колодки с большим трением на вращающийся равномерно вал и укреплена на станине при помощи пружин. Заметим кстати, что это устройство представляет собой (конечно, сильно схематизированную) модель обычной тормозной колодки или зажима Прони, и поэтому все сказанное ниже относительно колебаний в такой системе, повидимому, может служить упрощенной теорией вибрации тормозов и колебаний зажима Прони, часто наблюдаемых на практике.

Уравнение движения этой колодки (мы считаем момент инерции ее равным нулю) имеет вид:

$$r \{ F [(\Omega - \dot{\varphi}) r] \} = k\varphi, \quad (237)$$

где k — коэффициент упругости системы, т. е. величина момента силы, необходимого для того, чтобы закрутить систему на угол, равный единице, Ω — угловая скорость вала, $\dot{\varphi}$ — абсолютная угловая скорость колодки, r — радиус колодки, F — функция, выражающая зависимость силы трения от относительной скорости.

Чтобы установить наиболее типичные черты движения, определяемого этим уравнением, мы вводим схематизированную характеристику трения (рис. 161). По оси абсцисс отложена относительная скорость $v = r(\Omega - \dot{\varphi})$, и, следовательно, $v = 0$ соответствует движению колодки вместе с валом, а $v_0 = r\Omega$ соответствует $\dot{\varphi} = 0$, т. е. отсутствию

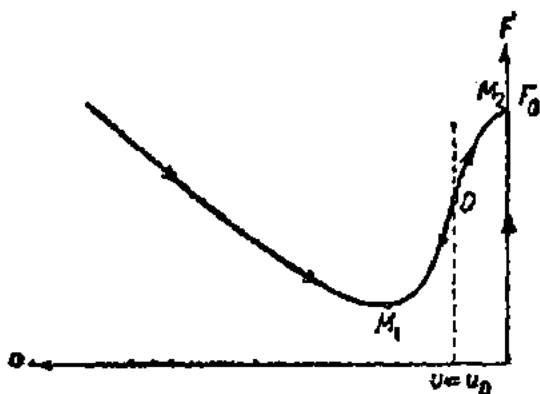


Рис. 161.

движения колодки в пространстве. Справа от $v_0 = r\Omega$ лежит область движений колодки в том же направлении, в каком движется вал, а слева от v_0 — область движений колодки в направлении, противоположном движению вала. Так как стационарное движение колодки с постоянной скоростью $\dot{\varphi}$ в рассматриваемой модели невозможно, то $\dot{\varphi} = 0$ есть единственное состояние равновесия.

При рассмотрении этой характеристики с точки зрения интересующих нас вопросов необходимо иметь в виду уже неоднократно отмечавшееся нами обстоятельство. Пока относительная скорость равна нулю, сила трения может иметь любое значение, лежащее ниже величины трения покоя F_0 . Действительно, если $v = 0$, то до тех пор, пока момент упругой силы $k\varphi$ не достигнет значения $F_0 r$, не может возникнуть движения колодки относительно вала, т. е. при $v = 0$ любая сила $k\varphi < F_0 r$ будет уравновешена силой трения; только при этом условии (равновесия всех действующих на колодку сил) она будет оставаться в покое относительно вала независимо от того, находится ли вал в покое или движется с равномерной скоростью, а это и значит, что при $v = 0$ сила трения может иметь любое значение $F < F_0$, т. е. характеристика трения имеет вертикальную ветвь, совпадающую с осью ординат на участке от $F = 0$ до F_0 . Эту вертикальную ветвь (проведенную жирной линией на рис. 161) и необходимо принимать во внимание при рассмотрении интересующих нас вопросов. Именно благодаря наличию этой вертикальной ветви характеристика трения делается неоднозначной, что, как уже указывалось, необходимо для того, чтобы, с одной стороны, могли существовать непрерывные решения для φ и, с другой стороны, могли быть соблюдены условия скачка для $\dot{\varphi}$. Движение колодки мы могли бы изобразить на фазовой прямой. Однако в силу неоднозначности $\dot{\varphi}$ в некоторых областях φ возможны движения по фазовой прямой в обоих направлениях. Вследствие этого изображение движения на фазовой прямой становится ненаглядным. Наглядность представления будет восстановлена, если мы будем изображать движение не на фазовой прямой, а на некоторой, целесообразно выбранной «фазовой кривой», лежащей в обычной фазовой плоскости (в дальнейшем нам еще раз придется прибегать к помощи фазовых кривых). В рассматриваемом случае фазовую плоскость $\varphi, \dot{\varphi}$ мы можем совместить с плоскостью характеристики трения $\dot{\varphi}, F(\dot{\varphi})$, так как мы предположили, что в областях, где происходит непрерывное движение, $rF(\dot{\varphi}) = k\varphi$, т. е. координата и сила трения пропорциональны друг другу и, следовательно, могут быть отложены по одной и той же оси. Поэтому мы для изображения процесса на фазовой плоскости будем пользоваться прямо плоскостью характеристик трения. Кривая $F(\dot{\varphi})$ и есть та фазовая кривая, на которой целесообразно изображать движение системы. Направление движения представляющей точки по этой фазовой кривой определяется по знаку $\ddot{\varphi}$. Для того чтобы определить это направление, мы дифференцируем уравнение (237) и получаем:

$$k\ddot{\varphi} = r^2 F'' [(\Omega - \dot{\varphi}) r] \dot{\varphi}. \quad (238)$$

Следовательно, при $F' > 0$ знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ противоположны, а при $F' < 0$ одинаковы. Если, кроме того, принять во внимание, что $\dot{\varphi}$ меняет знак, проходя через нуль, т. е. при $v = v_0$, то направления движения представляющей точки изобразятся так, как указано на рис. 161 стрелками. Если скорость вращения вала так мала, что v_0 лежит на спадающем участке характеристики, т. е. $F'(\Omega) < 0$ (а этот именно случай изображен на рис. 161), то состояние равновесия $\dot{\varphi} = 0$ неустойчиво. Если же скорость вращения вала достаточно велика, так что v_0 лежит на поднимающемся участке характеристики, то $F'(\Omega) > 0$ (рис. 162) и состояние равновесия $\dot{\varphi} = 0$ устойчиво. Но и в том и в другом случае для достаточно больших $\dot{\varphi}$ представляющая точка всегда движется в сторону малых $\dot{\varphi}$. Это движение в сторону малых $\dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi} < 0$) продолжается до тех пор, пока $\ddot{\varphi}$ не меняет знака. Но, как видно из уравнения (238),

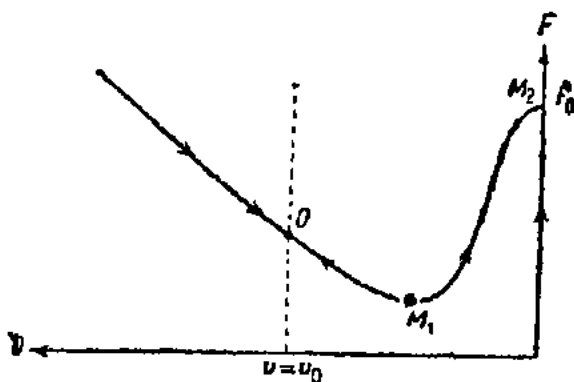


Рис. 162.

$$\ddot{\varphi} = -a \frac{\dot{\varphi}}{F'(\Omega - \varphi)}, \quad \text{где } a > 0. \quad (239)$$

Изменение знака $\ddot{\varphi}$ может произойти либо вследствие изменения знака $\dot{\varphi}$, либо вследствие изменения знака F' . При этом изменение знака как $\dot{\varphi}$, так и F' связано с переходом этих функций через нуль. Значит, если $\dot{\varphi}$ меняет знак вследствие изменения знака φ , то и $\ddot{\varphi}$ при этом также проходит через нуль; если же $\ddot{\varphi}$ меняет знак вследствие изменения знака F' , то при переходе F' через нуль значение $\ddot{\varphi}$ меняется от $+\infty$ к $-\infty$ или наоборот. Первый случай, когда $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ оба проходят через нуль, соответствует, очевидно, состоянию равновесия, второй же случай, когда $\ddot{\varphi} = \pm\infty$, не соответствует, конечно, состояниям равновесия. Но так как в этом случае $\ddot{\varphi}$ меняет знак, то, значит, направление движения представляющей точки различно по обе стороны от такой «точки бесконечного ускорения». Следовательно, представляющая точка при движении по фазовой кривой либо с двух сторон приближается к этой «точке бесконечного ускорения», либо в обе стороны удаляется от нее. В этом отношении «точки бесконечного ускорения» похожи на состояния равновесия и внешне напоминают в первом случае устойчивое, а во втором неустойчивое состояние равновесия. Однако смешивать их с состоянием равновесия ни в коем случае не следует, так как между ними существует весьма принципиальное различие: в то время как в состояниях равновесия скорость равна нулю и поэтому представляющая точка может в состоянии равновесия находиться как угодно долго, в точках же «бесконеч-

ного ускорения» представляющая точка, очевидно, не может оставаться, независимо от того, на какое состояние равновесия «похожа» точка бесконечного ускорения — устойчивое или неустойчивое. Направление движения представляющей точки вблизи точки бесконечного ускорения, т. е. «устойчивость» или «неустойчивость» точки бесконечного ускорения, зависит как от знака φ , так и от знака F' . Например, в рассматриваемом нами случае M_1 является такой точкой бесконечного ускорения, причем $F' < 0$ справа от M_1 и $F' > 0$ слева от M_1 (рис. 161 и 162). Вторая точка, для которой $F'(v) = 0$ и которая является, следовательно, точкой бесконечного ускорения, есть точка M_2 на рис. 161 и 162. С другой стороны, φ меняет знак в точке, соответствующей состоянию равновесия. Если эта точка лежит слева от M_1 , т. е. если состояние равновесия O устойчиво (рис. 162), то представляющая точка уходит в обе стороны от M_1 и M_1 напоминает неустойчивое состояние равновесия. Если же состояние равновесия лежит справа от M_1 , причем в этом случае оно неустойчиво (рис. 161), то точка M_1 напоминает устойчивое состояние равновесия (точка M_2 в обоих случаях напоминает устойчивое состояние равновесия). Однако, как уже сказано, «устойчива» или «неустойчива» точка бесконечного ускорения, представляющая точка не может в ней остаться и должна из нее уйти, причем способ ухода в обоих случаях совершенно различный. В этом отношении «устойчивая» и «неустойчивая» точки бесконечного ускорения оказываются существенно различными. Если представляющая точка оказалась (например в силу начальных условий) в «неустойчивой» точке бесконечного ускорения, она из этой точки может уйти по фазовой кривой с конечной скоростью. Поэтому если даже в этой точке скачок и возможен, так как $\ddot{\varphi} = \infty$ и условия скачка могут быть соблюдены, но в случае «неустойчивой» точки бесконечного ускорения скачок не неизбежен, так как представляющая точка может из этой точки уйти и без этого. Следовательно, судьба системы, попавшей в «неустойчивую» точку бесконечного ускорения, не может быть однозначно определена, если условия скачка могут быть соблюдены. Эта неоднозначность является результатом нашей идеализации, результатом пренебрежения массой системы. Но так как в «неустойчивую» точку бесконечного ускорения система не может притти сама, а может быть только «заброшена» определенными начальными условиями, то неоднозначность возникает только при некоторых определенных начальных условиях. Мы увидим в дальнейшем, что некоторые типы начальных условий часто приводят к неоднозначности и что наша идеализация вообще позволяет дать однозначный ответ на вопрос о поведении системы в начале процесса только при некоторых весьма специальных начальных условиях. (Наличие «неустойчивой» точки бесконечного ускорения не всегда, однако, вносит неоднозначность; мы встретимся и с такими случаями, когда скачок из «неустойчивой» точки бесконечного ускорения вообще невозможен, так как условия скачка вообще не могут быть соблюдены.) Если же точка бесконечного ускорения является «устойчивой», то представляющая точка, с одной стороны, не может в ней оставаться, а с другой —

не может из нее уйти по фазовой кривой, так как уравнение движения предписывает движение по направлению к «устойчивой» точке, а не от нее. Выход из этого конфликта только один — скачок представляющей точки из «устойчивой» точки бесконечного ускорения в какую-то другую точку фазовой кривой. Таким образом в случае «устойчивой» точки бесконечного ускорения скачок не только возможен, но и неизбежен. Но при этом должно быть соблюдено условие скачка, т. е. φ не должно изменяться, но, значит, и $F(\dot{\varphi})$ должно получить прежнее значение, так как $rF'(\dot{\varphi}) = k\varphi$. Следовательно, представляющая точка может совершать скачки только в горизонтальном направлении — параллельно оси $\dot{\varphi}$. Все сказанное относительно точки M_1 относится и к точке M_2 .

Исходя из рассмотрения приведенной характеристики трения, можно сразу сделать вывод о характере движений колодки и убедиться, что при $F'(\Omega) < 0$ колодка совершает периодическое движение. Вначале колодка «захвачена» валом и вращается вместе с ним равномерно со скоростью Ω , при этом пружина растягивается — упругая сила возрастает, но вместе с тем возрастает и сила трения, все время оставаясь равной упругой силе. Относительная скорость колодки при этом равна нулю. Изображающая точка на фазовой плоскости движется с постоянной фазовой скоростью по участку AB (рис. 163). Когда момент упругой силы становится равным моменту силы трения покоя, происходит скачкообразное изменение скорости, скорость изменяется по величине и направлению при неизменном растяжении пружины.

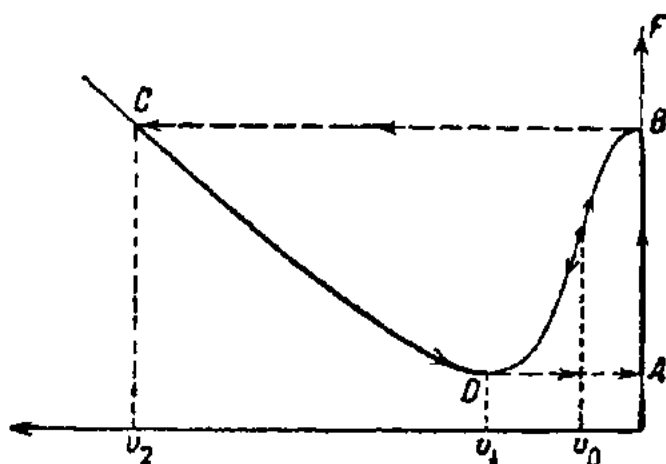


Рис. 163.

Практически пружина при «скачке» немного сжимается, так как скачок происходит не мгновенно, но чем меньше момент инерции колодки, тем меньше сжатие пружины. Порядок величины изменений координаты при скачке скорости можно примерно оценить, исходя из следующих соображений: — так как система все же обладает некоторым моментом инерции, который может быть вычислен, то связанное с изменением скорости изменение кинетической энергии может быть подсчитано. Если подсчитать ту кинетическую энергию, которую получает система при «скачке» скорости, и предположить, что всю эту энергию система получает за счет уменьшения энергии пружины, то можно определить то максимальное возможное уменьшение растяжения пружины, которое происходит при «скачке» скорости. В рассматриваемой модели это сокращение пружины при скачке может быть сделано весьма малым. Поэтому при скачкообразном изменении скорости координату можно считать неизменной. Следовательно, сила упругости и сила трения остаются неизменными (вернее, почти неиз-

менными), и представляющая точка перескакивает в горизонтальном направлении в точку C , соответствующую тому же значению силы трения, т. е. $F(v_0) = F(0) = F_0$ (рис. 163).

Далее происходит непрерывное изменение скорости и координаты, причем движение определяется уравнением (237) и происходит по участку CD на рис. 163 по направлению к точке минимума. Если бы скорость вала Ω была такова, что $F'(\Omega) > 0$, то $v_0 = r\Omega$ лежало бы в поднимающейся части характеристики (рис. 162) и состояние равновесия было бы устойчиво. Дойдя до него, представляющая точка в нем осталась бы. Если же Ω такова, что $F'(\Omega) < 0$ (рис. 163), то движение доходит до точки v_1 , где $F = F_{\min}$ и $F'(v_1) = 0$. В этой точке снова происходит скачок скорости при неизменной координате на соответствующую F_{\min} точку A вертикального участка AB характеристики. Дальше движение повторяется снова таким же образом; колодка совершает автоколебания. Условие возбуждения этих автоколебаний есть, очевидно, $F'(\Omega) < 0$. Если это условие соблюдено, то колодка совершает «разрывные» колебания.

«Амплитуда» этих колебаний φ_a легко может быть определена по разности значений функции F : $F_{\min} - F_0$. Эта «амплитуда»

$$\varphi_a = \frac{r}{kR} [F_0 - F_{\min}].$$

Для вычисления периода нужно подсчитать время движения изображающей точки от A до B и от C до D (рис. 163). Что же касается участков от B до C и от D до A , то теоретически они проходятся мгновенно, практически настолько быстро, что на периоде это заметно не сказывается. Так как на участке AB $\dot{\varphi} = \Omega$, то время прохождения его

$$T_1 = \frac{\varphi_a}{\Omega} = \frac{r}{kR\Omega} [F_0 - F_{\min}].$$

Время T_2 прохождения участка CD определяется интегрированием уравнения движения (238), которое для рассматриваемого случая имеет вид:

$$-r^2 F'(\Omega - \dot{\varphi}) \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = k\dot{\varphi},$$

откуда

$$T_2 = \int_{\dot{\varphi}_1}^{\dot{\varphi}_2} dt = -\frac{r^2}{k} \int_{\dot{\varphi}_1}^{\dot{\varphi}_2} \frac{F'(\Omega - \dot{\varphi})}{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}.$$

Таким образом, зная $F'(\Omega - \dot{\varphi})$ в виде графика, можно найти T_2 графическим интегрированием функции $\frac{F'(\Omega - \dot{\varphi})}{\dot{\varphi}}$.

Как уже сказано, в действительности скачки скорости не имеют места, так как система все же обладает некоторым моментом инерции. Следовательно, «скачок» происходит не с бесконечно большими,

а с очень большими, но все же конечными ускорениями. Произведение массы на ускорение во время этой части движения играет существенную роль, и равенство между $k\varphi$ и $rF[(\Omega - \dot{\varphi})r]$ нарушается, так как φ почти не изменяется, а $F[(\Omega - \dot{\varphi})r]$ пробегает через все промежуточные значения. Но если к этим двум силам приписать произведение массы на ускорение («силу инерции»), то снова восстановится равенство нулю всех сил, действующих в системе. В действительности



Рис. 164.

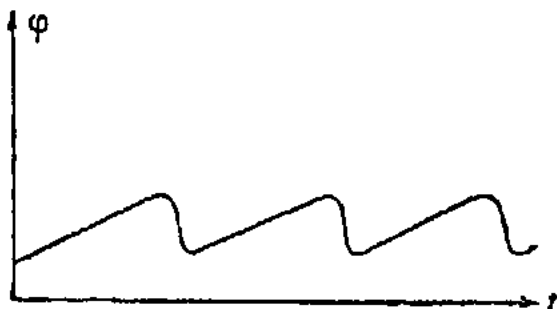


Рис. 165.

на фазовой плоскости пунктирные линии, изображающие «скачки», не будут прямыми, а должны изогнуться. Однако при достаточно малом моменте инерции и больших моментах упругой силы и трения изгиб этот практически совершенно не заметен. Но характер процесса существенно меняется при увеличении момента инерции колодки. На рис. 164 и 165 изображены полученные экспериментально кривые колебаний колодки с разными моментами инерции. На этих кривых при дальнейшем увеличении момента инерции и уменьшении упругости

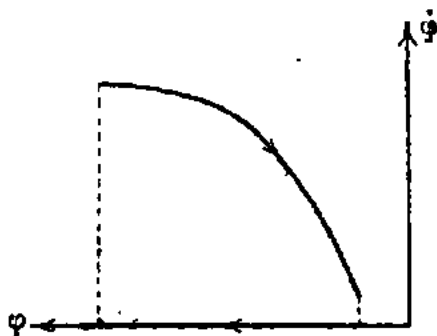


Рис. 166.

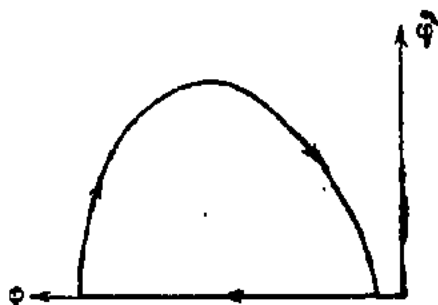


Рис. 167.

получаются колебания, все более и более близкие к гармоническим, и «релаксационный маятник» превращается в маятник Фроуда, т. е. автоколебательную систему, для описания которой необходимы уже два уравнения первого порядка. Картина на фазовой плоскости (рис. 166), построенная для случая, дающего первую кривую, изображенную на рис. 164, существенно отличается от картины, изображенной на рис. 167 и соответствующей форме колебаний на рис. 165. Наличие значительного момента инерции сгладило скачки скорости.

Если бы характеристика трения не поднималась после минимума снова до значения F_0 , то скачок скорости при неизменной координате был бы невозможен. В этом случае одновременно с изменением скорости происходило бы изменение координаты и уменьшение упру-

гой силы, т. е. представляющая точка двигалась бы не по горизонтальной прямой, а по кривой, наклоненной книзу, как и в случае большого момента инерции. Это движение продолжалось бы до тех пор, пока представляющая точка не опустится до поднимающейся ветви характеристики трения. Когда она попадет на эту ветвь, снова вступает в силу уравнение (237), и в дальнейшем процесс пойдет так же, как описано выше. При этом движении, пока представляющая точка не попадет снова на характеристику трения, существенную роль будет играть «сила инерции», так как равенство между силой трения и упругой силой нарушено, вследствие чего возникают большое ускорение и

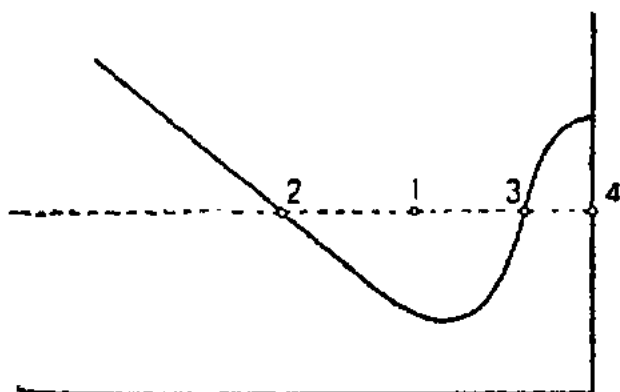


Рис. 168.

вместе с тем «сила инерции», которая компенсирует неравенство между силой трения и упругой силой. Другими словами, если характеристика трения не поднимается после минимума снова до значения F_0 , то наша идеализация, строго говоря, уже неприменима, так как, не учитывая массы системы, мы не можем сказать, в какую именно точку поднимающейся части характеристики трения попадет представляющая точка после «скачка».

Точно так же без учета массы мы не можем ответить на вопрос о том, как попадет представляющая точка на фазовую кривую, если она в начальный момент не находилась на ней, т. е. если начальные условия находятся в конфликте с описывающим систему уравнением. Условие скачка, которое в случае линейной системы дает ответ на этот вопрос, в рассматриваемом случае оказывается недостаточным, например, если в начальный момент система находится в точке 1, то она может с соблюдением условий скачка перескочить как в точку 2, так и в точку 3 или в точку 4 (рис. 168). При таких начальных условиях в начале движения существенную роль играет масса системы, и поэтому понятно, что, не учитывая ее, мы не можем проследить этого движения. Ответ на вопросы установления мы сможем дать, только рассматривая систему, описываемую двумя уравнениями первого порядка. Однако без подробного рассмотрения мы можем утверждать, что, как только представляющая точка попала на фазовую кривую, сразу устанавливается периодическое движение. Значит, отказываясь от рассмотрения движения до этого момента, мы исключаем лишь самую начальную стадию процесса. На все же остальные интересующие нас вопросы мы с помощью разрывной трактовки получаем достаточно удовлетворительный ответ.

§ 10. Колебания в схеме с неоновой лампой

В качестве другого примера разрывной трактовки автоколебательных процессов мы рассмотрим колебания, возникающие при известных условиях в цепи неоновой лампы N , замкнутой на батарею E через

омическое сопротивление R и зашунтированной емкостью C (рис. 169). Подобная схема рассматривалась ван-дер-Полем, Фридлендером [61] и др. При рассмотрении этой схемы мы будем пренебрегать паразитной самоиндукцией и паразитной емкостью отдельных элементов схемы. В результате этого пренебрежения мы приходим к вырожденной системе, описываемой одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Нелинейность этой схемы обусловлена присутствием в ней неоновой лампы, для которой связь между напряжением V и силой тока i не определяется законом Ома, а выражается более сложной нелинейной зависимостью, имеющей гистерезисный характер. Наиболее типичные черты характеристики неоновой лампы, которые играют существенную роль в рассматриваемых нами процессах и которые мы будем учитывать, таковы: при малых напряжениях лампа совсем не пропускает тока («не горит»), ток в лампе возникает только при определенном напряжении зажигания V_1 . При

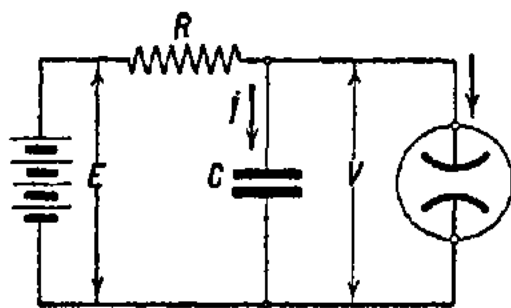


Рис. 169.

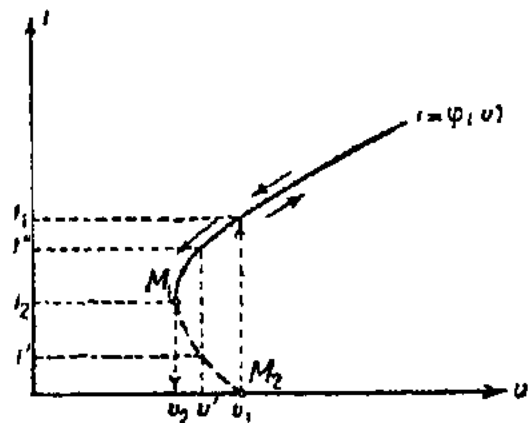


Рис. 170.

этом сразу устанавливается некоторая значительная сила тока i_1 . При дальнейшем увеличении напряжения V сила тока возрастает по закону, близкому к прямолинейному. При уменьшении напряжения, когда напряжение достигает значения V_1 со стороны больших V , лампа еще не гаснет. При дальнейшем уменьшении V сила тока в лампе постепенно уменьшается, наконец лампа сразу гаснет при некотором напряжении V_2 и токе i_2 , причем $V_2 < V_1$ и $i_2 < i_1$. Все эти существенные для нас черты неоновой лампы мы можем передать при помощи характеристики $i = \varphi(V)$, изображенной на рис. 170. Действительно, если мы будем непосредственно изменять V на зажимах лампы со стороны малых V , то при $V < V_1$ лампа гореть не будет, т. е. сила тока через лампу будет равна нулю. Лампа вспыхнет при $V = V_1$, и в ней сразу установится ток i_1 (мы считаем, что в цепи нет самоиндукции, и поэтому ток может изменяться скачком). Наоборот, при уменьшении напряжения лампа сразу погаснет при $V = V_2$ (так как при $V < V_2$ она гореть не может), и ток сразу упадет от значения i_1 до нуля. Конечно, всякая цепь обладает самоиндукцией, и поэтому ток и во внешней цепи и в самой лампе не может изменяться скачком. Но поскольку мы пренебрегаем самоиндукцией в цепи, мы должны считать, что ток изменяется скачком, т. е. что изменения его происходят так, как указано на рис. 170 стрелками.

Нижний участок характеристики, «мимо» которого проскакивает представляющая точка, если мы изменяем напряжение на зажимах лампы, не осуществим в статическом режиме. Однако этот участок характеристики имеет вполне определенное значение и влияет на поведение системы в известных случаях. Характеристика, приведенная нами на рис. 170, в основных чертах совпадает с той характеристикой, которая может быть получена экспериментально.

Для того чтобы составить уравнение, описывающее рассматриваемую схему, обозначим напряжение батареи через E , напряжение на обкладках конденсатора через V , нелинейную функцию, характеризующую зависимость силы тока, текущего через неоновую лампу, от напряжения на ее концах, через $\varphi(V)$, силу тока в цепи лампы через i и силу тока в цепи конденсатора через I (рис. 169); пользуясь законами Кирхгофа, мы получим (внутренним сопротивлением батареи мы пренебрегаем):

$$R(i + I) + V = E \quad \text{и} \quad I = C \frac{dV}{dt}. \quad (240)$$

Исключая из обоих уравнений I и заменяя i через $\varphi(V)$, мы получаем для V одно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = f(V) = \frac{1}{RC} \{E - V - R\varphi(V)\}. \quad (241)$$

Состояния равновесия системы определяются из условия $f(V) = 0$, т. е. из уравнения:

$$\frac{1}{R} (E - V) = \varphi(V).$$

Чтобы найти корни этого уравнения, попережнему строим две кривых $z = \varphi(V)$ и $z = \frac{E - V}{R}$ и находим точки их пересечения. В том случае, когда $E > V_1$, т. е. когда напряжение батареи больше, чем напряжение зажигания лампы (а мы этим одним случаем ограничим наше рассмотрение), существует только одна точка пересечения кривой $z = \varphi(V)$ и прямой $z = \frac{E - V}{R}$, причем положение этой точки пересечения на характеристике зависит от значений параметров E и R (рис. 171). Устойчивость этого состояния равновесия определяется, как мы уже знаем, знаком функции $f(V)$ или, что то же самое, знаком $\frac{dV}{dt}$ вблизи положения равновесия. Легко убедиться, что все состояния равновесия, лежащие на верхнем участке характеристики, устойчивы, лежащие же на нижнем участке характеристики — неустойчивы. Следовательно, для каждого E (однако $E > V_1$) мы можем, увеличивая R , перейти от устойчивого состояния равновесия к неустойчивому, причем чем больше E , тем больше должно быть то критическое сопротивление $R_{кр}$, при котором точка пересечения переходит на нижний участок характеристики и состояние равновесия становится неустойчивым.

Как и в предшествующей задаче, движение по некоторым участкам фазовой прямой V может происходить в обе стороны, и изображение движения системы на фазовой прямой теряет свою наглядность. Вместо фазовой прямой целесообразно изображать поведение системы при помощи представляющей точки, движущейся по целесообразно выбранной «фазовой кривой», по которой движение в каждой точке может происходить только в одну сторону. В качестве такой фазовой кривой в рассматриваемом случае удобно выбрать самую кривую $i = \varphi(V)$. Направление движения представляющей точки по фазовой кривой определяется знаком $\frac{dV}{dt}$; на рис. 172 эти направления указаны стрелками.

При помощи этой фазовой кривой легко проследить за движением системы в разных случаях. В том случае, когда R достаточно мало

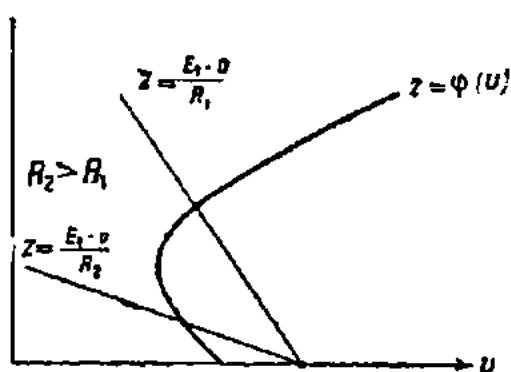


Рис. 171

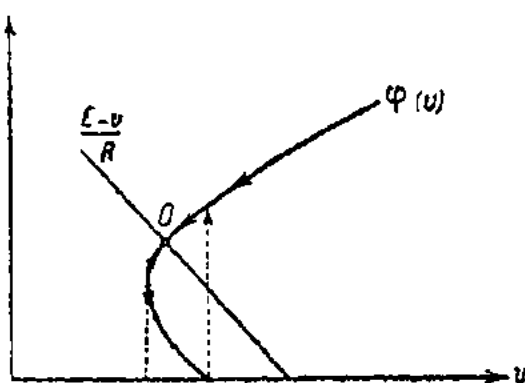


Рис. 172.

и положение равновесия устойчиво, сразу после присоединения лампы к зажиму конденсатора она вспыхнет, и после этого напряжение на лампе и сила тока в ней начнут уменьшаться. Скорость изменения напряжения на зажимах лампы будет определяться параметрами схемы, но во всяком случае она будет конечной. Уменьшение напряжения на зажимах лампы будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние равновесия (O на рис. 172), в котором схема и останется — лампа будет спокойно гореть. Если же R настолько велико, что состояние равновесия неустойчиво, то схема даже не может прийти в это неустойчивое состояние равновесия. Поскольку это неустойчивое состояние равновесия является единственным состоянием равновесия, мы имеем известные основания предположить, что стационарным состоянием в системе является периодический процесс.

Поэтому прежде всего возникает вопрос, допускает ли периодические решения полученное нами для рассматриваемой схемы уравнение первого порядка (241). Это уравнение, как мы уже знаем, допускает непрерывные периодические решения для V только в случае, если функция $f(V)$ или, что то же самое, функция $\varphi(V)$ неоднозначна. С другой стороны, напряжение V на обкладках конденсатора характеризует энергию системы и, согласно нашему постулату, не может изменяться скачком. Следовательно, разрывные периодические решения для V вообще невозможны. Поэтому необходимым условием суще-

ствования периодических движений в рассматриваемой системе является неоднозначность функции $\varphi(V)$. Взглянув на характеристику неоновой лампы, легко убедиться в том, что условие неоднозначности функции $\varphi(V)$ в этом случае соблюдается. Каждому значению аргумента V в области от V_1 до V_2 (например V' на рис. 170) соответствуют два значения i (одно из них i' и другое i''). Поэтому система допускает существование таких колебаний, при которых V изменяется непрерывно. Что касается i , т. е. силы тока в цепи, то мы должны допустить, что она может изменяться скачком, так как ток не связан с энергией

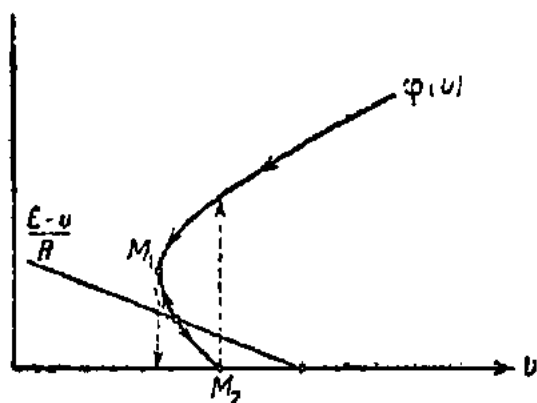


Рис. 173.

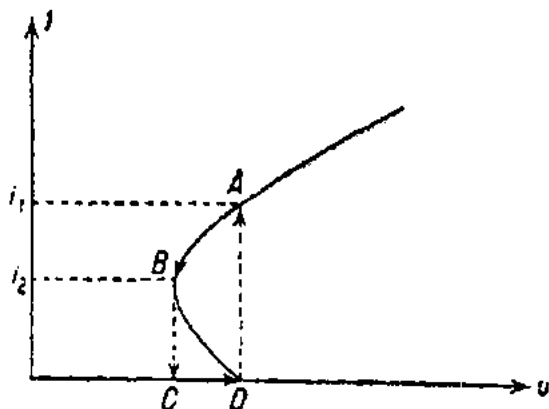


Рис. 174.

системы (вследствие того, что мы пренебрегли паразитными самоиндукциями и емкостями) и, значит, $\frac{di}{dt}$ может обращаться в бесконечность.

Определим те состояния, в которых $\frac{di}{dt} = \infty$. Так как $i = \varphi(V)$, то

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \varphi'(V) f(V).$$

Но функция $f(V)$ при конечных V нигде не обращается в бесконечность; следовательно, $\frac{di}{dt} = \infty$ только там, где $\varphi'(V)$ не существует или терпит разрыв непрерывности, т. е. в точках M_1 и M_2 характеристики. В этих точках возможны скачкообразные изменения силы тока, и, как видно из направления движения представляющей точки по фазовой кривой, скачок является единственным выходом из того положения, в которое попадает представляющая точка, если она движется по фазовой кривой в направлении точки M_1 или M_2 . Нет такого пути, по которому представляющая точка могла бы уйти и который был бы совместим с уравнением, описывающим систему. Здесь, как мы уже видели, возникает «конфликт», однако несколько иной, чем в случае линейной системы, именно — уравнение «заводит» систему в такое состояние, из которого с точки зрения уравнения нет выхода. Но система не может оставаться и в этом состоянии, так как оно не является состоянием равновесия. Единственный путь для разрешения конфликта — это скачок. И так как скачок в силе тока в этой точке возможен ($\frac{di}{dt} = \infty$), то мы должны считать, что этот скачок действительно происходит. Пользуясь условиями скачка, мы легко можем

определить, в какое состояние приходит система. Так как напряжение на обкладках конденсатора не может изменяться скачком, то скачки в нашей схеме должны происходить вдоль оси i , т. е. так, как указано стрелками на рис. 173. Легко видеть, что условия скачка однозначно определяют то конечное состояние, в которое после скачка приходит система.

Таким образом уравнением (241) и условием скачка вполне определяется поведение системы. Проследив движение представляющей точки по фазовой кривой и скачки, которые она совершает, легко убедиться в том, что когда $E > V_1$ и сопротивление R достаточно велико, т. е. когда единственное состояние равновесия неустойчиво, в системе происходит периодический процесс (рис. 174). Действительно, после

того как лампа первый раз вспыхнула (при $E \geq V_1$), ток начнет падать, причем скорость спада тока будет зависеть от параметров схемы; представляющая точка будет двигаться по характеристике от точки A к точке B (будет происходить разряд конденсатора через лампу). В точке B произойдет скачок в силе тока — ток упадет от i_2 до нуля, и лампа погаснет. После этого напряжение на обкладках конденсатора и на лампе начнет возрастать — участ-

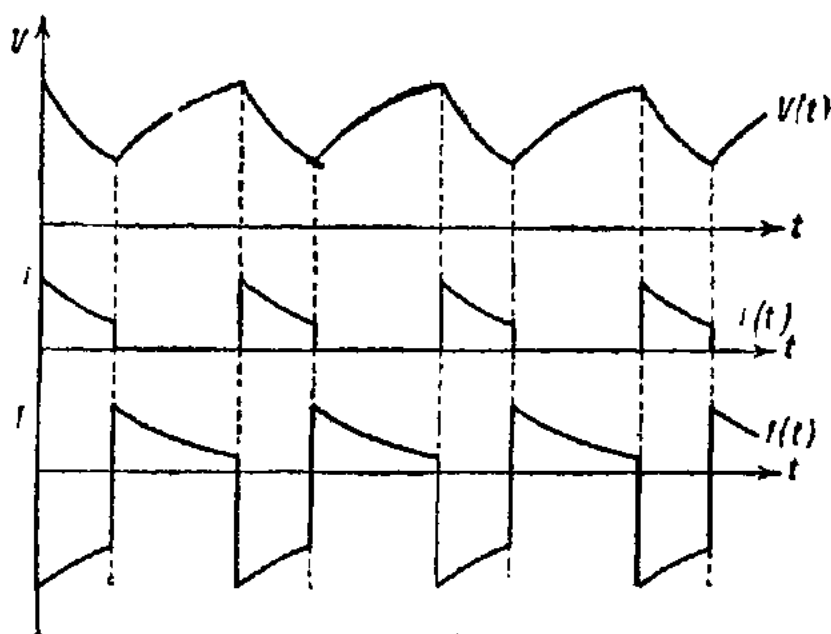


Рис. 175.

сток CD — также с конечной скоростью, зависящей от величин C и R (происходит заряд конденсатора при погашенной лампе). Когда напряжение достигнет значения V_1 , лампа снова вспыхнет, и ток возрастет скачком до величины i_1 . После этого процесс начнет повторяться, и в системе установится периодический процесс. Это установление, как мы видим, происходит сразу — аperiodически (а не осцилляторно). На фазовой плоскости (V, i) периодическому процессу будет соответствовать «замкнутая» траектория, состоящая из двух участков фазовой кривой, по которым представляющая точка движется с конечной скоростью и концы которых «соединены» при помощи скачков. Форма колебаний, т. е. вид кривых $V(t)$, $i(t)$ и $I(t)$, примерно изображена на рис. 175. Вид этих кривых вначале, до установления периодического процесса, зависит от начальных условий.

Вообще, как мы уже убедились при рассмотрении механических релаксационных колебаний, вопрос о характере установления колебаний при этой трактовке не может быть решен однозначно. Мы и здесь можем задать начальные значения напряжения и тока V_0 и i_0 , которые, вообще говоря, несовместимы с уравнением, описывающим

систему, и находятся с ним в «конфликте». Мы должны были бы считать, что установление состояния, совместимого с уравнением, происходит скачком. Но при этом условии скачка, которое в случае линейной системы давало однозначный ответ на вопрос о том, куда перескочит система, в рассматриваемом случае не всегда может дать однозначный ответ на этот вопрос в силу того, что V и i для нашей системы связаны неоднозначно. Пусть, например, заданы начальные условия $V = V_0$ и $i = i_0$ (точка A на рис. 176). Из этой точки система

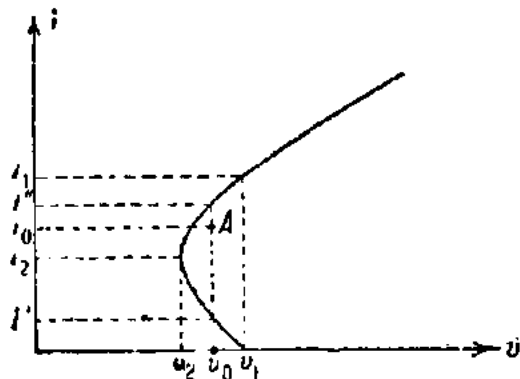


Рис. 176.

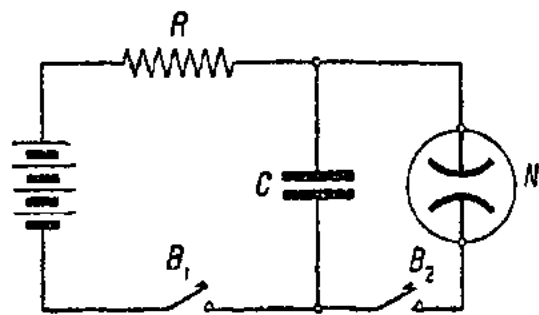


Рис. 177.

может при соблюдении условия скачка перескочить и в точку, для которой $i = i'$, и в точку, для которой $i = i''$, так как и в том и в другом случае V не изменяется при скачке. При значениях же V , лежащих вне неоднозначной области, ограниченной значениями V_2 и V_1 , вопрос снова решается однозначно.

Как и в случае механической системы, поведение системы в начале процесса при начальных условиях, несовместимых с уравнением, может быть решено однозначно только при учете паразитных

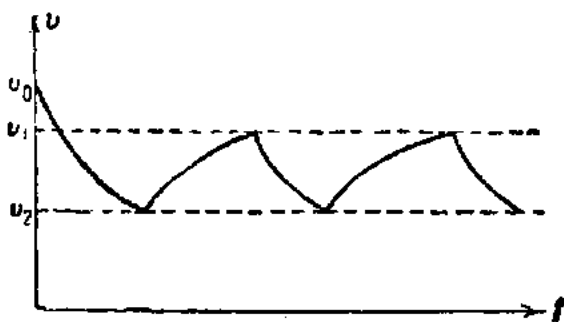


Рис. 178.

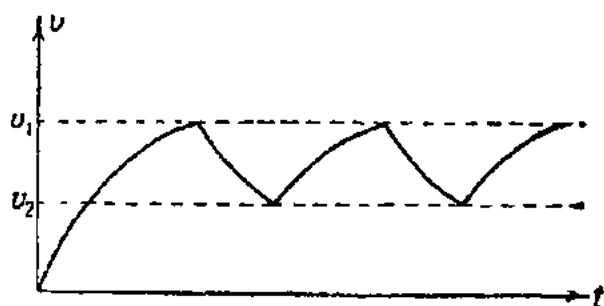


Рис. 179.

параметров системы, например ее самоиндукции. Если для начального момента задан ток i , то в силу наличия некоторой самоиндукции он изменяется не скачком, но очень быстро, и паразитная самоиндукция может привести к тому, что вместо прыжка «вниз» представляющая точка вскочит «вверх».

Таким образом характер установления периодического процесса, т. е. ход процесса до того, как достигнуто состояние, при котором происходит скачок, вообще говоря, не может быть однозначно определен при допущенной нами идеализации. Только в том случае, когда

начальные условия выбраны так, что в начале процесса представляющая точка находится где-либо на фазовой кривой или на оси V (когда $i_0 = 0$), мы можем, оставаясь в рамках введенной нами идеализации, определить характер установления периодического процесса. Так, например, если в начальный момент $V_0 = E$, $i_0 = 0$ (т. е. схема включается путем замыкания выключателя B_2 на рис. 177), то характер установления будет такой, как указан на рис. 178. Если же начальный момент $V_0 = 0$ и $i_0 = 0$ (т. е. схема включается путем замыкания выключателя B_1 на рис. 177), то характер установления будет иной, именно такой, который указан на рис. 179. Но после того как достигнуто состояние, совместимое с уравнением, описывающим систему, дальнейший ход процесса при помощи уравнения первого порядка и условия скачка определен уже вполне однозначно.

Мы нарисовали качественную картину автоколебаний в схеме с неоновой лампой. Для того чтобы дать количественные характеристики этих автоколебаний, именно задать период колебаний и определить коэффициенты Фурье разложения периодических функций $V(t)$ или $i(t)$, нужно задать вид нелинейной функции $\varphi(V)$. Применим для этой цели прием, которым мы уже пользовались для задания нелинейных функций, именно изобразим функцию $\varphi(V)$ состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 180). Эта весьма идеализированная характеристика все же сохраняет основные черты реальной характеристики, подчеркнутые нами выше, и, значит, отражает наиболее существенные для нас свойства неоновой лампы. Мы, конечно, не можем одним аналитическим выражением охватить всю эту характеристику и должны поступить так, как уже поступали при рассмотрении разрывных характеристик. Именно, мы разобьем всю область возможных движений на участки и для каждого из этих участков напишем уравнение, которое получается для этого участка из уравнения характеристики, приведенной на рис. 180. При этом падающий участок, «мимо» которого проскакивает представляющая точка (указан пунктиром), мы можем не рассматривать. Тогда два других участка характеристики мы можем охватить соответственно такими уравнениями:

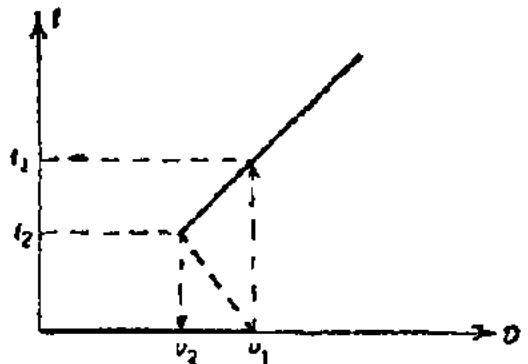


Рис. 180.

- 1) $i = \varphi(V) = 0$ при погашенной лампе,
- 2) $i = \varphi(V) = \frac{V - V_0}{R_i}$ при горящей лампе.

Обе постоянных V_0 и R_i имеют соответственно размерности напряжения и сопротивления и характеризуют свойства лампы.

Начнем рассмотрение с того момента, когда лампа погасла, т. е. когда имеет силу первое уравнение и когда $V = V_0$. Для первого участка мы получим соответственно уравнение движения:

$$RC \frac{dV}{dt} + V = E \tag{242}$$

и при начальных условиях $V = V_0$ при $t = 0$ получаем решение:

$$V = E - (E - V_0) e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (243)$$

(Напомним, что мы пока рассматриваем только случай, когда $E > V_1$.) Когда напряжение на обкладках конденсатора достигнет значения V_1 , то лампа вспыхнет и изменится скачком сила тока, текущего через лампу (скачком же изменится и сила тока в цепи конденсатора и при этом так, чтобы $R(I + i)$, а вместе с тем и напряжение на обкладках конденсатора, оставалось неизменным).

Начальным значением V для нового уравнения, которое вступает в силу после того как лампа вспыхнула, будет служить то значение V_1 , при котором лампа вспыхивает. После того как лампа вспыхнет, будет справедливо второе уравнение характеристики, и уравнение движения примет вид:

$$RC \frac{dV}{dt} + \frac{R}{R_1} (V - V_0) + V = E. \quad (244)$$

Вводя обозначение $\rho = \frac{R_1 R}{R + R_1}$, приведем это уравнение к виду:

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\rho} = \frac{E}{R} + \frac{V_0}{R_1}.$$

Решение этого уравнения при начальном условии $V = V_1$ при $t = 0$ таково:

$$\frac{V}{\rho} = \frac{E}{R} + \frac{V_0}{R_1} + \left[\frac{V_1}{\rho} - \frac{V_0}{R_1} - \frac{E}{R} \right] e^{-\frac{t}{\rho R}}. \quad (245)$$

Период рассматриваемого нами периодического процесса может быть выражен в виде определенных интегралов, полученных интегрированием dt , найденного из уравнения (242) в пределах от V_1 до V_2 , и dt , найденного из уравнения (244) в пределах от V_2 до V_1 . Можно также прямо из соответствующих уравнений, выражающих зависимость V от t [(243) и (245)], определить время, потребное для разряда конденсатора от V_1 до V_2 и для заряда его от V_2 до V_1 . Из уравнения (245), подставляя $V = V_2$ и логарифмируя его, получим:

$$\tau_1 = \rho C \ln \frac{(V_2 - V_0) R - (E - V_2) R_1}{(V_2 - V_0) R - (E - V_1) R_1};$$

аналогичным образом из уравнения (243) получим, подставляя $V = V_1$:

$$\tau_2 = RC \ln \frac{E - V_2}{E - V_1}.$$

Период же всего процесса

$$\tau = \tau_1 + \tau_2.$$

Таким образом мы получили аналитическое выражение как для периода колебаний, так и для определения общего вида зависимости V от t ; правда, эта зависимость задана не в виде одной, а в виде двух функций, определяющих разные участки кривой $V(t)$, по все же так как функция $V(t)$ задана аналитически, то мы можем вычислить коэффициенты Фурье того гармонического ряда, в который эта периодическая функция может быть разложена и может, следовательно, дать полный ответ на вопрос о спектральном составе возникающих колебаний. Можно сказать сразу, что спектр колебаний, возникающих в схеме с неоновой лампой, весьма богат гармониками, так как форма этих колебаний очень существенно отлична от синусоидальной. Вообще существенное отличие формы разрывных колебаний от синусоидальной обуславливает исключительное богатство этих колебаний гармониками. Это свойство «разрывных колебаний» (т. е. колебаний, которые могут быть удовлетворительно описаны при помощи разрывной траектории) делает возможными те широкие применения, которые эти колебания нашли сейчас в технике.

§ 11. Схемы с электронными лампами

Другим примером электрической автоколебательной системы, совершающей разрывные колебания, могут служить так называемые «мульти-вибраторы», т. е. релаксационные ламповые схемы либо без самоиндукции [50], [51], [52], [71], либо без емкости [49], [68]. Простейшая схема

первого типа изображена на рис. 181. Со схемами подобного рода мы уже встречались раньше. Вторая лампа L_{II} в этой схеме, как и в других аналогичных схемах, служит лишь для того, чтобы путем оборота фазы подводимого напряжения обеспечить нужный знак обратного действия. Поэтому мы, как и раньше, положим,

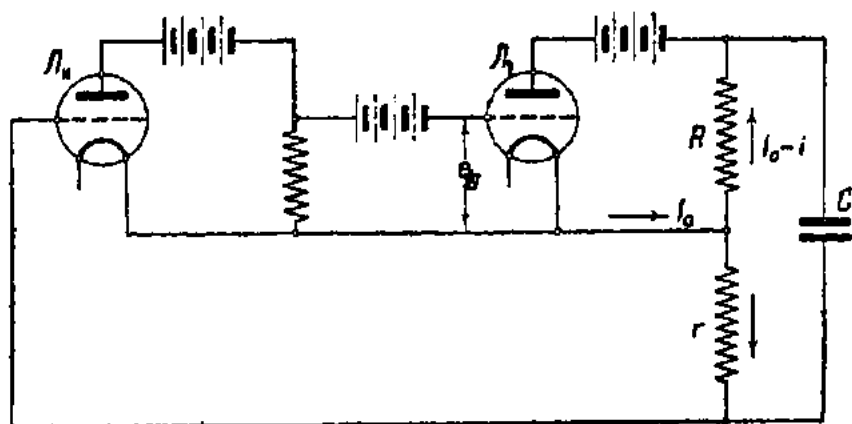


Рис. 181.

что характеристика лампы L_{II} прямолинейна и коэффициент усиления, даваемого этой лампой, есть k_2 . (Практически это достигается тем, что лампа L_{II} выбирается с напряжением насыщения, значительно превосходящим то наибольшее напряжение, которое может возникнуть на сопротивлении r .) Для лампы L_I введем характеристику $I_a = \varphi(e_g)$, не прецизируя пока ее вида (по нашему предположению $e_g = k_1 r i$). Пренебрегая, как и обычно, реакцией анода и сеточными токами и перенося начало координат в точку I_0 (I_0 есть постоянная составляющая анодного тока лампы L_I), мы можем рассматриваемую схему описать уравнениями:

$$(r + R) i + V = R \varphi(k_2 r i) \quad \text{и} \quad C \frac{dV}{dt} = i. \quad (246)$$

Дифференцируя первое уравнение и исключая $\frac{dV}{dt}$, получим одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$[k_2 r R \varphi'(k_2 r i) - (R + r)] \frac{di}{dt} = \frac{i}{C}. \quad (247)$$

Для того чтобы выделить возможные периодические решения этих уравнений, нужно высказать некоторые предположения относительно вида функции $\varphi(e_p)$. Мы будем считать, что характеристика лампы имеет обычный вид, и рабочая точка ($i=0$) соответствует наибольшей

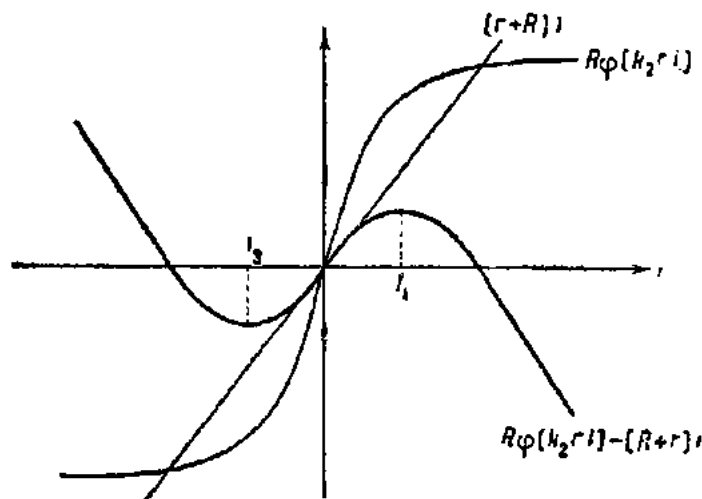


Рис. 182.

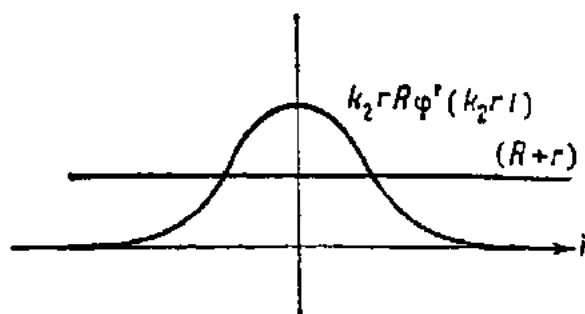


Рис. 183.

крутизне S , т. е. что $\varphi'(0) = S$. В таком случае состояние равновесия $i=0$ будет неустойчиво, если

$$k_2 r R S > R + r, \quad (248)$$

так как при этом, как видно из уравнения (247), i и $\frac{di}{dt}$ в точке $i=0$ одного знака. Функцию $V(i)$, определяемую первым уравнением (246):

$$V(i) = R \varphi(k_2 r i) - (R + r) i, \quad (249)$$

можно изобразить графически так, как это сделано на рис. 182. На рисунке изображен именно тот случай, когда соблюдено условие (248); в этом случае, как легко видеть, i , т. е. $C \frac{dV}{dt}$, есть неоднозначная функция V . Следовательно, уравнение (249) допускает непрерывные периодические решения для V . Если бы $\frac{dV}{dt}$ было однозначной функцией V , то возможность периодических решений вообще была бы исключена, так как V есть напряжение на обкладках конденсатора и поэтому разрывные решения для V невозможны (по нашему постулату V не изменяется скачком). Функция

$$e = k_2 r R \varphi'(k_2 r i),$$

так же как и функция $e = (R + r)$, изображена на рис. 183, опять-таки

для случая, когда соблюдено условие (248). Из этого рисунка видно, что $P(i) = k_2 r R \varphi'(k_2 r i) - (R + r)$ есть однозначная функция от i , и, значит, из уравнения

$$P(i) \frac{di}{dt} = 0 \quad (250)$$

$\frac{di}{dt}$ определяется однозначно. Значит, непрерывные периодические решения для i невозможны, но зато i может изменяться скачком (так как в цепи нет самоиндукции), и для i могут существовать разрывные периодические решения. Для отыскания этих периодических решений мы рассмотрим снова картину на плоскости V, i

(рис. 184). Начерченную на этом рисунке кривую, определяемую уравнением (249), целесообразно принять за фазовую кривую нашей системы. Представляющая точка с конечной скоростью движется по этой кривой. Направление движения представляющей точки по кривой определяется знаком $\frac{di}{dt}$, т. е. знаком $P(i)$ в уравнении (250). Определенные таким образом направления движения представляющей точки по фазовой кривой указаны на рис. 184 стрелками. В точках, где $P(i) = 0$, т. е. в экстремальных точках фазовой кривой, $\frac{di}{dt} = \infty$, и, следовательно, в этих точках возможен скачок. Так же как и в предыдущем примере, эти точки не соответствуют состояниям равновесия, хотя представляющая точка и движется с двух сторон по направлению к этим экстремальным точкам. Это — точки нарушения аналитичности, и по введенной нами терминологии они являются «устойчивыми» точками бесконечных ускорений. При скачке V не должно изменяться, и поэтому место, в которое перескакивает представляющая точка, условием скачка однозначно определяется, так как скачок должен происходить параллельно оси V (пунктирные стрелки на рис. 184). Заметим кстати, что только в экстремальных точках фазовой кривой условие скачка дает однозначный ответ на вопрос о том, куда перескакивает представляющая точка. После скачка представляющая точка снова движется по фазовой кривой в направлении, указанном стрелкой. Легко видеть, что в конечном счете представляющая точка снова попадает в положение, в котором она уже была, и что, следовательно, в системе происходит периодический процесс.

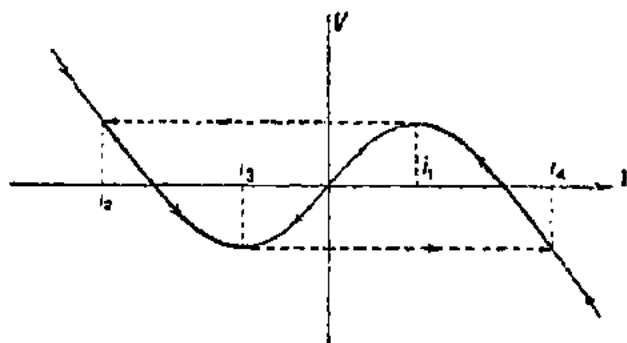


Рис. 184.

Колебания, которые устанавливаются в системе, состоят из двух непрерывных движений от i_2 до i_3 и от i_4 до i_1 и из двух скачков из i_1 в i_2 и из i_3 в i_4 . Периодическому движению соответствует «замкнутая» траектория, состоящая из двух участков фазовой кривой, концы которых «соединены» скачками. Форма колебаний, т. е. вид функции $i = \varphi(t)$, примерно изображена на рис. 185.

Таким образом периодический процесс в системе однозначно определен. Но при помощи нашего рассмотрения, как и в случае механической системы, не всегда может быть однозначно решен вопрос об установлении колебаний. В тех случаях, когда начальные условия падают в конфликте с уравнением, условие скачка не всегда дает однозначный ответ на вопрос о том, в какую точку фазовой кривой перескочит представляющая точка. Пусть, например, начальные условия будут $i = i_0$ и $V = V_0$ (рис. 186). Тогда с точки зрения условия скачка одинаково допустимы скачки и в точку i_1, V_0 , и в точку i_2, V_0 ,

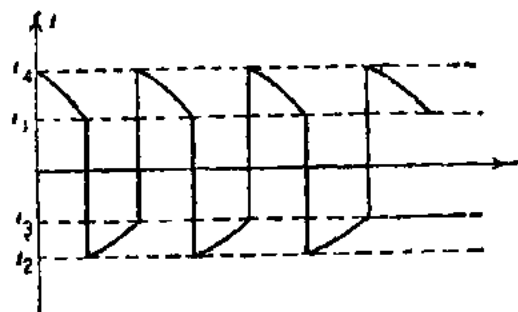


Рис. 185.

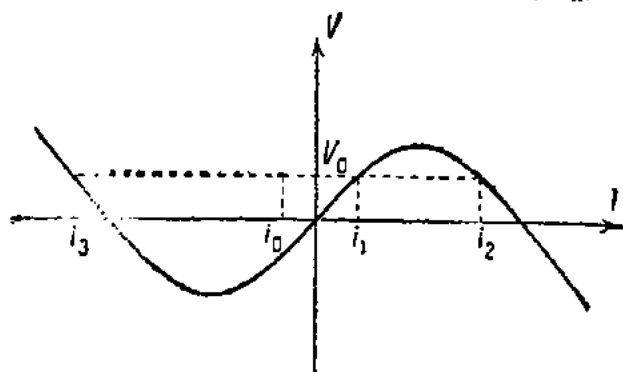


Рис. 186.

и, наконец, в точку i_3, V_0 . Ответ на этот вопрос может дать либо какой-то добавочный постулат, либо учет одного из тех параметров, которыми мы пренебрегли, например учет самоиндукции и рассмотрение системы, описываемой двумя уравнениями первого порядка. Вообще вследствие наличия самоиндукции изменение силы тока происходит не скачком, а непрерывно (хотя и с большой скоростью), и в силу возникновения ЭДС самоиндукции за это время изменяется напряжение на обкладках конденсатора, и, значит, представляющая точка во время

«скачка» движется уже не по прямым, параллельным оси V , а по какому-то кривым. В результате получается действительно замкнутая траектория примерно такого вида, как изображенная на рис. 187. Однако, как уже сказано, вопрос о том, какой вид имеет эта замкнутая траектория и по каким путям попадает на нее представляющая точка, если она в начальный момент находится не на самой траекто-

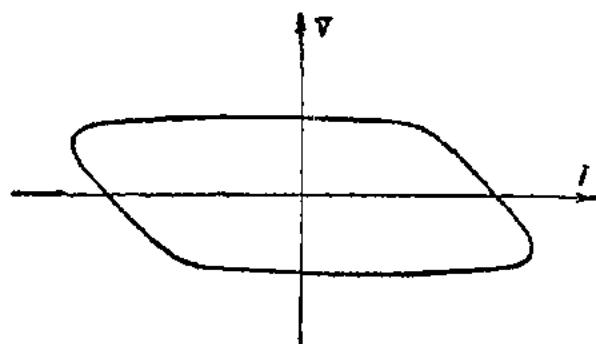


Рис. 187.

рии, не может быть строго решен, если мы остаемся на почве нашей идеализации, и только в следующей главе будет дан строгий (хотя, правда, только качественный) ответ на этот вопрос.

Но, как легко видеть, вопрос о том, куда скачет представляющая точка в начальный момент, отражается только на характере движения в самом начале, до того как начался первый период процесса, так как установление периодического процесса в системе носит характер не осцилляторный, а аперриодический. Вследствие этого вопрос о начальном скачке в большинстве случаев не имеет практического зна-

чения. На все же вопросы, обычно возникающие при изучении стационарных движений, мы можем дать ответ. Мы можем вычислить период и «амплитуду» процесса, т. е. максимальные значения, которых достигает V и i . Однако, для того чтобы аналитически решить эти вопросы, нужно задать аналитически вид характеристики $\varphi(e_p)$. Эта характеристика может быть задана, например, в виде arctg .

Для определения периода процесса нужно проинтегрировать уравнение (250):

$$dt = C \frac{P(i)}{i} di$$

в тех пределах от i_2 до i_3 и от i_4 до i_1 , которые определяются из условий скачка. Для определения периода можно ограничиться простейшей характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 188).

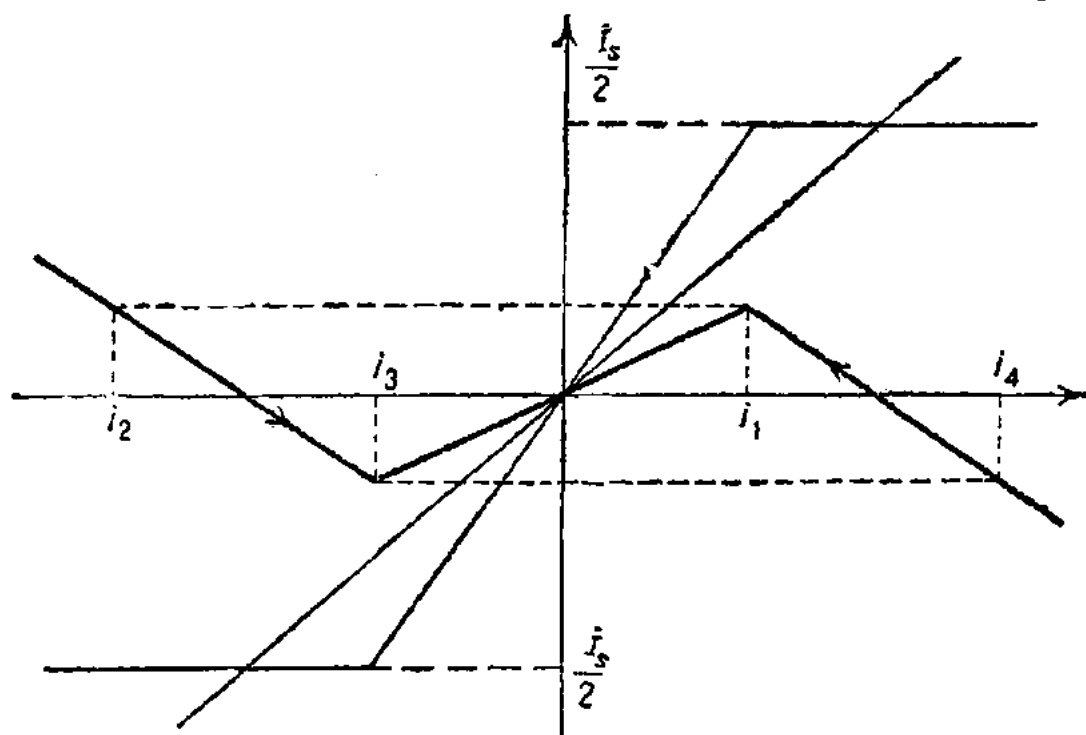


Рис. 188.

В областях, по которым нужно распространять интегрирование, — в области отсутствия тока и в области тока насыщения, — эта характеристика, состоящая из прямолинейных отрезков, удовлетворительно изображает реальную характеристику. Тогда $P(i)$ есть константа, и интегрирование упрощается. В результате получается сравнительно простая, но весьма характерная для процессов этого рода формула для периода:

$$\tau = 2C(R+r) \ln \left[\frac{2I_s}{V_s} \frac{Rr}{R+r} - 1 \right],$$

где I_s — ток насыщения, а V_s — напряжение насыщения.

В эту формулу помимо временной постоянной CR входит еще и логарифмическая зависимость от r , из которой следует, что при приближении к границе возбуждения быстро возрастает частота колебаний. Для разрывных колебаний в рассматриваемых схемах характерно то, что эти колебания всегда заходят далеко за пределы напряжения

насыщения и что форма «выпуклых» частей характеристики существенно влияет на ход процесса. В обычных же ламповых генераторах мы в большинстве случаев будем рассматривать такие колебания, амплитуда которых незначительно выходит за пределы напряжения насыщения. Поэтому аппроксимирование характеристики в виде полинома, при котором всегда после насыщения начинается спадающая часть, оказывается неудобным для рассмотрения релаксационных колебаний, так как в реальных характеристиках после насыщения и до появления начального тока характеристика идет горизонтально.

В качестве автоколебательной схемы без емкости может быть рассмотрена схема рис. 189. При тех же условиях, как и для преды-

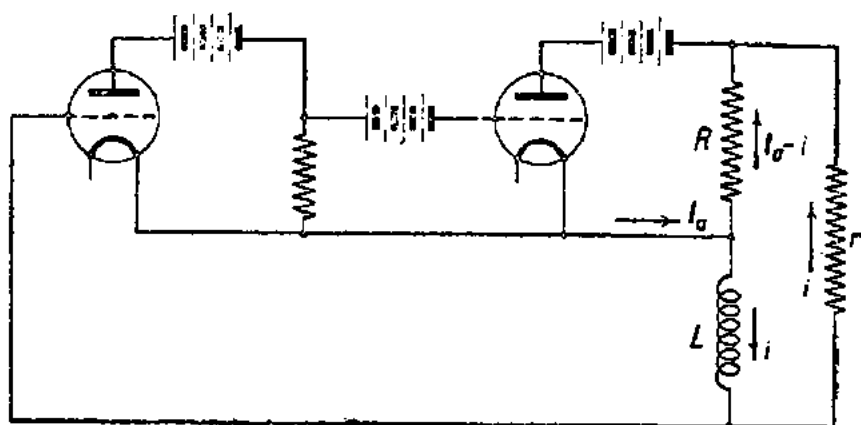


Рис. 189.

дущей схемы, мы для этой схемы получим следующее уравнение первого порядка (причем i не может совершать скачков):

$$L \frac{di}{dt} + (r + R) i - R\varphi(k_2 L \frac{di}{dt}) = 0; \quad (251)$$

полагая $\frac{di}{dt} = y$ и дифференцируя это уравнение, получим снова уравнение первого порядка (причем y уже может изменяться скачком):

$$L [1 - k_2 R\varphi'(k_2 L y)] \frac{dy}{dt} + (r + R) y = 0. \quad (252)$$

Эти уравнения совершенно аналогичны уравнениям (247) и (249), которые мы рассмотрели выше. Одно из них (251) неоднозначно определяет $\frac{di}{dt}$ и допускает непрерывные решения для i . Второе уравнение (252) однозначно определяет $\frac{dy}{dt}$, но зато система допускает разрывные решения для y . Так же как и в предыдущем случае, мы и в этом случае можем выделить периодические решения, непрерывные для i и разрывные для $\frac{di}{dt}$.

Наконец, в качестве примера, иллюстрирующего случай, когда в схеме, описываемой нелинейным уравнением первого порядка, це-

риодические решения вообще невозможны, может быть приведена схема рис. 190. Делая прежние предположения о характеристиках и пренебрегая сеточным током и реакцией анода, мы получим следующее уравнение первого порядка:

$$L_1 \varphi(k_2 Ri) = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + Ri \quad (253)$$

или

$$\left[Rk_2 \varphi'(k_2 Ri) - \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right] \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} i. \quad (254)$$

Если $Rk_2 \varphi'(0) - \frac{L_1 + L_2}{L_1} > 0$, то единственное состояние равновесия неустойчиво и система из него уходит. Однако, так как уравнение (253)

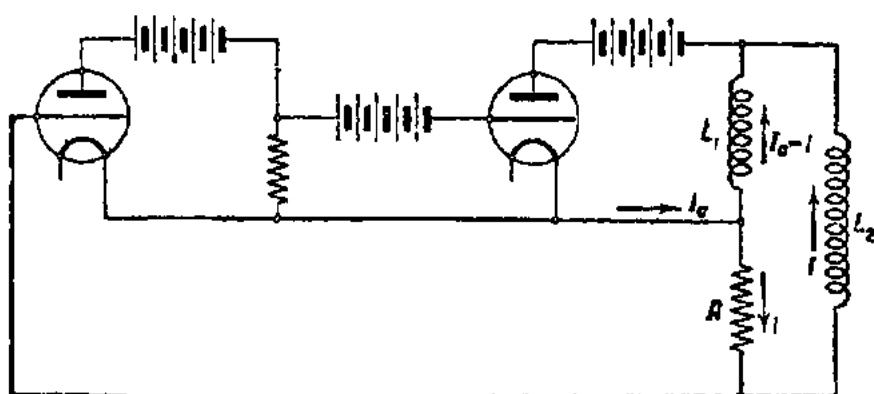


Рис. 190.

однозначно определяет $\frac{di}{dt}$ как функцию i , то непрерывные решения для i невозможны. С другой стороны, вследствие наличия самоиндукций невозможны и разрывные решения для i (так как i не может изменяться скачком). Значит, если положение равновесия неустойчиво, то система аperiodически удаляется от положения равновесия и уходит в те области, в которых она уже не может быть описана при помощи уравнения (253), например в области, где из-за ЭДС самоиндукции результирующее напряжение на аноде уже заметно отличается от статического и поэтому должно быть учтено влияние этого напряжения на силу анодного тока. И действительно, учитывая реакцию анода, мы приходим уже к уравнению второго порядка, которое допускает непрерывные периодические решения.

§ 12. Вольтова дуга, включенная параллельно с емкостью

В заключение рассмотрим электрическую систему, обладающую несколькими состояниями равновесия, но не допускающую колебательных движений. Этим рассмотрением еще с большей наглядностью иллюстрируются те соображения о возможности и неизбежности скачков, которые были высказаны в предыдущих параграфах. Примером такой системы может служить вольтова дуга, включенная параллельно с емкостью C и последовательно с сопротивлением R в общей цепи [17]

(рис. 191). Обозначим снова нелинейную зависимость между напряжением на зажимах дуги V и силой тока в дуге i в виде $i = \varphi(V)$. Графически эта зависимость — «характеристика дуги», которой мы уже пользовались в виде «обратного» графика, — изображена на рис. 192. Обозначая силу тока в цепи с емкостью через I_1 , мы получим, пользуясь законами Кирхгофа, следующие уравнения:

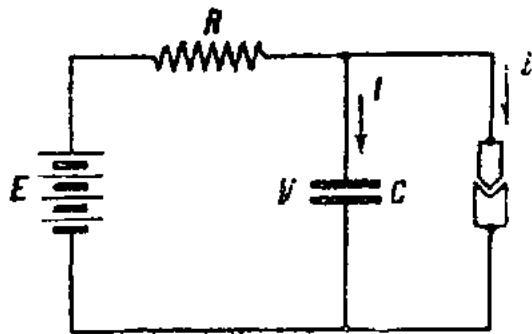


Рис. 191.

$$R[\varphi(V) + I_1] + V = E \text{ и } I = C \frac{dV}{dt}. \quad (255)$$

Исключаем из этих уравнений I и получаем одно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = f(V) = \frac{E - V - R\varphi(V)}{RC}, \quad (256)$$

причем функция $f(V)$ является неоднозначной функцией. Состояния равновесия определяются из условия $f(V) = 0$ или

$$E - V - R\varphi(V) = 0.$$

Чтобы найти корни этого уравнения, строим кривую $Z = \varphi(V)$ и прямую $Z = \frac{E - V}{R}$ и находим точки их пересечения (рис. 192). Мы рассмотрим сначала только тот случай, когда значение R выбрано так, что получаются три состояния равновесия (три точки пересечения кривой и прямой). Вычитая из ординат прямой ординаты кривой, мы можем построить функцию $f(V)$ (рис. 193). Опять вследствие неоднозначности этой функции (неоднозначности $\frac{dV}{dt}$) изображение движения на фазовой прямой теряет свою наглядность. В качестве фазовой кривой мы можем выбрать кривую $\varphi(V)$ либо, еще лучше, кривую $f(V)$. Направление движения представляющей точки по кривой $f(V)$ изображено на рис. 193 стрелками. Направление это определяется знаком $\frac{dV}{dt}$ и знаком $f'(V)$, так что при $f(V) > 0$ представляющая точка движется в сторону больших V , а при $f(V) < 0$ — в сторону малых V ; если та или другая величина меняет знак, то и направление движения изменяется на обратное. Судя по направлению движения представляющей точки, сразу можно заключить, что точки 1 и 2 устойчивы, а точка 3 неустойчива. Так как $\frac{di}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(V) \frac{dV}{dt} = \varphi'(V) f(V)$, то

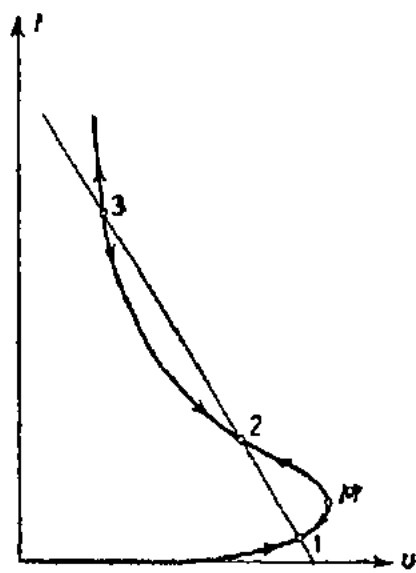


Рис. 192.

а точка 3 неустойчива. Так как $\frac{di}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(V) \frac{dV}{dt} = \varphi'(V) f(V)$, то

в точке, где $\psi'(V) = \pm \infty$ [в этой же точке и $f'(V) = \pm \infty$, так как $1 - \psi'(V) = f'(V)$], скорость изменения силы тока или, что то же самое, вертикальная составляющая скорости движения представляющей точки по фазовой кривой также обращается в бесконечность. Следовательно, точка M на рис. 192 и 193 является точкой бесконечного ускорения и по нашей условной терминологии «неустойчивой» точкой — представляющая точка может из этой точки уйти по фазовой кривой в обе стороны (попасть в эту точку бесконечного ускорения представляющая точка сама не может, но мы можем в начальный момент «поместить» ее в точку бесконечного ускорения выбором соответствующих начальных условий). Скачок же из точки бесконечного ускорения вообще невозможен, так как нет других значений $\frac{dV}{dt}$, соответствующих тому же значению V , и условия скачка не могли бы быть соблюдены.

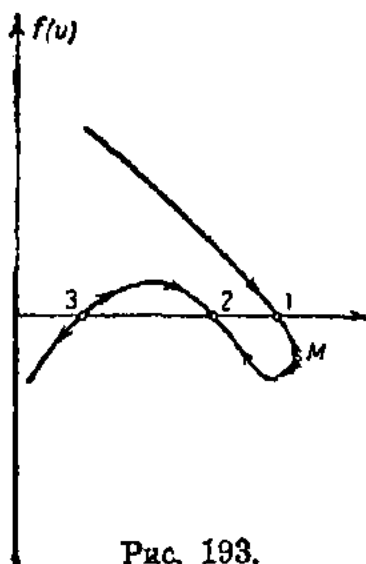


Рис. 193.

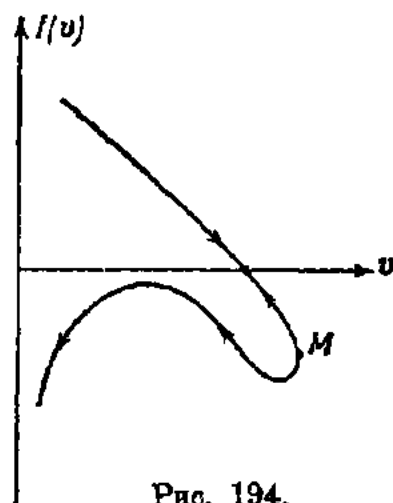


Рис. 194.

Таким образом в рассматриваемом случае скачок из «неустойчивой» точки M не только не неизбежен, но вообще невозможен. Хотя $f(V)$ и является неоднозначной функцией V , но эта неоднозначность такова, что периодические решения все же оказываются невозможными. Это вполне естественно, так как (мы это неоднократно подчеркивали) условие неоднозначности функции $f(V)$ является лишь необходимым, но отнюдь не достаточным условием существования непрерывных периодических решений уравнения $\frac{dV}{dt} = f(V)$.

При увеличении R прямая $Z = \frac{E - V}{R}$ поворачивается против часовой стрелки относительно точки пересечения с осью абсцисс, два соседних состояния равновесия (устойчивое и неустойчивое) сближаются, а затем сливаются и исчезают. Направления движения представляющей точки, в этом случае одного состояния равновесия, изображены на рис. 194. В первом случае «неустойчивая» точка бесконечного ускорения разделяла движения к двум устойчивым состояниям равновесия, а во втором разделяет движение к устойчивому состоянию

равновесия и движение, уводящее представляющую точку «в бесконечность».

При этом нужно, однако, иметь в виду следующее: ясно, что бесконечно большой ток через дугу течь не может. Когда ток очень возрастает, то принятая нами характеристика дуги становится неправильной в том смысле, что она не отражает свойств дуги при очень большой силе тока. Допустим, что при очень большой силе тока сопротивление дуги снова становится положительным, т. е. $\frac{dV}{di} > 0$

(рис. 195), тогда точка M_2 представляет собой «устойчивую» точку бесконечного ускорения. Из этой точки скачок не только возможен, но и неизбежен — представляющая точка скачком перескакивает на другую ветвь в точку A , при этом дуга гаснет. После этого конденсатор снова начнет заряжаться, пока напряжение на его зажимах не достигнет напряжения V_1 , при котором дуга вспыхнет. Дальше представляющая точка будет двигаться к единственному устойчивому состоянию равновесия, где и останется. Так же и в одном из рассмотренных выше случаев движения механической системы: в системе происходит один скачок, который приводит систему не к периодическому движению, а к состоянию устойчивого равновесия.

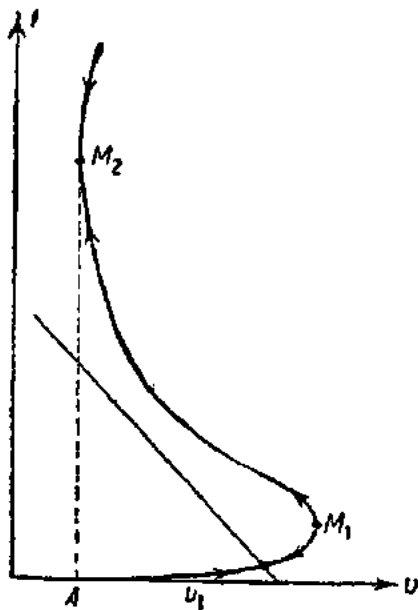


Рис. 195.

Относительно расположения состояний равновесия и точек бесконечного ускорения на фазовой кривой можно высказать следующее

общее соображение. Направление движения представляющей точки по фазовой кривой изменяется только либо в состояниях равновесия (где $\frac{dV}{dt}$, а вместе с тем и $\frac{d^2V}{dt^2}$ меняет знак), либо в точках бесконечного ускорения (где только $\frac{d^2V}{dt^2}$ меняет знак)¹⁾. Значит, состояния

равновесия и точки бесконечного ускорения всегда расположены так, что устойчивые точки чередуются с неустойчивыми, причем эти «устойчивые» и «неустойчивые» точки могут быть как состояниями равновесия, так и точками бесконечного ускорения. Так, например, в рассмотренном нами сейчас примере между двумя устойчивыми состояниями равновесия расположена «неустойчивая» точка бесконечного ускорения. Напомним еще раз, что точки бесконечного ускорения мы получили в результате идеализации — пренебрежения массой или самоиндукцией. Если учесть массу (или самоиндукцию), то

1) Знак $\frac{dV}{dt}$ определяет направление движения проекции представляющей точки

на ось V , а знак $\frac{d^2V}{dt^2}$ — направление движения проекций по оси $\frac{dV}{dt}$.

эти точки бесконечного ускорения исчезают, а состояния равновесия остаются. Но это не вызывает никаких затруднений, так как при учете массы мы получаем уравнение второго порядка, и представляющая точка может двигаться не только по фазовой кривой, но по всей фазовой плоскости. При рассмотрении систем, описываемых уравнением второго порядка, мы сможем более подробно проследить, как в результате уменьшения до нуля одного из колебательных параметров в системе происходит переход от общего случая движения по фазовой плоскости к более частному, рассматриваемому сейчас нами случаю движения по фазовой кривой. Заметим, кстати, уже сейчас, что при этом переходе от более общего случая к частному, вырожденному, хотя состояния равновесия и остаются, но характер их может измениться, например неустойчивые состояния равновесия могут превратиться в устойчивые. Все эти вопросы перехода от более общего случая к частному, вырожденному, будут рассмотрены в следующей главе.

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДВУМЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Введение

Мы будем рассматривать в этой главе автономные динамические системы, отображаемые двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (257)$$

Такие системы представляют собой наиболее общий случай среди тех, которые составляют сейчас предмет нашего рассмотрения. Как уже было сказано, к двум уравнениям первого порядка приводят системы с одной степенью свободы, при учете обоих колебательных параметров, например различные электротехнические и радиотехнические схемы, в частности рассмотрение лампового генератора при обычных упрощающих предположениях; к той же задаче приводят исследование механических систем с одной степенью свободы при всевозможных зависимостях сил от конфигурации и скорости, ряд простейших вопросов динамики полета и т. д. и т. д. К двум дифференциальным уравнениям первого порядка приводят также многие системы с двумя степенями свободы, в том случае, когда мы пренебрегаем двумя колебательными параметрами этих систем. И поэтому, хотя мы и ограничили нашу книгу главным образом системами с одной степенью свободы, мы в этой и следующих главах рассмотрим также некоторые системы, обладающие двумя степенями свободы, но такие, исследование которых приводит к двум уравнениям первого порядка.

Чтобы математически изучать подобные системы, мы могли бы не знать физического смысла тех переменных, для которых написаны уравнения (257); однако этих уравнений все же недостаточно для построения математического портрета рассматриваемой динамической системы. Таким портретом является картина движения представляющей точки в фазовом пространстве, дающая взаимно однозначное отображение многообразия состояний системы. Или, точнее, таким портретом является фазовое пространство, разбитое на траектории с указанием направления движений по траекториям.

Но характер фазового пространства должен точно так же быть выведен из физической задачи, как и вид дифференциальных уравнений.

Если, например, мы знаем, что наша система приходит к прежнему состоянию при изменении x на 2π , то этим самым мы имеем указания о характере фазового пространства, об его связности, об его «цилиндричности». Дифференциальные уравнения сами по себе еще не определяют характера возможных траекторий в фазовом пространстве, пока это пространство еще не выбрано. Чтобы пояснить это, рассмотрим простейшую линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b.$$

Если x и y — обычные декартовы координаты на фазовой плоскости, то фазовые траектории суть прямые линии. На фазовой плоскости мы имеем континуум «убегающих» движений. Если же x и y — ортогональные криволинейные координаты на торе (например x — азимут меридиональной плоскости, а y — полярный угол с вершиной на оси тора), то фазовые траектории для той же системы дифференциальных уравнений образуют либо континуум замкнутых кривых (если a и b соизмеримы), т. е. континуум периодических решений, либо континуум траекторий, всюду плотно заполняющих поверхность тора (если a и b несоизмеримы), т. е. континуум так называемых квази-периодических решений. Этот пример показывает значение природы фазового пространства, его связности для картины поведения фазовых траекторий. Общие законы поведения, определяемые одним и тем же уравнением интегральных кривых, будут различны в случае плоскости и тора.

Мы ограничимся при изложении общей теории фазовых траекторий, определяемых системой уравнений (257), наиболее важным для приложений случаем, когда двумерное фазовое пространство представляет собой плоскость. На примерах мы коснемся имеющего существенное значение для механики случая цилиндрической фазовой поверхности.

§ 2. Теорема существования

Итак, мы рассматриваем систему двух автономных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (257)$$

Функции P и Q мы предположим аналитическими в некоторой области

$$|x - x_0| < A, \quad |y - y_0| < B.$$

Заметим, что если бы мы имели одно уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, то заменой $\dot{x} = y$ мы всегда могли бы привести его к виду:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = y.$$

Для системы (257) существуют совершенно аналогичные теоремы существования и непрерывной зависимости от начальных условий,

как и для одного автономного уравнения первого порядка. Ввиду того, что эти теоремы были рассмотрены для случая одного уравнения первого порядка, мы здесь приведем только их формулировки.

1. Теорема существования (теорема Коши). Пусть в области $|x - x_0| < A$ и $|y - y_0| < B$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции x, y . Тогда можно указать такое b ($b > 0$), что в интервале $|t - t_0| < b$ существует единственная система решений $x = x(t)$, $y = y(t)$, принимающая значения $x = x_0$ и $y = y_0$ при $t = t_0$. При этом $x(t)$ и $y(t)$ суть аналитические функции t в интервале $|t - t_0| < b^1$. Так как решение зависит от начальных условий, то иногда, для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем записывать такое решение в виде:

$$x = \varphi(x_0, y_0; t - t_0), \quad y = \psi(x_0, y_0, t - t_0).$$

Опять возникает вопрос, может ли быть продолжено решение для значений t , больших $t + b$, не существует ли решений на интервале времени, большем, чем $t_0 - b$, $t_0 + b$, совпадающих с нашим решением на интервале $t_0 - b$, $t_0 + b$?

Пусть x_1, y_1 суть предельные значения функций $x(t)$, $y(t)$ при $t \rightarrow t_0 + b^2$. Если точка x_1, y_1 есть точка, в которой функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ голоморфны, то, очевидно, решение может быть продолжено дальше, так как к этой точке снова можно применить нашу теорему. Возможность продолжения может быть нарушена только в том случае, если для какого-нибудь значения t мы приходим в точку, в которой хотя бы одна из функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ перестает быть голоморфной функцией, а также в том случае, когда для какого-нибудь конечного значения t , x или y уходит в бесконечность; если ни тот, ни другой случай не имеет места, решение может быть продолжено для $-\infty < t < +\infty$.

2. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений. Для заданного промежутка времени от t_0 до t_1 , в течение которого решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $\bar{y} = \bar{y}(t)$ не выходят из области аналитичности функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, и всякого сколь угодно малого ϵ ($\epsilon > 0$) всегда существует такое положительное число δ , что

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \epsilon \quad \text{и} \quad |y(t) - \bar{y}(t)| < \epsilon \quad (\text{при } t_0 < t < t_1),$$

если $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$ и $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$. При этом

$$x_0 = x(t_0); \quad \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0); \quad y_0 = y(t_0); \quad \bar{y}_0 = \bar{y}(t_0).$$

¹) Теорема Коши справедлива и при более общих предположениях относительно функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Например, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ уже не аналитические, но непрерывны и имеют непрерывные частные производные P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y внутри области $|x - x_0| < A$, $|y - y_0| < B$. Пусть в этой же области $|P(x, y)| < M$, $|Q(x, y)| < M$. Тогда для всех значений t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < b$, где b — наименьшее из чисел $\frac{A}{M}, \frac{B}{M}$, существует одно и только одно решение системы (257), принимающее значения $x = x_0, y = y_0$ при $t = t_0$.

²) Можно доказать, что эти пределы x_1 и y_1 заведомо существуют, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют лишь изолированные точки нарушения голоморфизма.

Иными словами, это значит, что всегда можно задать начальные значения, настолько близкие друг к другу, чтобы на любом, наперед заданном конечном промежутке времени движения, начинающиеся с этих близких начальных значений, как угодно мало отличались друг от друга.

Всякое решение системы (257) $x = x(t)$, $y = y(t)$ мы можем рассматривать как параметрическое уравнение некоторой кривой на фазовой плоскости x, y . По принятой нами терминологии такие кривые носят название фазовых траекторий. Каждая траектория может быть задана бесчисленным множеством движений, отличающихся одно от другого лишь началом отсчета времени. Легко видеть, что в области аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ фазовые траектории в силу теоремы Коши не могут пересекаться. Если в некоторой точке x_1, y_1 функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются одновременно в нули, то уравнения (257) удовлетворяются системой $x = x_1, y = y_1$ и соответствующая траектория вырождается в единственную точку — состояние равновесия. Если разделить одно из уравнений (257) на другое, то мы получим одно уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (258)$$

Применяя теорему Коши¹⁾ к уравнению (258), можно сделать следующие заключения. Через каждую точку плоскости x, y в области аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (258), за исключением может быть точек, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно обращаются в нули. Эти точки носят название особых точек уравнения (258) и, как мы убеждались много раз, они являются, вообще говоря, состояниями равновесия для системы (257)²⁾.

§ 3. Линейные системы общего типа

Рассмотрим сначала простейшие динамические системы, принадлежащие к виду (257), а именно те, которые при целесообразной идеализации отображаются системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by; \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (259)$$

1) Для этого случая одного уравнения первого порядка формулировка теоремы Коши иная, чем это сделано в начале данного параграфа.

2) Обычно две кривые, являющиеся решением дифференциального уравнения (258) и составляющие аналитическое продолжение одна другой, называются одной интегральной кривой, хотя бы такая интегральная кривая проходила через точку, где дифференциальное уравнение теряет смысл. Интегральные кривые в таком понимании (решения, соответствующие так понимаемым интегральным кривым, мы автоматически получаем, например, в тех случаях, когда уравнение (258) интегрируется в квадратах) могут пересекаться в особых точках. Поэтому различают интегральные кривые уравнения (258) и фазовые траектории системы (257); само собою разумеется, что совокупность траекторий системы (257) совпадает с совокупностью интегральных кривых уравнения (258).

где a, b, c, d — константы, а x и y мы будем считать декартовыми координатами на фазовой плоскости.

Как известно, общее решение системы (259) имеет вид¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{S_1 t} + C_2 e^{S_2 t}; \\ y &= C_1 \lambda_1 e^{S_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{S_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (260)$$

где S_1 и S_2 — корни так называемого характеристического уравнения:

$$S^2 - S(a + d) + (ad - bc) = 0; \quad (261)$$

а λ_1 и λ_2 — корни так называемого «уравнения коэффициентов распределения»:

$$b\lambda^2 + (a - d)\lambda - c = 0. \quad (262)$$

Мы не будем исследовать характер движений по времени в зависимости от характера корней характеристического уравнения и не будем приводить решений к действительному виду в случае комплексных S и λ ²⁾, а перейдем сразу к анализу характера возможных траекторий на фазовой плоскости.

Для этой цели мы используем, подобно тому как мы это делали в главе I для частного случая $a = 0$, линейное однородное преобразование координат. Именно, с помощью линейного однородного преобразования

$$\xi = \alpha x + \beta y; \quad \eta = \gamma x + \delta y \quad (263)$$

приведем систему (259) к так называемому «каноническому» виду:

$$\frac{d\xi}{dt} = S_1 \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = S_2 \eta, \quad (264)$$

где S_1 и S_2 — пока какие-то константы.

Нетрудно показать, что это всегда можно сделать при наших предположениях о характере корней уравнения (261). Дифференцируя формулы преобразования (263), имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dy}{dt}. \quad (265)$$

Заменяя здесь $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их выражениями из основной дифференциальной системы (259), приходим к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} S_1 (\alpha x + \beta y) &= \alpha (ax + by) + \beta (cx + dy), \\ S_2 (\gamma x + \delta y) &= \gamma (ax + by) + \delta (cx + dy). \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

1) Мы предполагаем, что оба корня имеют отличные от нуля действительные части и что нет кратных корней.

2) Нетрудно видеть, что S и λ становятся одновременно комплексными, если $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

Сравнивая здесь коэффициенты при x и y в правых и левых частях, приходим к системе четырех уравнений, линейных и однородных относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(a - S_1) + \beta c &= 0, & \gamma(a - S_2) + \delta c &= 0, \\ b + \beta(d - S_1) &= 0, & \gamma b + \delta(d - S_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (267)$$

Эти уравнения дают для $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не равные тождественно нулю решения только в том случае, если S_1 и S_2 являются корнями уравнения:

$$S^2 - (a + d)S + (ad - bc) = 0, \quad (268)$$

т. е. корнями обычного характеристического уравнения. Каждая пара линейных однородных уравнений (267) определяет лишь отношение неизвестных. Первая пара определяет отношение $\frac{\alpha}{\beta}$, вторая $\frac{\gamma}{\delta}$. Так как по нашему предположению корни характеристического уравнения не равны между собой, то эти отношения не равны между собой (или, точнее, могут быть выбраны не равными между собой), и, следовательно, детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Отличие от нуля этого детерминанта обеспечивает возможность разрешения уравнений (266) относительно x и y и, следовательно, гарантирует взаимную однозначность преобразования. Таким образом мы видим, что в невырожденном случае всегда возможно преобразовать нашу систему к каноническому виду.

Рассмотрим различные случаи, которые могут здесь представиться.

1) *Корни S_1 и S_2 действительны и одного знака.* Тогда коэффициенты преобразования действительны, и мы имеем переход от действительной плоскости x, y к действительной плоскости ξ, η (мы будем интерпретировать преобразование фазовой плоскости в активном смысле). Наша задача заключается в исследовании преобразованной фазовой плоскости ξ, η , где имеет силу каноническая система

$$\frac{d\xi}{dt} = S_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = S_2 \eta, \quad (264)$$

и затем в истолковании полученных результатов для исходной плоскости x, y .

Деля одно из канонических уравнений на другое, имеем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{S_2}{S_1} \frac{\eta}{\xi}. \quad (269)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\eta = C\xi^a, \quad \text{где } a = \frac{S_2}{S_1}. \quad (270)$$

Так как в рассматриваемом случае S_1 и S_2 одного знака, то $a > 0$.

Мы имеем дело с кривыми параболического типа. Если $a > 1$, то все интегральные кривые (кроме кривой $C = \infty$, соответствующей оси η) касаются оси ξ (рис. 196). Если $a < 1$, то все интегральные кривые

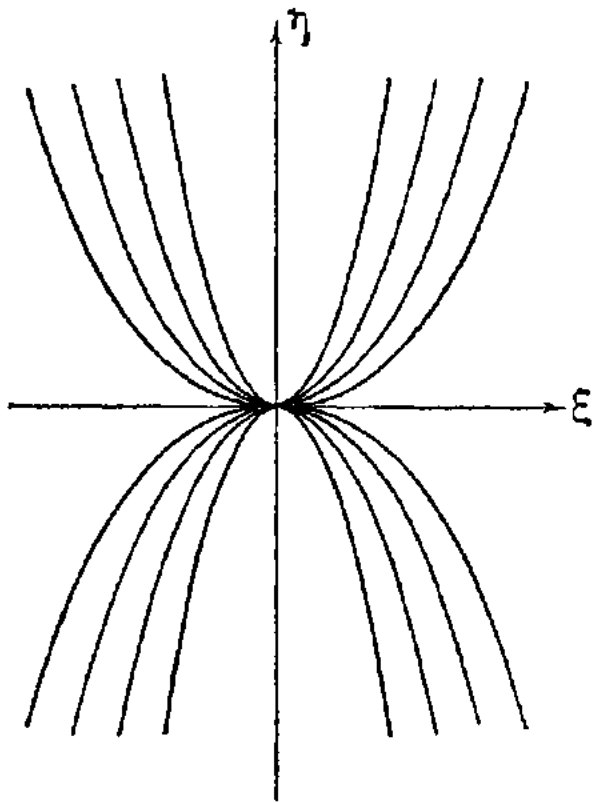


Рис. 196.

(кроме кривой $C = 0$, соответствующей оси ξ) касаются оси η (рис. 197). Начало координат является особой точкой. Как мы уже знаем, это — особая точка типа узла. Нетрудно выяснить направление движений на фазовой плоскости.

Если S_1 и S_2 отрицательны, то, как видно из уравнений (264), ξ и η убывают с течением времени. Изображающая точка с течением времени приближается к началу координат, однако никогда его не достигая в конечное время, так как это противоречило бы теореме Коши, которая для системы (264) справедлива на всей плоскости ξ, η . Мы имеем дело с *устойчивым узлом*. Если S_1 и S_2 положительны, то ξ и η возрастают с течением времени. Изображающая точка с течением времени удаляется от начала

координат. Мы имеем дело с *неустойчивым узлом*.

Перейдем теперь обратно на фазовую плоскость x, y . Как мы знаем, при этом не меняется общий качественный характер поведения интегральных кривых вокруг

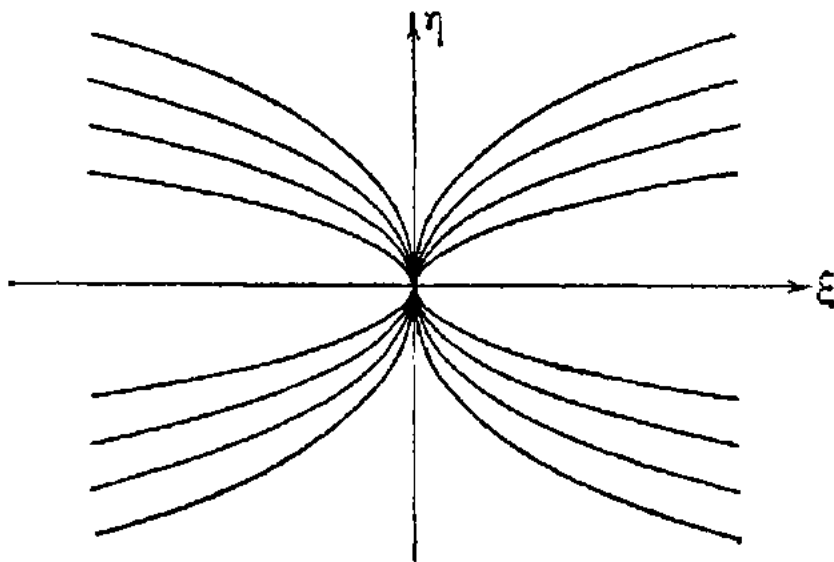


Рис. 197.

состояния равновесия, но касательные к интегральным кривым в особой точке уже не будут совпадать с осями координат. Представляет интерес выяснить направление касательных к интегральным кривым в особой точке на плоскости x, y . Так как на плоскости ξ, η такими касательными служили оси $\xi = 0$ и $\eta = 0$, то для ответа на этот вопрос

достаточно выяснить, каким прямым на плоскости x, y соответствуют прямые $\xi = 0$ и $\eta = 0$ на плоскости ξ, η . Из уравнений (263) видно, что прямой $\xi = 0$ на плоскости соответствует прямая

$$ax + \beta y = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta} x, \quad (271)$$

т. е. прямая, проходящая через начало координат и имеющая угловой коэффициент

$$\kappa_1 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{a-S_1} = \frac{d-S_1}{b},$$

прямой же $\eta = 0$ на плоскости x, y соответствует прямая

$$\gamma x + \delta y = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{\gamma}{\delta} x, \quad (272)$$

т. е. тоже прямая, проходящая через начало и имеющая угловой коэффициент

$$\kappa_2 = -\frac{\gamma}{\delta} = \frac{c}{a-S_2} = \frac{d-S_2}{b}.$$

Составим квадратное уравнение, корнями которого будут угловые коэффициенты κ_1 и κ_2 . Так как

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 &= \frac{d-S_1}{b} + \frac{d-S_2}{b} = \frac{d-a}{b}, \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 &= \left(\frac{d-S_1}{b}\right) \cdot \left(\frac{d-S_2}{b}\right) = -\frac{c}{b}, \end{aligned}$$

то для x мы имеем уравнение:

$$bx^2 + (a-d)x - c = 0, \quad (273)$$

которое, как мы видим, совпадает с уравнением для коэффициентов распределения.

Прямые $y = \kappa_1 x$ и $y = \kappa_2 x$ служат, с одной стороны, интегральными кривыми для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$ ¹⁾ (подобно тому как прямые $\xi = 0$ и $\eta = 0$ служат интегральными кривыми для уравнения $\frac{d\eta}{d\xi} = a \frac{\eta}{\xi}$), с другой стороны, они являются касательными (в начале координат) ко всем прочим интегральным кривым. Именно, одна из этих прямых служит касательной для всех, кроме одной, интегральных кривых, другая же служит касательной лишь для самой себя ²⁾. Пользуясь всем предыдущим, нетрудно представить себе характер фазовых траекторий вокруг устойчивого (рис. 198) или неустойчивого (рис. 199) узла в общем случае, т. е. характер траекторий на фазовой плоскости x, y , когда S_1 и S_2 действительны и одинаковых знаков.

2) Корни S_1 и S_2 действительны, но разных знаков. Преобразование от координат x, y к координатам ξ, η опять действительное.

1) Каждая из прямых $y = \kappa_1 x$ или $y = \kappa_2 x$ не является одной траекторией, а состоит из трех траекторий (два движения к состоянию равновесия или от состояния равновесия и само состояние равновесия).

2) Можно дать рецепт выбора того κ , которому соответствует касание континуума кривых. Для того чтобы узнать это, составляем выражения $b\kappa_1 + a$ и $b\kappa_2 + a$; тот из корней κ_1 и κ_2 , для которого абсолютное значение этого выражения больше, и соответствует касанию континуума кривых.

На плоскости ξ, η точно так же имеет место каноническая система:

$$\frac{d\xi}{dt} = S_1 \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = S_2 \eta, \quad (264)$$

однако теперь S_1 и S_2 разных знаков.

Уравнение кривых на фазовой плоскости имеет вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -a \frac{\eta}{\xi}, \quad (274)$$

где $a = \left| \frac{S_2}{S_1} \right|$.

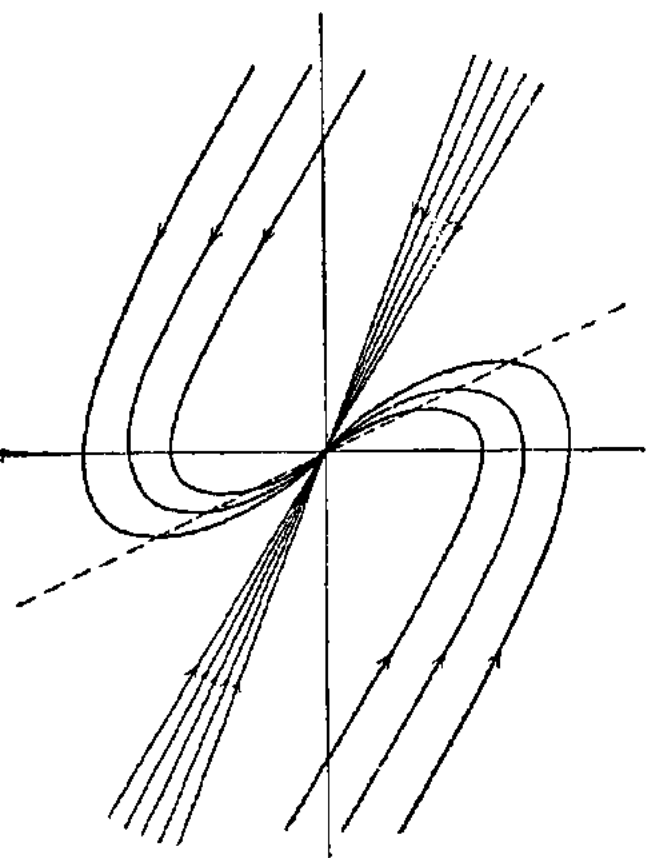


Рис. 198.

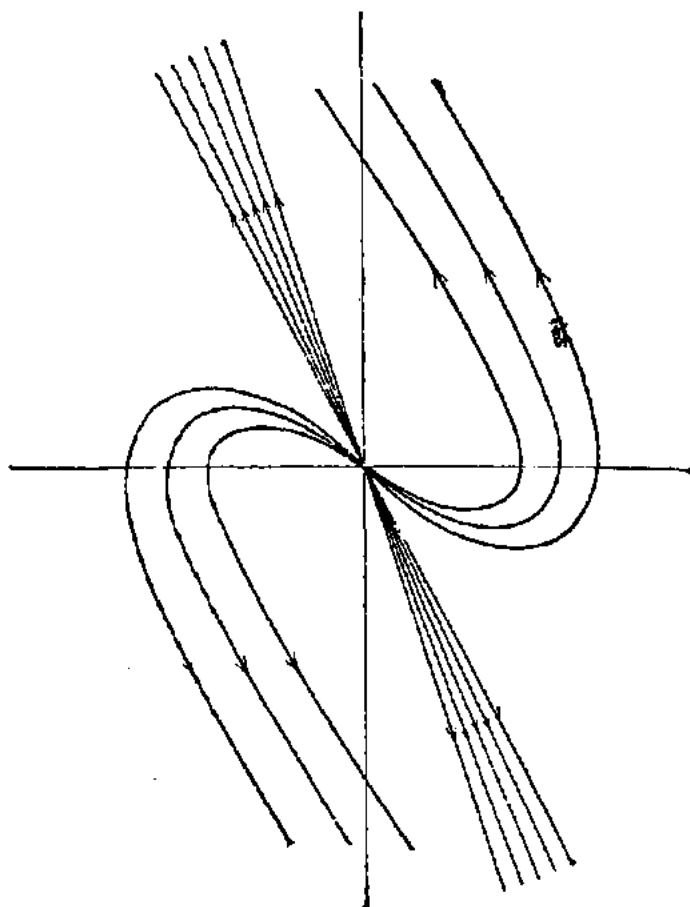


Рис. 199.

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\eta = C\xi^{-a}. \quad (275)$$

Это уравнение определяет семейство кривых гиперболического типа, имеющих обе оси координат асимптотами (при $a=1$ мы имели бы семейство обычных равнобочных гипербол). Оси координат и в этом случае являются интегральными кривыми; это будут единственные интегральные кривые, проходящие через начало координат ¹⁾ (рис. 200).

¹⁾ Каждая из таких прямых, проходящих через начало координат, с точки зрения системы уравнений (259) состоит из трех траекторий, именно — из двух движений к состоянию равновесия (или от состояния равновесия) и из состояния равновесия

Начало координат и здесь, конечно, является особой точкой. Особая точка такого типа, как мы уже знаем, носит название «седла» (линии уровня вблизи горной седловины ведут себя как раз таким образом).

Известные уже нам соображения позволяют в этом случае установить характер движения изображающей точки по фазовым траекториям вблизи состояния равновесия. Пусть, например, $S_1 > 0$ и $S_2 < 0$. Тогда изображающая точка, помещенная на оси ξ , будет удаляться от начала координат, а помещенная на оси η , будет неограниченно приближаться к началу координат, не достигая его в конечное время. Направления движений по остальным фазовым траекториям легко указать, пользуясь соображениями непрерывности (рис. 200).

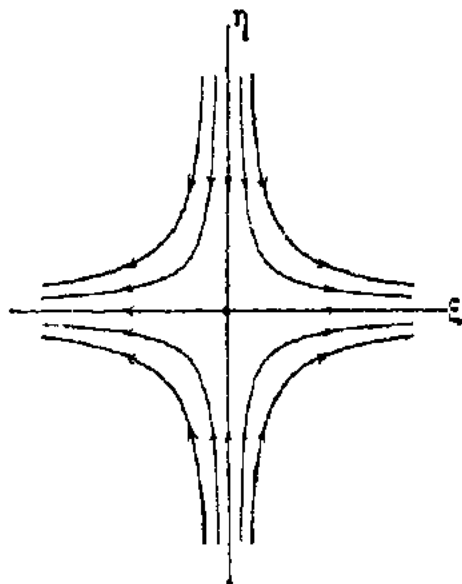


Рис. 200.

Как мы уже знаем, особая точка типа седла неустойчива. Переходя теперь обратно к координатам x, y , мы получим в силу уже много раз использованных соображений ту же самую качественную картину характера траекторий вокруг начала координат. Как и в предыдущем случае, угловые коэффициенты прямых, проходящих через особую точку, даются уравнением:

$$bx^2 + (a - d)x - c = 0.$$

3) S_1 и S_2 — комплексные сопряженные. Нетрудно видеть, что тогда при действительных x и y мы будем иметь комплексно-сопряженные ξ и η . Однако, вводя еще одно промежуточное преобразование, легко можно и в этом случае свести рассмотрение к действительному линейному однородному преобразованию. Положим

$$\left. \begin{aligned} S_1 = a_1 + ib_1, \quad \xi = u + iv, \\ S_2 = a_1 - ib_1, \quad \eta = u - iv, \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

где a_1, b_1, u, v — действительные величины. Тогда можно показать, что преобразование от x, y к u, v является при наших предположениях действительным, линейным, однородным, с детерминантом, отличным от нуля.

В силу уравнений (276) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= (a_1 + ib_1)(u + iv), \\ \frac{du}{dt} - i \frac{dv}{dt} &= (a_1 - ib_1)(u + iv), \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 v; \quad \frac{dv}{dt} = a_1 v + b_1 u. \quad (278)$$

Для исследования этой системы дифференциальных уравнений рассмотрим прежде всего вид интегральных кривых на фазовой плоскости. Дифференциальное уравнение этих кривых

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 v + b_1 u}{a_1 u - b_1 v} \quad (279)$$

легче интегрируется после перехода к полярной системе координат. Именно, в полярной системе r, φ после подстановки $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$ получим:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_1}{b_1} r,$$

откуда

$$r = C e^{\frac{a}{b} \varphi}. \quad (280)$$

Таким образом мы видим, что на фазовой плоскости u, v мы имеем дело с семейством логарифмических спиралей, каждая из которых

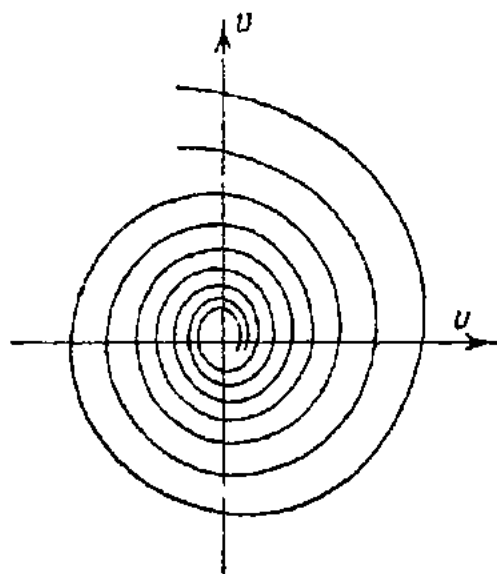


Рис. 201.

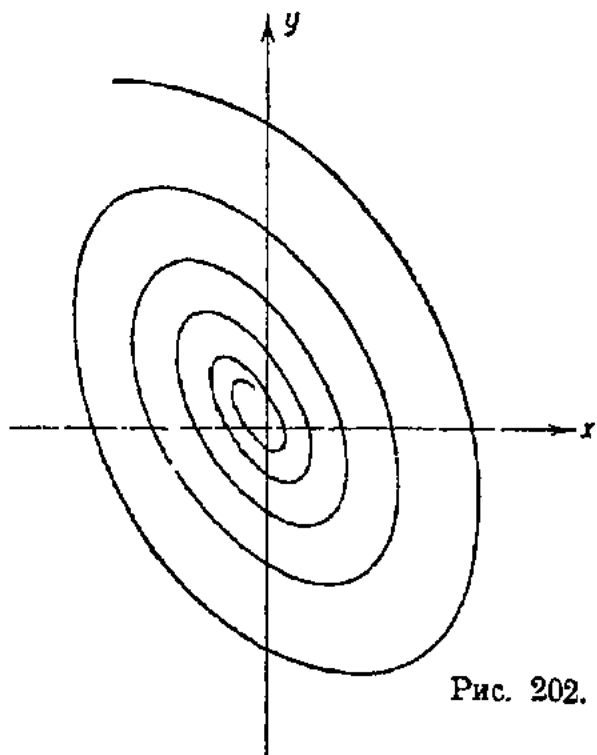


Рис. 202.

имеет асимптотическую точку в начале координат. Начало координат — особая точка типа фокуса (рис. 201).

Установим характер движения изображающей точки по фазовым траекториям. Умножая первое из уравнений (278) на u , второе на v и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 \rho, \quad (281)$$

где $\rho = u^2 + v^2$.

Таким образом при $a_1 < 0$ ($a_1 = \text{Re}[S]$) изображающая точка непрерывно приближается к началу координат, не достигая его, однако

в конечное время (так как это противоречило бы теореме Коши) и, значит, при $a_1 < 0$ мы имеем дело с *устойчивым фокусом*.

Если же $a_1 > 0$, то изображающая точка непрерывно удаляется от начала координат; мы имеем дело с *неустойчивым фокусом*.

При переходе от плоскости u, v к исходной фазовой плоскости x, y спирали также останутся спиралями, однако будут деформированы (рис. 202).

Сформулируем теперь результаты нашего исследования. В рассматриваемой общей линейной системе в случае отсутствия вырождения могут быть пять типов состояний равновесия, пять типов особых точек в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

- 1) Устойчивый узел (S_1 и S_2 действительны и отрицательны).
- 2) Неустойчивый узел (S_1 и S_2 действительны и положительны).
- 3) Седло (S_1 и S_2 действительны и разных знаков).
- 4) Устойчивый фокус (S_1 и S_2 комплексны и $\text{Re}[S] < 0$).
- 5) Неустойчивый фокус (S_1 и S_2 комплексны и $\text{Re}[S] > 0$).

Различные встречающиеся здесь случаи мы для наглядности представим в виде некоторой диаграммы, которая к тому же часто бывает удобна на практике.

Именно, введем обозначения:

$$p = -(a + d),$$

$$q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение запишется в виде:

$$S^2 + pS + q = 0. \quad (282)$$

Для различных p и q будем иметь различные корни S_1 и S_2 . Рассмотрим плоскость с прямоугольными декартовыми координатами p и q и отметим на этой плоскости области, соответствующие тому или другому характеру особой точки (рис. 203).

Условием устойчивости состояния равновесия является, как не трудно видеть, наличие отрицательной действительной части у S_1 и S_2 . Необходимым и достаточным условием для этого являются неравенства $p > 0$; $q > 0$. На нашей диаграмме' этому условию соответствуют точки, расположенные в первой четверти. Особая точка будет типа фокуса, если S_1 и S_2 будут комплексны. Условием этого является $p^2 - 4q > 0$, т. е. этому условию отвечают те точки плоскости p, q , которые лежат выше параболы $p^2 = 4q$. Аналогично S_1 и S_2 будут действительны, но разных знаков, т. е. особая точка будет типа седла, если $q < 0$, и т. д. Мы получаем диаграмму распределения особых точек (рис. 203). Если коэффициенты линейной системы a, b, c, d

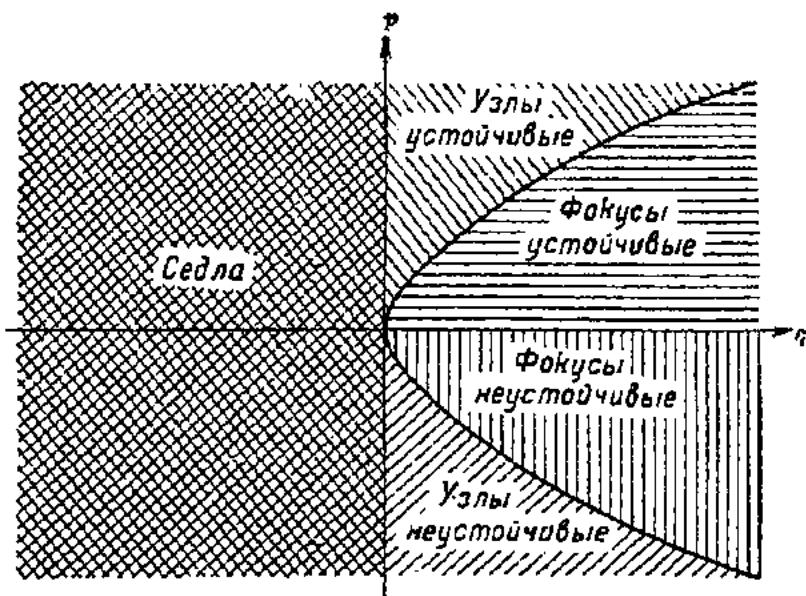


Рис. 203.

зависят от некоторого параметра λ , то при изменении параметра λ будут меняться соответственно p и q . На плоскости p, q мы будем иметь таким образом некоторую кривую, переходящую при некоторых бифуркационных значениях параметра λ из одной области в другую. На диаграмме видно, как могут происходить такие переходы. Если исключить особые случаи (прохождение через начало координат), то нетрудно видеть, что седло может перейти в узел, устойчивый или неустойчивый: устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус и т. д. Заметим (это нам понадобится в дальнейшем), что случай равных корней ($p^2 - 4q = 0$) соответствует границе между узлами и фокусами. Если коэффициенты линейной системы зависят от двух параметров λ_1 и λ_2 , то обычно бывает целесообразно построить плоскость с прямоугольными координатами λ_1 и λ_2 и на этой плоскости построить диаграмму, соответствующую только что рассмотренной.

§ 4. Пример — «универсальная схема»

Для иллюстрации всего сказанного выше относительно общей линейной системы может служить схема, приведенная на рис. 204¹⁾, конечно, при условии соответствующей ее идеализации и в частности «линеаризации». Именно, мы будем считать, что характеристики как первой, так и второй лампы прямолинейны. Это предположение, как мы уже неоднократно указывали, имеет смысл только для небольших

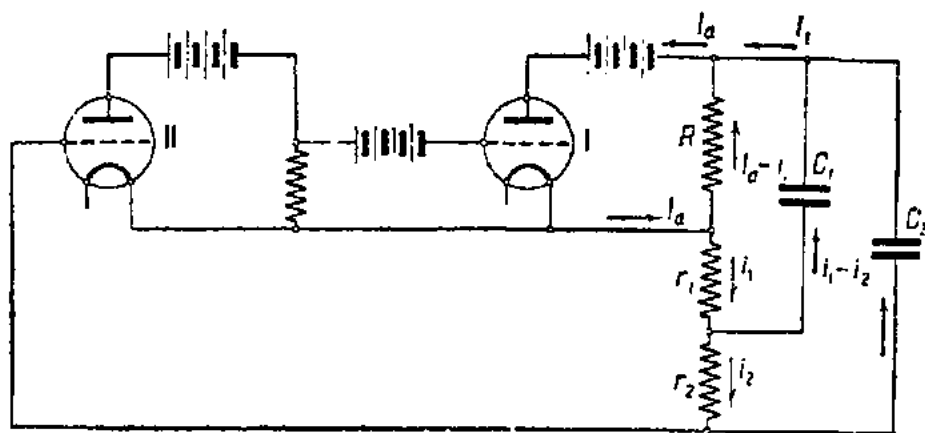


Рис. 204.

областей изменения напряжений на сетках ламп, и поэтому линеаризация лишает нас возможности рассматривать поведение системы во всей области изменения переменных. Но в известной, ограниченной области мы можем считать систему линейной и правильно описать ее поведение в этой области. Помимо «линеаризации» мы применим и другую, уже привычную нам идеализацию, именно — пренебрежение сеточными токами²⁾. В результате мы сможем, пользуясь законами

²⁾ Пренебрежение анодной реакцией в этом случае не нужно для упрощения задачи, так как, поскольку мы приняли, что характеристики прямолинейны, мы можем вместо постоянной статической крутизны прямо вставить в формулы постоянную же динамическую крутизну (получающуюся в результате учета анодной реакции).

Кирхгофа, описать поведение системы при помощи следующих двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_2 i_2 &= - \int \frac{i_2}{C_2} dt + \int \frac{i_1 - i_2}{C_1} dt, \\ r_1 i_1 - R(I_a - i_1) &= - \int \frac{i_1 - i_2}{C_1} dt. \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

Подставляя $I_a = Sk(r_1 i_1 + r_2 i_2)$, где S — крутизна характеристики лампы I , а k — коэффициент усиления каскада с лампой II , получаем два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{-\frac{1}{C_1}(1 - RSk)i_1 + \left[\frac{1}{C_1}(1 - RSk) - \frac{1}{C_2}RSk\right]i_2}{R + r_1(1 - RSk)},$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\frac{1}{C_1}i_2 - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i_2}{r_2}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{a}{C_1(R + ar_1)}i_1 + \left[\frac{a}{C_1(R + ar_1)} - \frac{1-a}{C_2(R + ar_1)}\right]i_2, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{C_1 r_2}i_1 - \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i_2, \end{aligned} \right\} \quad (284)$$

где $a = 1 - RSk$, причем a может быть величиной либо положительной, либо отрицательной, но во всяком случае меньшей, чем $+1$. Для упрощения всех дальнейших выкладок положим, что $C_1 = C_2 = C$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{C(R + ar_1)}[ai_1 + (1 + 2a)i_2], \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{Cr_2}[i_1 - 2i_2]. \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

Чтобы определить характер особой точки, составим характеристическое уравнение системы линейных уравнений (285):

$$S^2 + S\left[\frac{a}{C(R + ar_1)} + \frac{2}{Cr_2}\right] - \frac{1}{C^2 r_2 (R + ar_1)} = 0. \quad (286)$$

Корни этого характеристического уравнения выразятся так:

$$S_{1,2} = -\frac{ar_2 + 2R + 2ar_1}{2C(R + ar_1)r_2} \pm \sqrt{\frac{[ar_2 + 2R + 2ar_1]^2}{4C^2(R + ar_1)^2 r_2^2} - \frac{1}{C^2 r_2 (R + ar_1)}} =$$

$$= -\frac{ar_2 + 2(R + ar_1) \pm \sqrt{[ar_2 + 2(R + ar_1)]^2 - 4r_2(R + ar_1)}}{2C(R + ar_1)r_2}. \quad (287)$$

Характер этих корней зависит от ряда параметров схемы, в частности от величин трех сопротивлений R , r_1 и r_2 . Выбирая разные значения этих сопротивлений, можно получить все рассмотренные выше

типы особых точек. Прежде всего при $R=0$ (так как в этом случае $\alpha=1$) мы получим два действительных отрицательных корня, т. е. особую точку — устойчивый узел. Этого и следовало ожидать, так как при $R=0$ лампа I не передает напряжений во внешнюю цепь и, следовательно, не играет никакой роли, а в отсутствие электронных ламп в схеме, состоящей только из емкостей и омических сопротивлений, могут существовать состояния равновесия только типа устойчивого узла (могут происходить только затухающие аperiodические движения). Чтобы упростить дальнейшее рассмотрение, будем считать переменными параметрами только r_1 и r_2 , а параметр R — постоянным. Для удобства выберем такое значение R , чтобы $\alpha=-1$, и, считая дальше параметр R неизменным, т. е. подставив $\alpha=-1$, проследим, как изменяется характер особых точек при изменении величин сопротивлений r_1 и r_2 . Условие, чтобы (при $\alpha=-1$) корни были действительны, таково:

$$r_2^2 + 4(R - r_1)^2 - 8r_2(R - r_1) > 0. \quad (288)$$

Граница, разделяющая области действительных и комплексных корней, как видно из этого условия, определяется уравнением:

$$[r_2 - 4(R - r_1)]^2 - [2\sqrt{3}(R - r_1)]^2 = 0.$$

Это уравнение второго порядка распадается на два уравнения первого порядка ¹⁾, и, следовательно, корни характеристического уравнения будут действительны во всей области значений r_1 и r_2 , кроме «клина», образованного прямыми

$$r_2 + 0,6r_1 = 0,6R, \quad r_2 + 7,4r_1 = 7,4R, \quad (289)$$

пересекающимися в точке $r_1 = R, r_2 = 0$ (рис. 205). Для всех значений r_1 и r_2 , лежащих внутри этого «клина», корни характеристического уравнения комплексные и особая точка — фокус. С другой стороны, условие, чтобы действительная часть корней была отрицательна, таково:

$$-r_2 + 2R - 2r_1 > 0, \quad (290)$$

и, следовательно, значения r_1 и r_2 , лежащие ниже прямой $r_2 + 2r_1 = 2R$, соответствуют устойчивым узлам и фокусам, а лежащие выше этой прямой — неустойчивым. Наконец, условие того, что оба действительных корня одного знака, таково:

$$|-r_2 + 2R - 2r_1| > \sqrt{r_2^2 + 4(R - r_1)^2 - 8r_2(R - r_1)}. \quad (291)$$

Это условие будет соблюдено, только если $r_1 < R$. Следовательно,

¹⁾ Уравнение, определяющее границу комплексных корней, распадается на два уравнения первого порядка лишь при данном частном значении α . В общем же случае граница комплексных корней представляла бы собой некоторую кривую второго порядка.

справа от вертикальной прямой $r_1 = R$ лежат значения r_1 и r_2 , для которых оба корня равных знаков и особая точка является седлом. Окончательно мы получаем диаграмму «областей распространения» состояний равновесия разных типов, изображенную на рис. 205. Как видим из этой диаграммы, каждому типу состояния равновесия соответствует некоторая (ограниченная или неограниченная) «область распространения». Прямая $r_2 + 2r_1 = 2R$ служит границей между устойчивыми и неустойчивыми состояниями равновесия и определяет, следовательно, условия самовозбуждения схемы. Если это условие соблюдено и особая точка является неустойчивой, то мы можем лишь утвер-

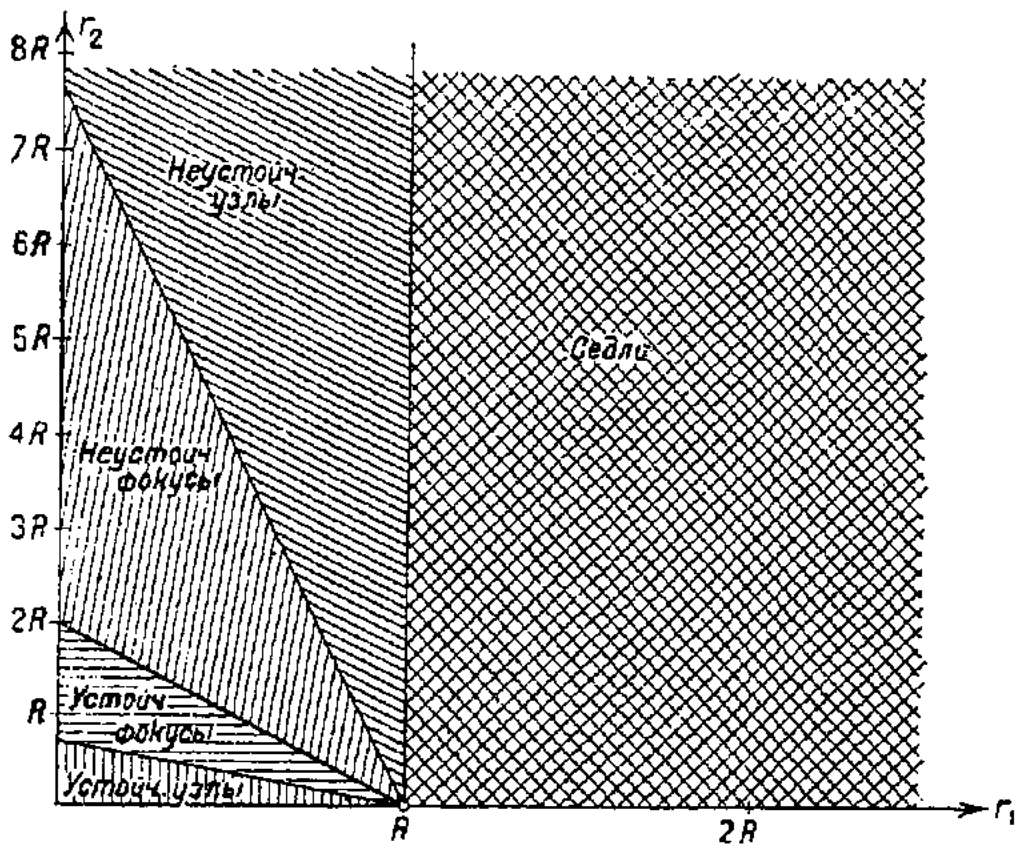


Рис. 205.

ждать, что система уходит из состояния равновесия, и можем определить характер этого движения, но ничего не можем сказать о дальнейшей судьбе системы, так как мы ограничились линейной проблемой. Итак, в рассмотренной схеме путем изменения параметров r_1 и r_2 (или даже только одного r_1 при известном образом выбранном и зафиксированном r_2) могут быть получены состояния равновесия, соответствующие любому типу особых точек первого порядка. В силу этого мы и назвали рассмотренную схему «универсальной». Универсальная схема по существу является схемой с двумя степенями свободы, так как в ней можно указать два независимых тока ¹⁾. Однако в силу того, что каждая из этих степеней свободы вырождена (из-за

¹⁾ Напомним, что по Кирхгофу число степеней свободы или число независимых токов в электрической цепи определяется максимальным числом разрывов, которые нужно произвести в сложной цепи, чтобы в ней не осталось ни одного замкнутого контура.

отсутствия самоиндукции), система описывается двумя уравнениями первого (а не второго, как в случае наличия самоиндукции) порядка и поэтому может быть рассмотрена теми методами, которые развиты в этой книге. Заметим кстати, что при $r_2 = 0$ универсальная схема превращается в схему с одной степенью свободы, описанную нами в предшествующей главе (гл. IV, § 11).

§ 5. Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия

От частного случая линейной системы вернемся снова к общему случаю динамической системы, описываемой двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (292)$$

Пусть соответствующее фазовое пространство является плоскостью x, y , где x и y — декартовы координаты.

Чтобы отыскать на фазовой плоскости состояния равновесия, нужно найти те точки фазовой плоскости, где фазовая скорость равняется нулю, или, иначе, нужно найти точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (293)$$

Как мы уже знаем, эти точки будут *особыми* точками дифференциального уравнения первого порядка, определяющего интегральные кривые:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (294)$$

В этом смысле мы будем говорить, что состояния равновесия нашей динамической системы суть особые точки семейства интегральных кривых на фазовой плоскости.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости состояний равновесия. Напомним определение устойчивости и неустойчивости для этого общего случая. Состояние равновесия называется устойчивым, если, задав вокруг состояния равновесия *любую* область ϵ , всегда можно найти соответствующую область $\delta(\epsilon)$ такую, что помещенная в область $\delta(\epsilon)$ изображающая точка *никогда* не достигнет границы области ϵ . Состояние равновесия называется неустойчивым, если существует такая область ϵ вокруг состояния равновесия, что для нее нельзя подобрать область $\delta(\epsilon)$, обладающую только что указанным свойством. Пуанкаре ^[10] и Ляпунов ^[11] дали аналитический метод исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим этот метод и дадим его обоснование.

Мы интересуемся устойчивостью состояния равновесия x_0, y_0 [x_0, y_0 — точки пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$]. Так как это значит, что мы интересуемся характером движений при наличии некоторых отклонений от состояния равновесия, то для удобства

выкладок мы введем вместо переменных x, y новые зависимые переменные ξ, η , определив их как смещения относительно положения равновесия (на фазовой плоскости):

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \quad (295)$$

По нашему предположению $P(x, y), Q(x, y)$ — аналитические функции. Переходя от переменных x, y к переменным ξ, η в уравнениях (292), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta + [p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots], \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta + [q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

где

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0, y_0), & b &= P'_y(x_0, y_0), \\ c &= Q'_x(x_0, y_0), & d &= Q'_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

и т. д.

Обоснованный Ляпуновым метод исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнениях (296) нелинейные члены. Мы получим тогда систему *линейных* уравнений с постоянными коэффициентами, так называемую систему уравнений первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \quad (297)$$

Решение этой системы уравнений напишется сразу, коль скоро нам известны корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a - S & b \\ c & d - S \end{vmatrix} = 0.$$

Ляпунов показывает, что в случае, если оба корня этого уравнения имеют отличные от нуля действительные части, то исследование уравнений первого приближения, полученных путем отбрасывания нелинейных членов, всегда дает правильный ответ на вопрос об устойчивости состояния равновесия в системе (292). Именно, если оба корня имеют отрицательную действительную часть и если, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то состояние равновесия будет устойчивым; если же хотя бы один корень имеет положительную действительную часть и если, следовательно, система уравнений первого приближения имеет семейство нарастающих решений, то состояние равновесия неустойчиво.

Перейдем к доказательству этих утверждений Ляпунова. При этом рассмотрим отдельно случай действительных S и случай комплексных S .

1. Случай действительных корней характеристического уравнения. В этом случае, как мы знаем, систему уравнений первого приближения можно путем линейного однородного преобразования¹⁾:

$$u = \alpha\xi + \beta\eta, \quad v = \gamma\xi + \delta\eta \quad (298)$$

1) См. § 3. Здесь лишь изменены буквенные обозначения переменных.

привести к так называемому «каноническому» виду:

$$\frac{du}{dt} = S_1 u, \quad \frac{dv}{dt} = S_2 v, \quad (299)$$

где S_1 и S_2 — как раз корни характеристического уравнения. Применим то же преобразование к системе (292). Мы получим тогда опять нелинейную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= S_1 u + (\bar{p}_{11} u^2 + 2\bar{p}_{12} uv + \bar{p}_{22} v^2) + \dots, \\ \frac{dv}{dt} &= S_2 v + (\bar{q}_{11} u^2 + 2\bar{q}_{12} uv + \bar{q}_{22} v^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Умножая первое уравнение на u , второе на v и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = S_1 u^2 + S_2 v^2 + \dots = \Phi(u, v), \quad (301)$$

где $\rho = u^2 + v^2$.

Рассмотрим отдельно три случая: S_1 и S_2 оба отрицательны, S_1 и S_2 оба положительны, S_1 и S_2 разных знаков.

1. Если S_1 и S_2 оба отрицательны, то, как нетрудно показать, кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат изолированную точку, а поверхность $\rho = \Phi(u, v)$ имеет максимум в начале координат. Отсюда следует, что существует область (область S) вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) < 0$ [за исключением точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi(0, 0) = 0$]. Наличие такой области сразу позволит нам доказать устойчивость состояния равновесия.

Пусть вокруг начала координат нам задана какая-то область ϵ . Выберем в качестве области δ область, ограниченную окружностью с центром в начале координат, целиком лежащую как в области S , так и в области ϵ (рис. 206). Нетрудно видеть, что если мы поместим изображающую точку где-нибудь внутри области δ (ϵ), то она никогда не уйдет из этой области и, следовательно, не сможет достичь границы области ϵ . Действительно, для всех точек области δ , $\frac{d\rho}{dt} < 0$ ¹⁾; следовательно, изображающая точка с течением времени может только приближаться к началу координат и никогда не сможет начать удаляться от начала координат. Таким образом исследуемое состояние равновесия устойчиво по Ляпунову. Больше того, можно показать, что в этом случае состояние равновесия асимптотически устойчиво, т. е. что при неограниченном возрастании времени изображающая точка асимптотически стремится к состоянию равновесия. Действительно, так как $\rho = u^2 + v^2$ монотонно убывает с течением времени, начиная от начального значения $\rho = \rho_0$, то, при $t \rightarrow \infty$, ρ стремится либо к нулю, либо к какому-нибудь конечному пределу ρ_1 ($\rho_1 > 0$). Нетрудно видеть, что стремление к конечному пределу исключено, так как при

¹⁾ Кроме точки $u = 0, v = 0$; но изображающая точка, попавшая в начало координат, останется там в покое.

конечной скорости ($|\frac{dp}{dt}| > \gamma (\gamma > 0)$, если $\rho_0 \geq \rho > \rho_1$) за неограничен-
 ное время ρ должно было бы уменьшиться на сколь угодно большую
 величину и не смогло бы оставаться положительным. Очевидно, что
 эти утверждения не нарушатся при обратном возвращении на пло-
 скость ξ, η . Соответствующее состояние
 равновесия устойчиво по Ляпунову, и
 изображающая точка, помещенная вблизи
 состояния равновесия на плоскости ξ, η ,
 также будет асимптотически прибли-
 жаться к состоянию равновесия. Сде-
 лаем в связи с этим одно замечание,
 которое нам пригодится впоследствии.
 Каждая окружность на плоскости u, v ,
 целиком лежащая внутри области S ,
 является так называемым «циклом без
 прикосновения» (cycle sans contact по
 Пуанкаре), так как все интегральные
 кривые пересекают ее (при S_1 и S_2 от-
 рицательных все кривые входят внутрь)
 и ни одна не касается. Мы можем по-
 строить целое семейство таких окруж-
 ностей, вложенных друг в друга и стя-
 гивающихся к началу координат; такое
 семейство можно назвать семейством
 циклов без прикосновения. Посмотрим,
 как будет выглядеть эта картина на плоскости ξ, η . Так как кругу
 на плоскости u, v соответствует эллипс на плоскости ξ, η , то состояние
 равновесия на плоскости ξ, η может быть окружено семейством эллип-
 сов, вложенных друг в друга, стягивающихся к началу координат и
 являющихся циклами без прикосно-
 вения (рис. 207). Если изображающая
 точка пересечет граничный цикл без
 прикосновения (самый большой из этих
 эллипсов), то она необходимо начнет
 пересекать все остальные, асимптоти-
 чески стремясь к особой точке.

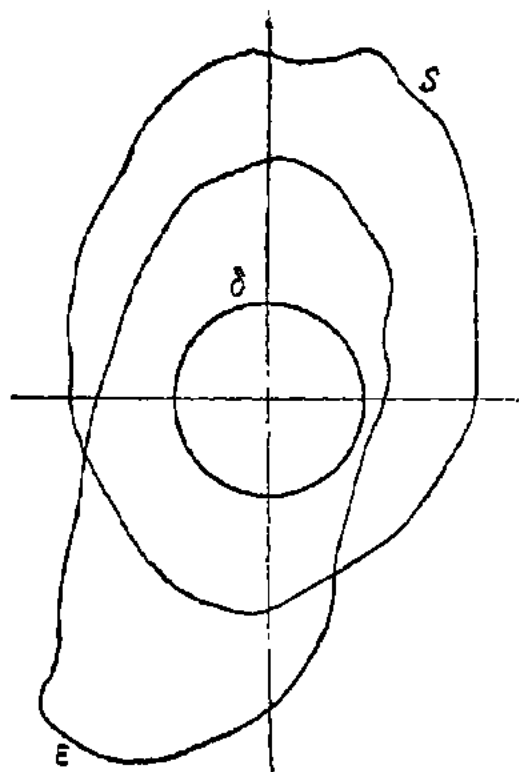


Рис. 206.

2. Если S_1 и S_2 оба положительны,
 то кривая $\Phi(u, v) = 0$ опять имеет в
 начале координат изолированную точ-
 ку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ теперь
 уже имеет не максимум, а минимум
 в начале координат. Отсюда следует, что существует область (область S)
 вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) > 0$ [за исключением
 точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi(0, 0) = 0$].

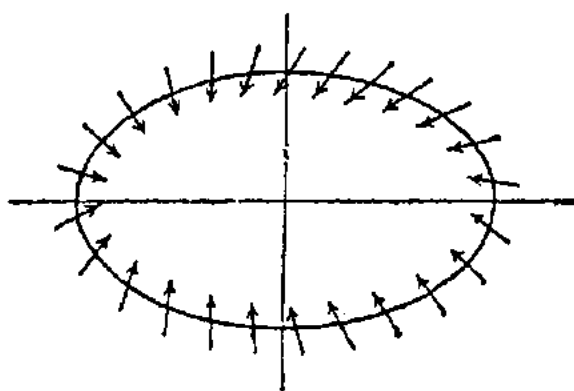


Рис. 207.

Докажем, что в этом случае состояние равновесия неустойчиво.
 Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную кругом, целиком
 лежащим в области S (рис. 208). Можно показать, что нельзя выбрать
 область δ , охватывающую начало, такой, чтобы изображающая точка,

помещенная в любую точку этой области, никогда не достигла границы области ε . Применим доказательство от противного. Положим, что такая область существует. Поместим тогда изображающую точку в момент $t = t_0$ в какую-нибудь из точек этой области, не являющуюся началом координат. Так как для всей области S (кроме начала координат) $\Phi(u, v) = \frac{d\rho}{dt} > 0$, то изображающая точка с возрастанием времени монотонно удаляется от начала; это может нарушиться лишь при выходе изображающей точки из области S . Обозначим через ρ_0 значение $u^2 + v^2$ в момент времени $t = t_0$ и через ρ_ε — значение $u^2 + v^2$ для границы области ε . Очевидно, что в кольце между окружностями $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_\varepsilon$ $\Phi(u, v)$ или, что то же самое, $\frac{d\rho}{dt}$ имеет

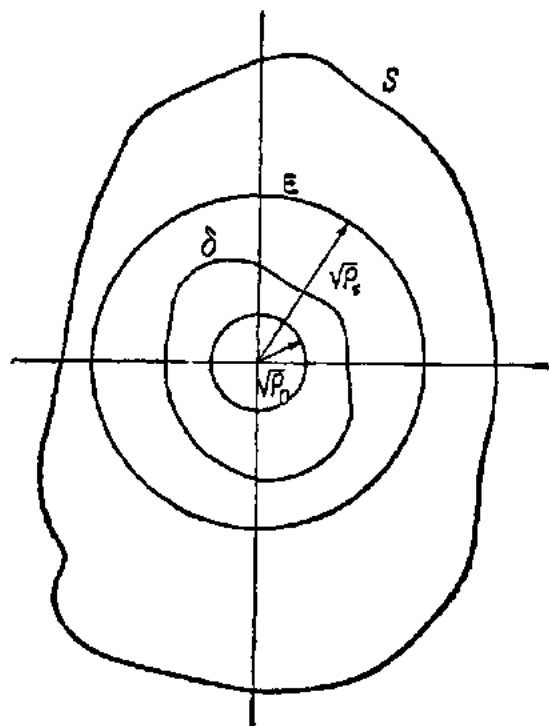


Рис. 208.

некоторый *положительный* нижний предел¹⁾. Поэтому изображающая точка будет удаляться от начала координат со скоростью, отличной от нуля, и в конечное время дойдет до границы области ε . Мы пришли таким образом к противоречию, и, значит, нужной области δ отыскать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Как и в предшествующем случае, все качественные утверждения без изменения переносятся на плоскость ξ, η . Заметим, что в этом случае на плоскости ξ, η также существует семей-

ство вложенных друг в друга эллипсов, служащих циклами без прикосновения. Изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, неизбежно будет удаляться от него, пересекая все циклы без прикосновения.

3. Если S_1 и S_2 имеют разные знаки, то кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат узловую точку, а поверхность $\varepsilon = \Phi(u, v)$ имеет в начале координат седлообразный экстремум. Отсюда следует, что вокруг начала чередуются области, в которых $\Phi(u, v) > 0$, с областями, в которых $\Phi(u, v) < 0$, причем границей раздела служит кривая $\Phi(u, v) = 0$ с простой узловой точкой в начале координат (рис. 209).

Мы можем это обстоятельство сформулировать еще и так: вокруг начала координат существует окружность с центром в начале координат и с радиусом, отличным от нуля, которая пересечет кривую $\Phi(u, v) = 0$ четыре раза. Назовем область внутри этой окружности областью S ; эта область S разбивается кривой $\Phi(u, v) = 0$ на четыре внутренних области таким образом, что в двух из них $\Phi(u, v) > 0$, а в двух других $\Phi(u, v) < 0$. Докажем, что в этом случае состояние

¹⁾ Если этот предел равен γ ($\gamma > 0$), то время прохождения кольца $\tau < \frac{\rho_\varepsilon - \rho_0}{\gamma}$

равновесия неустойчиво. Это можно сделать, если обратить внимание на знак $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ вблизи начала координат. Дифференцируя еще раз $\frac{d\rho}{dt}$ и заменяя $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ их значениями из дифференциальных уравнений, имеем:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2\rho}{dt^2} = S_1^2 u^2 + S_2^2 v^2 + \dots = \Phi_1(u, v).$$

Поверхность $\rho = \Phi_1(u, v)$, как нетрудно убедиться, имеет минимум в начале координат. Следовательно, вокруг начала координат существует область S_1 , внутри которой $\Phi_1(u, v) > 0$ (за исключением точки $u=0, v=0$, так как $\Phi_1(0,0)=0$) или, что все равно, $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$. Перейдем теперь к самому доказательству.

Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную окружностью, целиком лежащую как в области S , так и в области S_1 ¹⁾. Нетрудно показать, что нельзя выбрать такую область δ , охватывающую начало, чтобы изображающая точка, помещенная в любую точку области δ , никогда не достигла границы области ϵ .

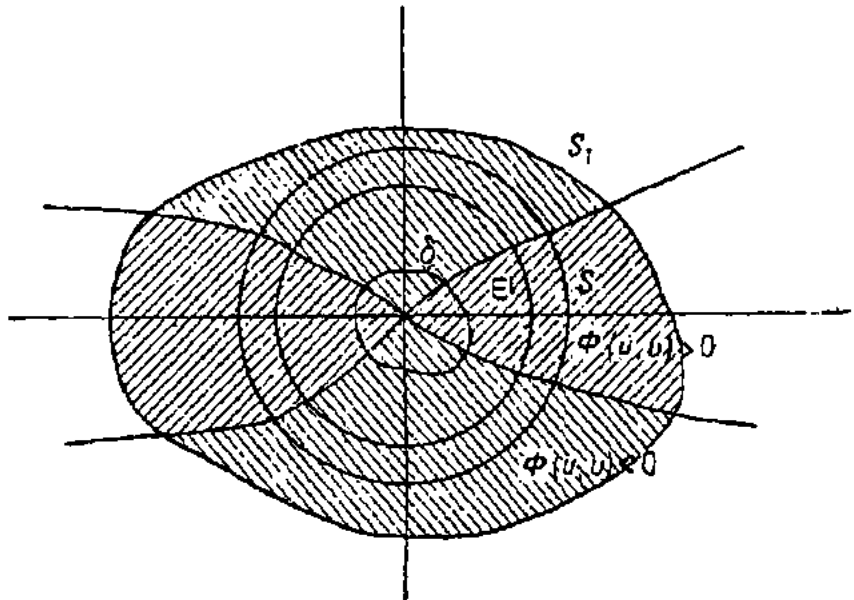


Рис. 209.

Действительно, предположим, что такая область δ существует. Так как она должна охватить начало, то в ней необходимо должны найтись точки, для которых $\Phi(u, v) > 0$. Поместим тогда изображающую точку в момент $t=t_0$ в какую-нибудь из таких точек области δ , где $\Phi(u, v) > 0$ или, что все равно, $\frac{d\rho}{dt} > 0$. Так как при $t=t_0, \frac{d\rho}{dt} > 0$ и так как во всей области $S_1, \frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$ (область ϵ выбрана внутри области S_1 , а область δ не может иметь частей, лежащих вне ϵ), то наша изображающая точка начнет удаляться от начала координат с возрастающей скоростью и в конечном время достигнет границы области ϵ ²⁾. Мы пришли таким образом к противоречию. Нужной области δ выбрать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

1) Областью ϵ , в частности, может служить область S , которую всегда можно выбрать так, чтобы она была целиком расположена внутри области S_1 .
 2) Нетрудно оценить это время τ . Пусть ρ_ϵ — квадрат радиуса круга, ограничивающего область ϵ . Пусть $\gamma (\gamma > 0)$ — значение $\frac{d\rho}{dt}$ в момент $t=t_0$. Тогда в течение всего времени движения внутри области $S_1, \frac{d\rho}{dt} \geq \gamma$; отсюда следует, что $\tau < \frac{\rho_\epsilon - \rho_0}{\gamma}$.

1) Областью ϵ , в частности, может служить область S , которую всегда можно выбрать так, чтобы она была целиком расположена внутри области S_1 .

2) Нетрудно оценить это время τ . Пусть ρ_ϵ — квадрат радиуса круга, ограничивающего область ϵ . Пусть $\gamma (\gamma > 0)$ — значение $\frac{d\rho}{dt}$ в момент $t=t_0$. Тогда в течение всего времени движения внутри области $S_1, \frac{d\rho}{dt} \geq \gamma$; отсюда следует, что $\tau < \frac{\rho_\epsilon - \rho_0}{\gamma}$.

Ясно, что то же самое относится к соответствующему состоянию равновесия на плоскости ξ, η .

2. **Случай комплексных корней характеристического уравнения.** В этом случае, как мы знаем, линейную систему можно путем действительного линейного однородного преобразования привести к виду:

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1, \quad (302)$$

где a_1 и b_1 — действительная и мнимая части S ($S_1 = a + ib$, $S_2 = a - ib$). Применим те же преобразования к нелинейной системе. Мы получим тогда снова нелинейную систему:

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + \dots; \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1 + \dots \quad (303)$$

Умножая первое уравнение на u_1 , второе на v_1 и складывая, получаем следующее выражение для квадрата радиуса-вектора $\rho = u_1^2 + v_1^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 (u_1^2 + v_1^2) + \dots = \psi(u_1, v_1).$$

Так как здесь точками обозначены члены третьей степени и выше, то нетрудно показать обычным путем, что $\psi(u_1, v_1)$ имеет максимум или минимум в начале координат в зависимости от знака a_1 . Повторяя в точности рассуждения, которые мы приводили в случае действительных корней, имеющих одинаковые знаки, мы найдем, что в случае $a_1 < 0$ состояние равновесия устойчиво по Ляпунову и даже асимптотически устойчиво, а в случае $a_1 > 0$ состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову. В обоих случаях достаточно малые окружности вблизи начала служат циклами без прикосновения. При переходе к плоскости ξ, η это семейство окружностей превратится в семейство эллипсов без контакта, в которые интегральные кривые входят или выходят, в зависимости от знака a_1 .

Итак, мы обосновали метод Ляпунова, заключающийся в отбрасывании нелинейных членов для случая так называемых простых особых точек, когда корни характеристического уравнения не равны между собой и имеют отличные от нулей действительные части. Ограничение, связанное с отсутствием равных корней, несущественно, — мы его приняли лишь для упрощения доказательства¹⁾. Ограничение, связанное с наличием действительных частей, отличных от нуля, у обоих корней характеристического уравнения, существенно. В предположении, что рассматриваемое уравнение — общего вида, оно не может быть устранено. Таким образом теорему Ляпунова об устойчивости состояний равновесия в нашем случае можно сформулировать так: *если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, то состояние равновесия устойчиво; если хотя бы одна действительная часть положительна, то состояние равновесия неустойчиво.*

1) В дальнейшем под простыми особыми точками мы будем понимать такие особые точки, для которых оба корня характеристического уравнения имеют отличные от нулей действительные части.

Если действительные части обеих корней характеристического уравнения равны нулю или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то уравнения первого приближения не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Мы убедились, что в случае простых особых точек уравнений (292) устойчивость вполне определяется соответствующими уравнениями первого приближения; физически это вполне ясно, так как в этом случае на близких расстояниях от особой точки влияние членов высших порядков несущественно по сравнению с членами первого порядка.

Можно доказать (мы на этом не будем здесь останавливаться), что не только устойчивость, но и характер фазовых траекторий в достаточной близости к особым точкам в случае простых особых точек также полностью определяется уравнениями первого приближения. Таким образом совершенно так же, как в § 4, мы здесь имеем пять случаев состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый фокус, неустойчивый фокус, седло. Для исследования особых точек в этом случае удобно пользоваться той же диаграммой, о которой мы говорили. В нашем случае

$$p = - \{ P'(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \} \quad \text{и} \quad q = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

В случае узла и седла, как мы знаем, интегральные кривые входят в особую точку по двум направлениям. Эти направления, само собой разумеется, также могут быть определены из соответствующих линейных уравнений. Пользуясь результатами § 3, мы можем написать для определения угловых коэффициентов следующее уравнение:

$$P'_y(x_0, y_0) x^2 + \{ P'_x(x_0, y_0) - Q'_y(x_0, y_0) \} x - Q'_x(x_0, y_0) = 0.$$

§ 6. Пример — состояния равновесия в цепи вольтовой дуги

В качестве примера, иллюстрирующего применение методов Ляпунова для определения устойчивости состояний равновесия, рассмотрим состояния равновесия в цепи вольтовой дуги, включенной последовательно с самоиндукцией и зашунтированной емкостью (рис. 210). Эта схема представляет собой некоторое видоизменение схемы дугового генератора и для рассматриваемого нами круга вопросов является наиболее общим случаем; по отношению к этой схеме рассмотренные выше схемы вольтовой дуги только с емкостью (гл. IV, § 12) и только с самоиндукцией (гл. IV, § 7) являются частными случаями, полученными из общего в результате «вырождения», т. е. в результате того, что один из двух колебательных параметров L или C мы полагаем

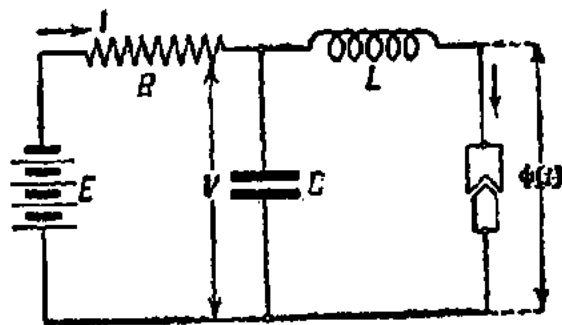


Рис. 210.

равным нулю. При тех обозначениях, которые приведены на рис. 210, можно при помощи законов Кирхгофа получить следующие уравнения:



Рис. 211.

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad V &= L \frac{di}{dt} + \phi(i), \\ 2) \quad RI + V &= E, \\ 3) \quad I &= i + C \frac{dV}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

где $\phi(i)$ есть характеристика вольтовой дуги, т. е. функция, выражающая зависимость напряжения на концах дуги от силы тока, протекающей через дугу (графически мы изображали эту зависимость так, как указало на рис. 211). Из трех уравнений мы путем исключения I получаем два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{E - V - Ri}{RC}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{V - \phi(i)}{L}. \quad (305)$$

Состояния равновесия системы определяются из условий $\frac{dV}{dt} = 0$ и $\frac{di}{dt} = 0$, из которых получаются уравнения:

$$V = E - Ri, \quad V = \phi(i). \quad (306)$$

Следовательно, состояниями равновесия являются точки пересечения этих прямой и кривой. В зависимости от величин E и R этих точек

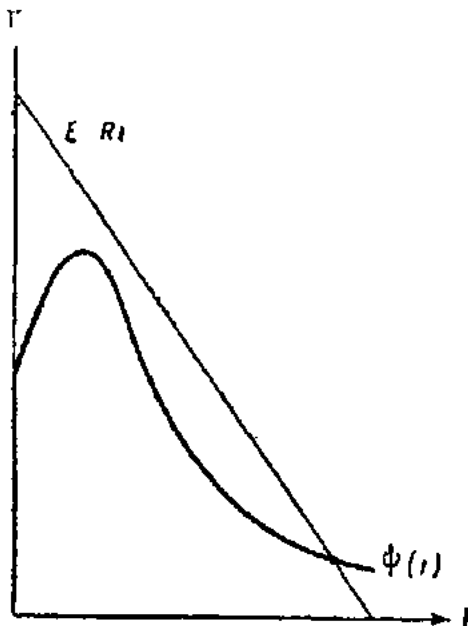


Рис. 212.

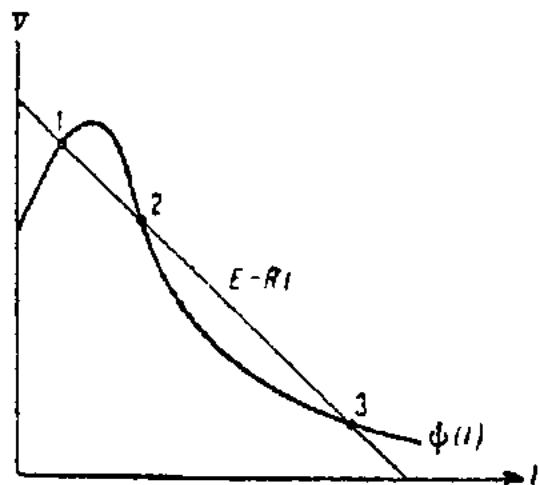


Рис. 213.

может быть либо одна (рис. 212), либо три (рис. 213). Для анализа устойчивости состояний равновесия мы по методу Ляпунова подставляем в уравнения (305) $V = V_0 + \eta$ и $i = i_0 + \xi$, где V_0 и i_0 — значения,

соответствующие какому-либо из состояний равновесия. Далее, разлагая характеристику дуги $\psi(i_0 + \xi)$ в ряд $\psi(i_0 + \xi) = \psi(i_0) + \xi\psi'(i_0) + \dots$ и ограничиваясь первым членом ряда, мы получим два уже линейных дифференциальных уравнения для ξ и η (так как i_0 и V_0 удовлетворяют условиям (306) и все члены, их содержащие, вместе дадут нуль):

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\eta}{RC} - \frac{\xi}{C}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\eta}{L} - \frac{\rho\xi}{L}, \quad (307)$$

где $\rho = \psi'(i_0)$ — тангенс угла наклона характеристики дуги в точке, соответствующей данному состоянию равновесия (величина размерности сопротивления). Величина ρ — сопротивление дуги — величина переменная, которая при некоторых значениях i_0 может принимать отрицательные значения; однако, пользуясь этим термином, нужно помнить все оговорки, которые мы сделали, когда впервые ввели термин «отрицательное сопротивление» (гл. I, § 6).

Характеристическое уравнение этой системы дифференциальных уравнений в виде детерминанта запишется так:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\rho}{L} - S & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - S \end{vmatrix} = 0, \quad (308)$$

откуда

$$S^2 + S\left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right) + \frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right) = 0. \quad (309)$$

Корни этого уравнения определяются выражением:

$$S_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right]^2 - \frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right)}$$

или

$$S_{1,2} = -\frac{L + RC\rho}{2RLC} \pm \sqrt{\frac{L^2 + [RC\rho]^2 - 2RCL\rho - 4R^2CL}{4R^2L^2C^2}}. \quad (310)$$

Характер корней уравнения зависит от значений четырех параметров R , C , L и ρ . Для того чтобы выяснить характер этих корней при всех возможных значениях параметров, мы построим три диаграммы «распределения корней», аналогичные тем, которые мы строили для систем линейных, именно диаграммы $R, \rho; L, \rho; C, \rho$; при этом нужно иметь в виду, что L , C и R могут принимать только положительные значения, в то время как ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для построения первой диаграммы R, ρ приведем условие комплексности корней к виду:

$$[L - RC\rho]^2 - [2R\sqrt{LC}]^2 < 0. \quad (311)$$

Граница «распространения» комплексных корней определяется урав-

нением четвертого порядка (относительно R и ρ), которое распадается на два уравнения второго порядка:

$$L - RC\rho + 2R\sqrt{LC} = 0; \quad L - RC\rho - 2R\sqrt{LC} = 0. \quad (312)$$

Каждое из этих уравнений определяет гиперболу; уравнения их отнесены к асимптотам, причем одной из асимптот для обеих кривых

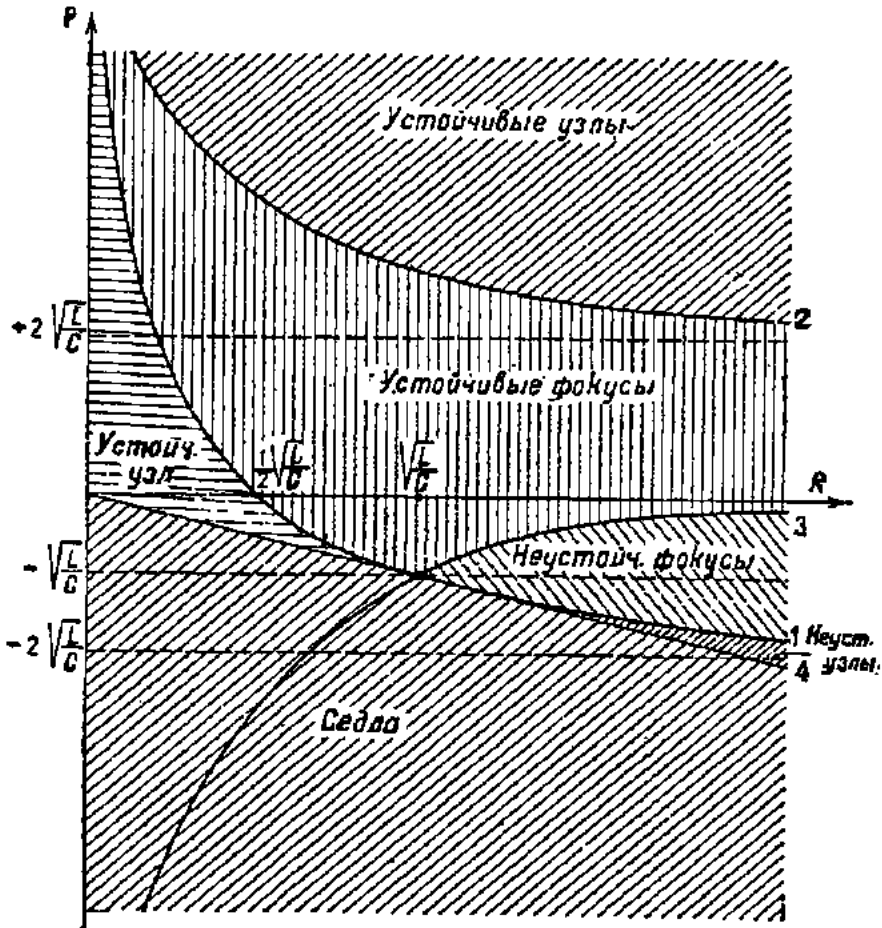


Рис. 214.

является ось ρ , а дугой для первой кривой — прямая $\rho = -2\sqrt{\frac{L}{C}}$, а для второй — прямая $\rho = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

«Кривой клин», образованный обеими гиперболами 1 и 2 (рис. 214), как легко видеть, и представляет собой область распространения комплексных корней. Границей распространения корней с положительной действительной частью, т. е. границей устойчивости узлов и фокусов, является кривая $L + RC\rho = 0$, т. е. гипербола 3 с осями ρ и R в качестве асимптот, расположенная в четвертом квадранте и пересекающая гиперболу 1 в точке $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (см. рис. 214).

Очевидно, что все узлы и фокусы, лежащие выше этой гиперболы, устойчивы, лежащие ниже — неустойчивы. Наконец, границей распространения седел является прямая 4, определяемая уравнением $R + \rho = 0$, так как при $R + \rho < 0$ корни уравнения (309), как известно, всегда

будут разных знаков. Очевидно, что область, лежащая ниже прямой $\rho = -R$, является областью распространения особых точек типа седла. Мы получаем в результате для параметров R и ρ диаграмму распространения особых точек, приведенную на рис. 214.

Как видно из этой диаграммы, при $\rho > 0$ (выше оси R) существуют только устойчивые особые точки. Эти точки будут фокусами, если ρ (сопротивление дуги, т. е. сопротивление в контуре) не слишком велико и сопротивление нагрузки, шунтирующей контур, не слишком мало. При $\rho < 0$ (падающие участки характеристики) состояния равновесия могут быть устойчивы, только если $|\rho|$ не слишком велико и, с другой стороны, R не слишком мало и не слишком велико. При $\rho < 0$ возможны все три типа неустойчивости — именно, неустойчивый узел, неустойчивый фокус и седло. Далее фокус (устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака ρ) получается при $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, если R достаточно велико, и это условие аналогично условию осцилляторности для обычного линейного контура. Вообще при $\rho < 0$ и $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ можно, изменяя величину R , получить любую особую точку, если же $\rho < 0$ и $|\rho| > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то возможны только неустойчивые особые точки — либо седло, либо неустойчивый узел в зависимости от величины параметра R .

Для того чтобы установить зависимость типа особой точки от других параметров, мы построим аналогичные диаграммы для L, ρ (рис. 215) и C, ρ (рис. 216). Для обеих диаграмм граница комплексных корней выразится уравнением:

$$L^2 + (RC\rho)^2 - 2RCL\rho - 4R^2CL = 0$$

или

$$\rho = \frac{L}{CR} \pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

(318)

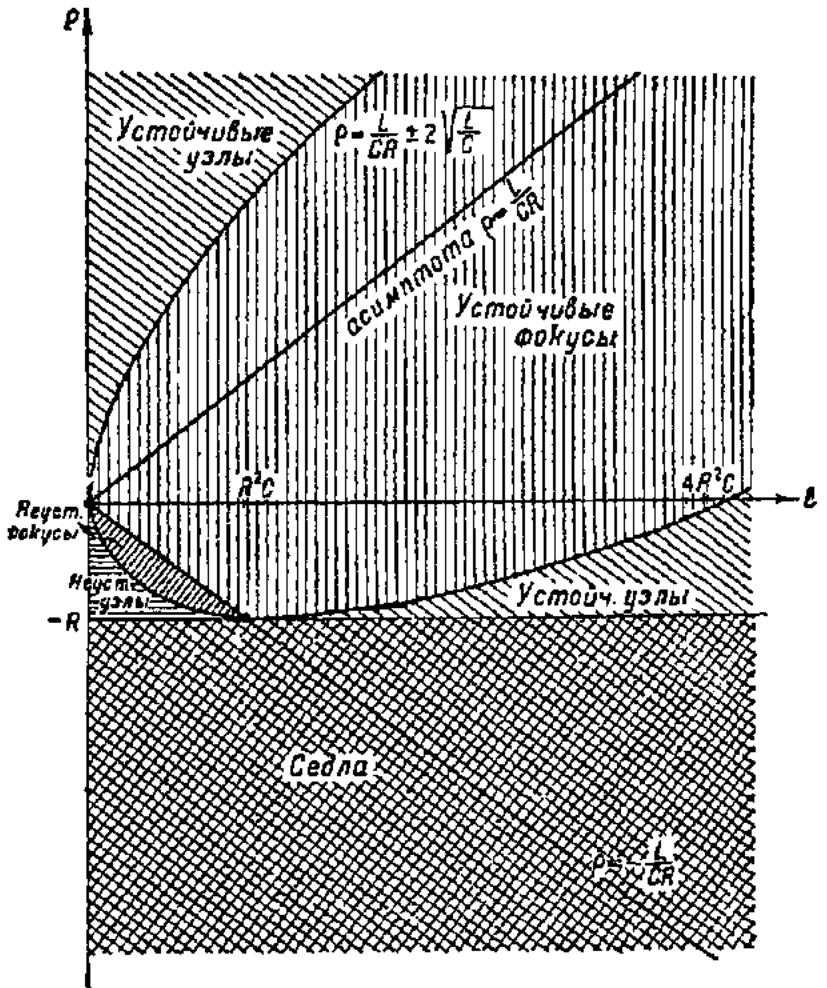


Рис. 215.

На диаграмме (L, ρ) эта граница представляет собой одну кривую с асимптотой $\rho = \frac{4}{CR}$, вертикальной касательной в точке $L=0, \rho=0$ и горизонтальной касательной в точке $L=R^2C, \rho=-R$. На диаграмме (C, ρ) эта граница распадается на две кривых гиперболического типа с асимптотами $C=0$ и $\rho=0$. Граница устойчивости узлов и фокусов, определяемая уравнением $RC\rho = -L$, представляет собой для второй диаграммы (C, ρ) гиперболу с осями координат в качестве асимптот и для первой диаграммы прямую. Граница распространения особых точек типа седла дается уравнением:

$$\rho = -R, \quad (314)$$

т. е. и в той и в другой диаграмме представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. В результате мы получаем две диаграммы, изображенные на рис. 215 и 216. Легко убедиться, что эти диаграммы вполне согласуются с первой, изображенной на рис. 214, и лишь дополняют ее. Все три диаграммы позволяют судить о характере особых точек при любых значениях параметров R, C, L и ρ . Так, например, относительно трех состояний равновесия, изображенных на рис. 213, мы можем при помощи диаграмм установить следующее.

Первое состояние равновесия (точка 1) всегда устойчиво, так как оно лежит в области, где $\rho > 0$. Зная соотношения между L, C и R , мы могли бы сразу установить, принадлежит ли это состояние равновесия к типу фокусов или к типу узлов. То же самое мы могли бы утверждать относительно третьего состояния равновесия (точка 3), в том случае, если бы оно лежало в области положительных ρ , и относительно единственного состояния равновесия, лежащего в той же области (рис. 217). Если же это третье состояние равновесия лежит в области отрицательных ρ (рис. 213), но если вместе с тем это ρ по абсолютной величине меньше R , т. е. тангенс угла наклона прямой $\varepsilon = E - Ri$ (как это изображено на рисунке) по абсолютной величине больше, чем тангенс угла наклона касательной к кривой $\varepsilon = \psi(i)$ в точке 1, то, как видно из диаграмм, особая точка не может быть седлом и является либо узлом, либо фокусом. В частности, как видно из рис. 216, при очень малых C она должна быть либо устойчивым узлом, либо

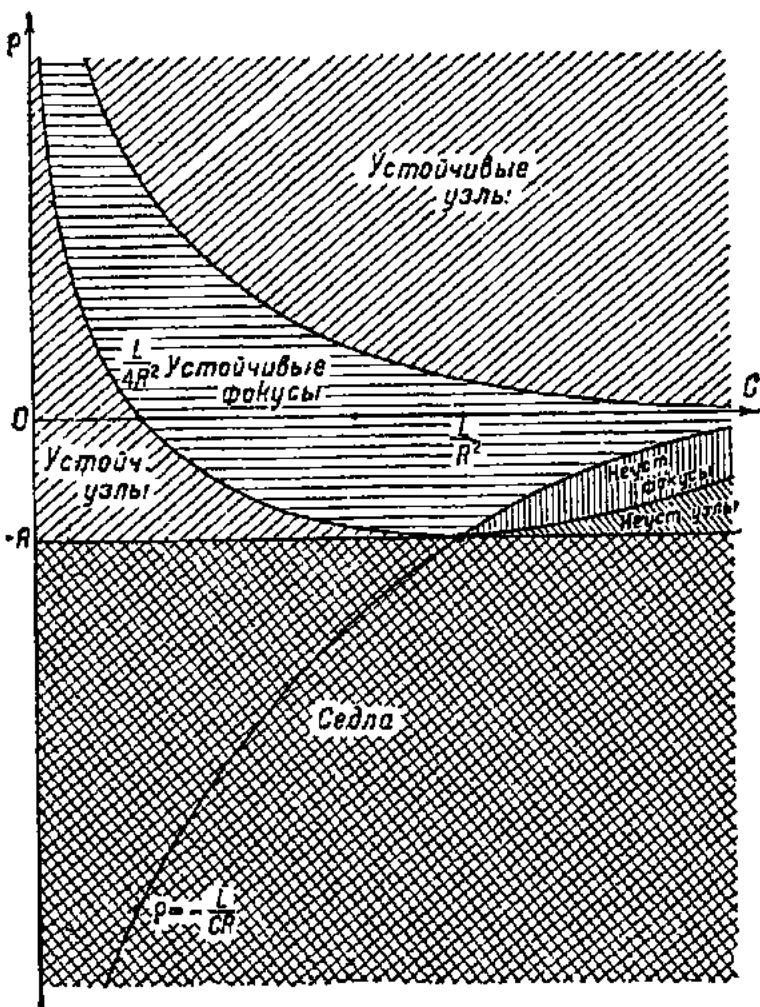


Рис. 216.

устойчивым фокусом, наоборот: при очень малых L , как следует из рис. 215, — неустойчивым узлом или фокусом. Что касается второго (среднего) состояния равновесия, то оно всегда является седлом, так как в точке 2 $\rho < 0$, а вместе с тем $|\rho| > R$, и, значит, это состояние равновесия всегда неустойчиво как при малых, так и при больших L и C .

Этот последний вывод явно не согласуется с теми результатами, которые были получены в предыдущей главе относительно вольтовой дуги, включенной в цепь только с емкостью или только с самоиндукцией. В этих схемах среднее состояние равновесия оказалось в схеме с емкостью устойчивым, а в схеме с самоиндукцией — неустойчивым, между тем как при наличии и емкости и самсиндукции среднее состояние равновесия всегда, при любых C и L , принадлежит к типу седла и является неустойчивым. Это кажущееся противоречие принадлежит как раз к числу тех вопросов, которые возникают при переходе от системы, описываемой уравнением второго порядка, к вырожденной системе, описываемой уравнением первого порядка (в частности, при переходе от систем, где L и C отличны от нуля, к системам, где мы либо L , либо C полагаем равным нулю).

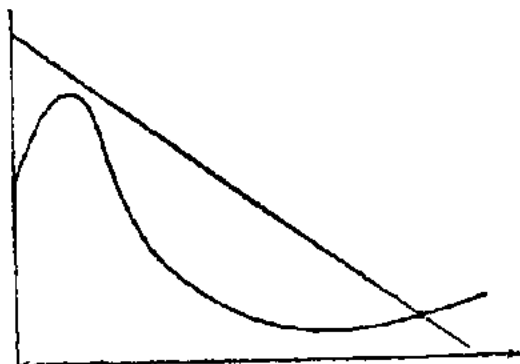


Рис. 217.

Эти вопросы и, в частности, вопрос о том, как связан характер состояний равновесия в вырожденной системе с характером состояний равновесия в исходной системе, будут нами подробно рассмотрены в специальном параграфе.

§ 7. Периодические движения и их устойчивость

После рассмотрения состояний равновесия перейдем к периодическим движениям, которые, как мы знаем, могут встречаться в системах, описываемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (A)$$

Если T ($T > 0$) — наименьшее число, для которого, при всяком t ,

$$x(t + T) = x(t), \quad y(t + T) = y(t),$$

то движение $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется периодическим движением с периодом T . Как мы знаем, периодическому движению соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости x, y , и обратно: всякой замкнутой траектории соответствует бесчисленное множество периодических движений, отличающихся друг от друга выбором начала отсчета времени. Замкнутые фазовые траектории мы уже встречали при рассмотрении консервативных систем, где они всегда

образовывали целые континуумы траекторий, вложенных одна в другую (например траектории вокруг особой точки типа центра). В рассмотренном нами примере автоколебательной системы (генератор с Σ -характеристикой) периодическому движению на фазовой плоскости соответствовала изолированная замкнутая кривая, к которой с внешней и

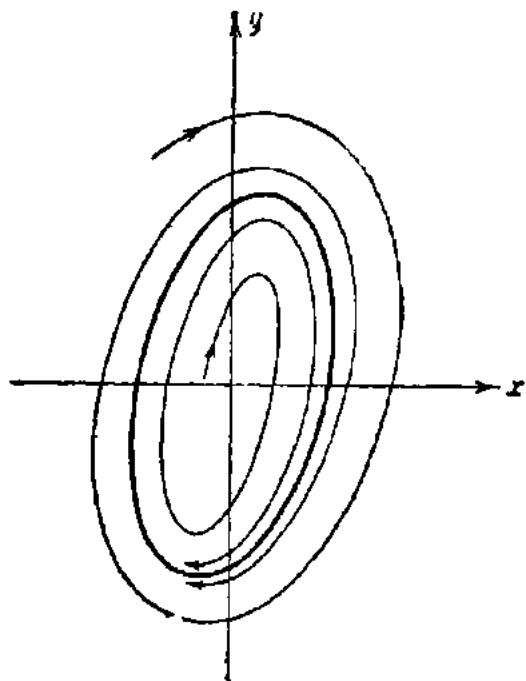


Рис. 218a.

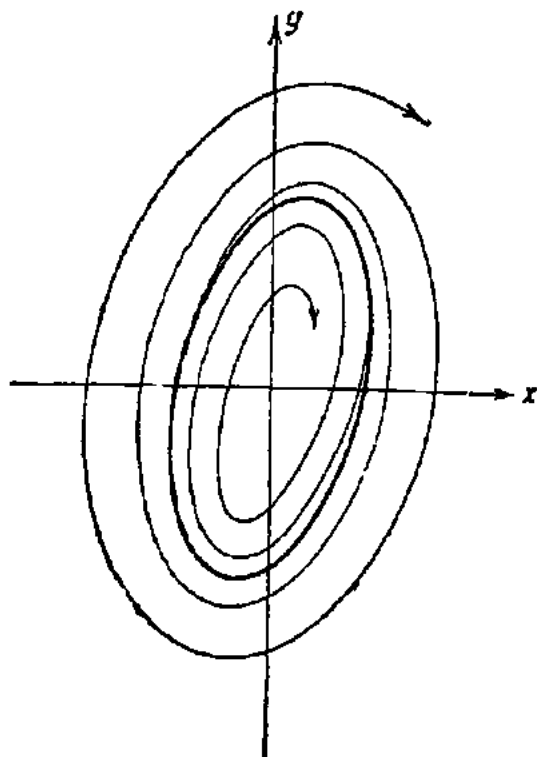


Рис. 218b.

внутренней сторон приближались (при возрастании t) соседние траектории по спиральям. Такие изолированные замкнутые траектории носят название *предельных циклов*. Простые примеры ¹⁾ позволяют

¹⁾ Например, для системы

$$\frac{dx}{dt} = +y + x[1 - (x^2 + y^2)],$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y[1 - (x^2 + y^2)]$$

траектория $x^2 + y^2 = 1$ является предельным циклом. Параметрические уравнения траекторий, накручивающихся на предельный цикл снаружи, будут:

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 - c^2 e^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 - c^2 e^{-2(t-t_0)}}};$$

траекторий, накручивающихся изнутри:

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + c^2 e^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + c^2 e^{-2(t-t_0)}}};$$

параметрические уравнения предельного цикла:

$$x = \cos(t - t_0), \quad y = \sin(t - t_0).$$

убедиться, что и системы вида (A), с аналитическими правыми частями, вообще говоря, допускают в качестве траекторий предельные циклы.

Нетрудно видеть, что предельные циклы могут быть трех типов — такие, что все соседние траектории приближаются к ним при $t \rightarrow +\infty$: тогда мы будем говорить об *орбитно-устойчивых* предельных циклах (рис. 218a); такие, что все соседние траектории удаляются от них при $t \rightarrow +\infty$: тогда мы будем говорить об *орбитно-неустойчивых* предельных циклах (рис. 218b), и, наконец, такие, что все траектории с одной стороны (например извне) приближаются к ним, а с другой стороны (например изнутри) удаляются от них при $t \rightarrow +\infty$: тогда мы будем говорить не вполне точно об *орбитно-полустойчивых* предельных циклах (рис. 218c).

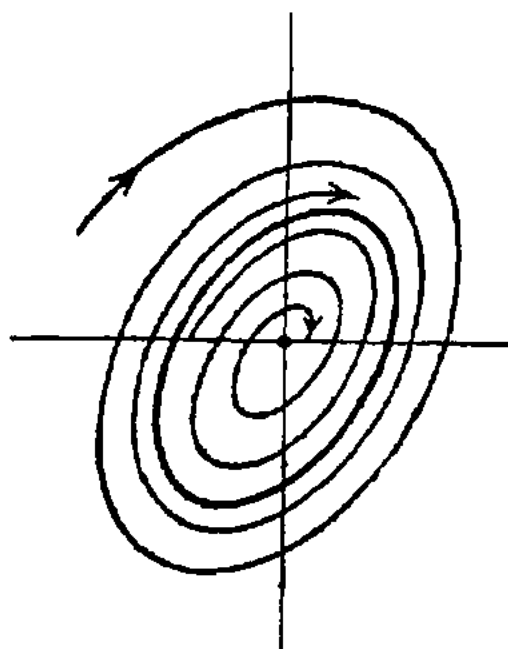


Рис. 218c.

Наряду с орбитной устойчивостью предельного цикла как траектории нас будет интересовать устойчивость по Ляпунову периодического движения, соответствующего предельному циклу; как мы уже знаем, периодические движения, образующие континуумы вложенных друг в друга траекторий, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову.

Предположим, что мы знаем функции $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$, определяющие периодическое решение $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ системы (A). Пусть T — период решения, так что $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$. Требуется определить, будет ли это периодическое решение устойчиво в смысле Ляпунова.

Дадим точное определение устойчивости по Ляпунову. Движение $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ мы назовем устойчивым в смысле Ляпунова, если для каждого положительного заданного ε можно подыскать такое положительное δ , что если

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta \quad \text{и} \quad |y(t_0) - \bar{y}(t_0)| < \delta,$$

то

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |y(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon$$

для всех значений $t > 0$. Заметим, что Ляпунов в сущности говорит об устойчивости только тех или иных переменных, характеризующих движение системы; когда у нас идет речь об устойчивости движения, то это значит, что должны быть устойчивы все переменные, которые *полностью* определяют движение системы. Так как движение периодически, то δ можно выбрать не зависящим от t_0 .

Рассмотрим некоторое «возмущенное» движение; координата и скорость этого возмущенного движения пусть будут x и y . Введем обозначения $\xi = x - \bar{x}$; $\eta = y - \bar{y}$. ξ и η являются, следовательно, коорди-

патами возмущения. Подставляя $x = \bar{x} + \xi$; $y = \bar{y} + \eta$ в уравнения (A), которым должно подчиняться также и возмущенное движение, получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{dx}{dt} + P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta); \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dy}{dt} + Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta). \quad (315)$$

Итак, для исследования вопроса об устойчивости исходного периодического движения нам нужно выяснить, будет ли всегда соблюдено условие $|\xi| < \varepsilon$ и $|\eta| < \varepsilon$, если $|\xi(t_0)| < \delta$ и $|\eta(t_0)| < \delta$. Уравнения (315) суть уравнения нелинейные, и исследование их так же трудно, как и исследования исходной системы (A). Однако, как мы видели, при решении вопроса об устойчивости состояний равновесия, это исследование можно было свести к исследованию некоторой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, так называемой системы первого приближения. Именно, как утверждает теорема Ляпунова, состояние равновесия является устойчивым, если оба характеристических показателя имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы один из характеристических показателей имеет положительную действительную часть; в случаях, когда характеристические показатели либо оба имеют действительные части, равные нулю, либо один равен нулю, а другой отрицателен, уравнение первого приближения не решает вопроса об устойчивости состояний равновесия. Для решения вопроса об устойчивости периодических движений можно идти, как показал Ляпунов, по такому же пути. В случае периодических движений уравнения первого приближения суть уравнения с периодическими коэффициентами. Эти уравнения первого приближения получаются из исходных уравнений для возмущенного движения (315) следующим образом. Разлагая функции P и Q в ряд по степеням ξ и η вблизи значений \bar{x} и \bar{y} (т. е. «вблизи периодического решения») и ограничиваясь членами, содержащими ξ и η в степени не выше первой, получим:

$$\left. \begin{aligned} P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) &= P(\bar{x}, \bar{y}) + \xi P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \eta P'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\ Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) &= Q(\bar{x}, \bar{y}) + \xi Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \eta Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (316)$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения (315) и принимая во внимание, что \bar{x} и \bar{y} удовлетворяют исходным уравнениям, мы получим уравнения первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = P'_x(\bar{x}, \bar{y}) \xi + P'_y(\bar{x}, \bar{y}) \eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) \xi + Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) \eta. \quad (317)$$

Это — система линейных уравнений с периодическими коэффициентами периода T (так как P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y суть функции от периодических аргументов x, y , имеющих период T). Общий вид решения системы уравнений с периодическими коэффициентами (317) таков:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C_1 e^{h_1 t} f_{11}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{12}(t), \\ \eta &= C_1 e^{h_1 t} f_{21}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{22}(t), \end{aligned} \right\} \quad (318)$$

где f_{ik} — периодические функции с периодом T . От показателей h_1 и h_2 , которые носят название «характеристических показателей», зависит характер решений для ξ и η , именно, знаки действительных частей характеристических показателей определяют, являются ли эти решения нарастающими или затухающими.

Однако для рассматриваемой нами задачи уравнения первого приближения не являются уравнениями общего вида. Нетрудно убедиться в том, что в случае автономной системы один из характеристических показателей решения (318) всегда равен нулю.

Действительно, так как

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t) \quad \text{и} \quad x = \bar{x}(t+c), \quad y = \bar{y}(t+c) \quad (319)$$

суть движения системы, описываемой уравнениями (A), то

$$\xi = \bar{x}(t+c) - \bar{x}(t), \quad \eta = \bar{y}(t+c) - \bar{y}(t) \quad (320)$$

должны удовлетворять уравнениям возмущенного движения (315). Разлагая выражения (320) в ряды по c , ограничиваясь (для малых c) первыми членами и замечая, что

$$\frac{\partial \bar{x}(t+c)}{\partial c} = \frac{\partial \bar{x}(t+c)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{y}(t+c)}{\partial c} = \frac{\partial \bar{y}(t+c)}{\partial t},$$

легко видеть, что

$$\xi_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial c} \right)_{c=0} = \dot{\bar{x}}(t); \quad \eta_0 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} \right)_{c=0} = \dot{\bar{y}}(t)$$

должны быть решением системы уравнений первого приближения (317). В этом можно непосредственно убедиться, дифференцируя по c систему уравнений (A), где вместо x должно быть подставлено $\bar{x}(t+c)$, а вместо y подставлено $\bar{y}(t+c)$, и полагая затем $c=0$.

Таким образом мы приходим к теореме: если функции $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ представляют периодическое решение исходной системы (A), то производные по времени от этих функций $\xi = \dot{\bar{x}}(t)$, $\eta = \dot{\bar{y}}(t)$ удовлетворяют системе уравнений первого приближения (317). Так как производная по времени от периодической функции сама является периодической функцией с тем же периодом, то легко видеть, что найденное таким образом частное решение системы (317) $\xi = \dot{\bar{x}}(t)$, $\eta = \dot{\bar{y}}(t)$ имеет характеристический показатель, равный нулю¹⁾. Но если один характеристический показатель равен нулю, то найти второй показатель можно весьма просто. Именно, на основании теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами сумма характеристических показателей равна среднему за

1) См. Н. Поинкаре [10], т. 1, стр. 179.

период от суммы диагональных коэффициентов системы уравнений (317) т. е. равна

$$\frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt.$$

В нашем случае один характеристический показатель, как доказано, всегда равен нулю. Отсюда по аналогии с результатами, полученными при исследовании устойчивости состояний равновесия, казалось, следовало бы ожидать, что уравнения (317) в нашем случае не решают вопроса об устойчивости. Однако оказывается, что такая аналогия не имеет места и что в рассматриваемом случае периодических движений в автономной системе уравнения первого приближения дают ответ на этот вопрос ^[91], именно: *периодическое движение в автономной системе (314) устойчиво по Ляпунову (правда, не абсолютно, так как возмущения по фазе не восстанавливаются), если один характеристический показатель уравнения первого приближения отрицателен; движение неустойчиво, если один характеристический показатель положителен; уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости, если оба характеристических показателя равны нулю.*

Следовательно, как вытекает из этой теоремы, условие устойчивости периодического движения имеет вид:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt < 0. \quad (321)$$

В случае

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt > 0 \quad (322)$$

движение неустойчиво. В случае

$$\int_0^T [P'_x(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})] dt = 0 \quad (323)$$

требуется особое рассмотрение. Не приводя здесь доказательства этой теоремы, поясним ее при помощи рассмотрения фазовой плоскости.

Пусть мы имеем периодическое решение, для которого выполнено неравенство (321). Очевидно, что такому решению соответствует на фазовой плоскости орбитно-устойчивый предельный цикл. Предположим, что изображающая точка двигается по предельному циклу, следуя закону $x = x(t)$, $y = y(t)$. Назовем движение, отображаемое этой точкой, движением S . В некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$ эта изображающая точка совпадает с определенной точкой s предельного цикла. Рассмотрим движение изображающей точки, совпадающей в момент времени $t = t_0$ с точкой x, y фазовой плоскости. Если точка x, y расположена в достаточной близости к предельному циклу, то изо-

бражающая точка с возрастанием времени будет двигаться по траектории, накручивающейся на предельный цикл. Можно поставить вопрос о том, каковы те начальные условия $x = f(t_0)$, $y = g(t_0)$, для которых это движение будет асимптотически приближаться именно к выбранному нами ранее движению S^1). Ляпунов доказал (в предположении, что один характеристический показатель не равен нулю), что геометрическим местом таких начальных значений будет аналитическая кривая, проходящая через точку s и не имеющая в ней особенностей. Такие аналитические кривые мы назовем *кривыми Ляпунова* (эти кривые можно было бы назвать *кривыми одинаковой фазы*).

Рассмотрим относительное расположение предельного цикла и кривой Ляпунова, проходящей через какую-либо точку s , лежащую на этом предельном цикле.

Кривые эти не могут совпадать, так как любое смещение представляющей точки вдоль предельного цикла, т. е. «мгновенное» перемещение представляющей точки на предельном цикле, ведет к некоторому другому периодическому движению, имеющему ту же самую траекторию, но заведомо иную фазу.

Предельный цикл вблизи точки s не может лежать по одну сторону кривой Ляпунова, так как в этом случае всегда найдутся соседние достаточно близкие фазовые траектории, пересекающие кривую Ляпунова в двух точках. Это невозможно, так как движения, исходящие из этих двух точек пересечения, всегда будут иметь отличную от нуля разность фаз.

Следовательно, фазовая траектория вблизи точки s лежит по обе стороны от кривой Ляпунова, причем она проходит по одну сторону от кривой Ляпунова для $t < t_0$ и по другую для $t > t_0$.

На рис. 219 примерно изображены такие кривые Ляпунова.

Пусть наша система испытает какой-нибудь малый «толчок», т. е. ее начальные условия «мгновенно» изменятся на некоторый вектор st (на плоскости x, y). Тогда движение системы будет асимптотически приближаться к новому периодическому движению S' , отличающемуся от исходного лишь малым смещением по фазе. Это смещение по фазе

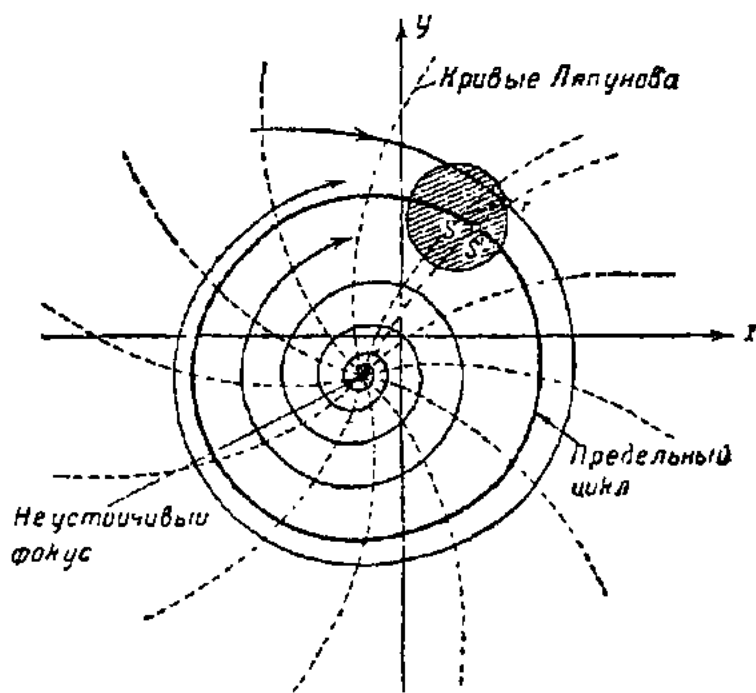


Рис. 219.

1) Не следует забывать, что каждому предельному циклу соответствует целое семейство периодических движений, отличающихся одно от другого только на произвольную фазу.

определится той кривой Ляпунова, которая проходит через точку r (см. рис. 219).

Перейдем теперь непосредственно к нашей задаче — наглядно пояснить теорему о том, что отрицательность одного характеристического показателя обеспечивает устойчивость по Ляпунову периодического движения в автономной системе, подчиняющейся уравнениям (A).

Продолжим все траектории, проходящие через кривую Ляпунова $t_0 \pm \Delta t_0$ вблизи точки s , в обе стороны на расстояния $\Delta L = \int_{t_0}^{t_0 \pm \Delta t_0} \sqrt{P^2 + Q^2} dt$, т. е. на расстояния, которые по данной интегральной кривой проходит представляющая точка за время Δt_0 . Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не обращаются одновременно в нуль на периодической траектории, то таким образом мы получим некоторую двумерную область, окружающую точку s . Очевидно, что все движения, соответствующие в момент времени $t = t_0$ точкам, лежащим в этой области, асимптотически стремятся к периодическим движениям, отличающимся, однако, от исходного на некоторую фазу, во всяком случае не превосходящую Δt_0 . Это указывает, что движение по предельному циклу устойчиво по Ляпунову.

Можно показать, что для предельных циклов, так же как и для особых точек, существуют системы так называемых *циклов без прикосновений*, т. е. таких замкнутых кривых, которые только пересекаются с интегральными кривыми, но не касаются ни одной из них. Последовательность таких циклов без прикосновений, «вложенных» один в другой, окружает всякий предельный цикл.

§ 8. Предельные циклы и автоколебания

Мы не будем в этом параграфе рассматривать конкретные физические примеры на отыскание периодических движений, соответствующих предельным циклам, и на исследование их устойчивости или неустойчивости, подобно тому как это мы сделали в отношении состояния равновесия. Для этой исключительно трудной задачи, разрешимой лишь в частных случаях, мы еще не подготовили читателя.

Нам придется ограничиться здесь, да и то забегаая по некоторым пунктам немного вперед, лишь принципиальным вопросом о физическом смысле, о физической интерпретации изолированных замкнутых траекторий — предельных циклов.

Если мы потребуем, чтобы в реальных физических системах качественный характер возможных движений сохранялся при произвольных малых изменениях самих систем [на языке математики — при произвольных малых изменениях правых частей системы (A)], то, как это мы увидим в дальнейшем, мы этим запретим существование неизолированных замкнутых кривых. В системах, удовлетворяющих этому требованию устойчивости качественного характера движений при малых изменениях динамической системы, — в так называемых «грубых» системах, — могут быть только изолированные замкнутые траектории и притом такие, что соответствующие им периодические решения имеют

характеристические показатели, отличные от нулей. Таким образом в грубых системах могут быть или орбитно-устойчивые или орбитно-неустойчивые предельные циклы, причем орбитная устойчивость влечет за собой устойчивость по Ляпунову.

С физической точки зрения представляет интерес следующее замечание, которое можно сделать относительно движений, отображаемых устойчивым предельным циклом. Именно, можно сказать, что для таких движений период и «амплитуда»¹⁾ не зависят от начальных условий в том смысле, что все соседние движения (соответствующие целой области начальных значений — так называемой области устойчивости в большом) асимптотически приближаются к периодическому движению по предельному циклу, которое имеет определенный период и определенную «амплитуду».

Вышеприведенные свойства периодических движений, отображаемых предельными циклами с отрицательными характеристическими показателями²⁾, — а) устойчивость по отношению к малым изменениям самой системы; б) независимость (в указанном смысле) периода и «амплитуды» от начальных условий, — составляют характерную черту реальных автоколебательных процессов.

Конкретное исследование уравнений вида (А), с которыми пришлось иметь дело в различных случаях автоколебаний, также показало на ряде примеров, что если уравнения (А) с достаточной точностью идеализируют реальную автоколебательную систему, то соответствующие дифференциальные уравнения имеют предельные циклы с отрицательным характеристическим показателем, и что стационарные периодические процессы действительно отображаются этими предельными циклами³⁾.

Отсюда мы делаем такой вывод: реальные автоколебательные процессы, устанавливающиеся в системах, достаточно точно отображаемых уравнениями (А), математически соответствуют предельным циклам с отрицательным характеристическим показателем. Наличие таких предельных циклов в фазовом портрете рассматриваемой динамической системы является необходимым и достаточным условием для возможности (при надлежащих начальных условиях) существования автоколебаний в системе, т. е. для того, чтобы система была автоколебательной.

1) Точнее следовало бы сказать: «период и весь спектр амплитуд, получаемый при разложении периодического движения в ряд Фурье».

2) Мы часто будем говорить о характеристическом показателе данного предельного цикла, вместо того чтобы говорить о характеристическом показателе периодического решения, соответствующего данному предельному циклу. Такая терминология законна, так как характеристический показатель один и тот же для всех периодических решений, соответствующих данному предельному циклу; кроме того, как мы увидим дальше, характеристический показатель предельного цикла может быть определен и без обращения к периодическому решению и к соответствующему уравнению первого приближения.

3) В некоторых случаях можно объяснить существование автоколебаний в системе, описываемой двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, и при отсутствии предельных циклов (случай так называемых «разрывных» колебаний). Однако в этих случаях всегда должны существовать на фазовой плоскости такие «исключительные» точки, где движение уже не определяется уравнениями типа (А) (т. е. уравнениями с аналитическими правыми частями).

Неустойчивый предельный цикл, имеющий положительный характеристический показатель, само собою разумеется, также может быть в «грубых» системах. Однако такой предельный цикл не соответствует реальному периодическому процессу; он играет лишь роль «водораздела», по обе стороны от которого траектории имеют различное поведение. Ясно, что это обстоятельство также имеет существенный физический интерес. Например, наличие неустойчивого цикла дает объяснение так называемого «жесткого» режима, при котором малые начальные отклонения в системе затухают, а большие, наоборот, нарастают.

§ 9. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация ¹⁾

Перейдем теперь от рассмотрения состояний равновесия и периодических движений к исследованию общего поведения траекторий на фазовой плоскости.

Излагаемая в этом параграфе теория имеет весьма общий и несколько абстрактный характер. В следующем параграфе мы применим выводы этой теории, дополнив и развив их, к частному классу динамических систем, к так называемым «грубым» системам, которые в первую очередь интересуют теорию автоколебаний.

Предположим, что рассматриваемая динамическая система описывается двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (A)$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ мы будем предполагать аналитическими для всех значений x и y , за исключением некоторого множества точек, которое мы будем называть множеством S .

Пусть x_0, y_0 — точка фазовой плоскости, не принадлежащая к точкам множества S , и

$$x = \varphi(x_0, y_0; t - t_0) = x(t), \quad y = \psi(x_0, y_0; t - t_0) = y(t) \quad (B)$$

— решение системы (A), принимающее значение $x = x_0, y = y_0$ при $t = t_0$. Функции $x(t), y(t)$ дают нам движение изображающей точки, помещенной в точку x_0, y_0 в момент $t = t_0$. Условимся точнее, что мы будем называть целой траекторией. Если решение $x = x(t), y = y(t)$ продолжаемо для всех значений t , то *целой траекторией* мы назовем совокупность всех точек, соответствующих значениям $t: -\infty < t < +\infty$.

¹⁾ Для того чтобы сознательно пользоваться при исследовании нелинейных колебаний качественной теорией дифференциальных уравнений, нужно знакомство не только с результатами этой теории, но, в известной мере, и с теми методами, с теми способами рассуждений, при помощи которых были получены эти результаты. Поэтому в этом параграфе мы даем не только результаты, касающиеся общей теории поведения траекторий на фазовой плоскости, но и некоторые доказательства. Читатель, интересующийся разбором отдельных конкретных задач, может сразу обратиться к концу параграфа, где сжато сформулированы выводы. Более подробное изложение см. Bendixon [13], Birkhoff [17], Kamke [70].

Однако может случиться, что при возрастании (или убывании) t от t_0 до некоторого конечного значения $t=T$ (или $t=\tau$) изображающая точка или стремится к точкам множества S , или уходит в бесконечность¹⁾. Тогда решение (В) уже не продолжаемо либо для значений $t \geq T$, либо для значений $t \leq \tau$, либо, наконец, одновременно и для $t \geq T$ и для $t \leq \tau$. Во всех этих случаях мы будем называть целой траекторией совокупность всех точек, отвечающих тем значениям t , для которых соответствующее решение продолжаемо. Часть целой траектории, соответствующую значениям $t \geq t_0$, назовем *положительной полутраекторией*, а часть, соответствующую $t \leq t_0$, — *отрицательной полутраекторией*.

Мы будем называть движение $x=x(t)$, $y=y(t)$ (и соответствующую ему траекторию) *положительно* (или *отрицательно*) *устойчивым* в смысле Биркгофа, если при $t > t_0$ (или $t < t_0$) изображающая точка не уходит в бесконечность и не подходит сколь угодно близко к точкам множества S ²⁾.

Очевидно, что положительно (или отрицательно) устойчивая в смысле Биркгофа траектория продолжаема для всех $t > t_0$ (или для всех $t < t_0$), а траектория одновременно и положительно и отрицательно устойчивая продолжаема от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

При выяснении возможного характера траектории большую роль играют понятия предельной точки и предельной траектории. Пусть $x = \varphi(x_0, y_0; t - t_0) = x(t)$, $y = \psi(x_0, y_0; t - t_0) = y(t)$ — какое-нибудь положительно устойчивое в смысле Биркгофа движение и C — соответствующая этому движению положительная полутраектория. Рассмотрим какую-нибудь неограниченно возрастающую последовательность значений t ($t \geq t_0$):

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$$

и соответствующую ей последовательность точек полутраекторий C :

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

1) Поясним точнее, что это значит. Назовем ϵ -окрестностью множества S все точки фазовой плоскости, находящиеся на расстоянии, меньшем ϵ ($\epsilon > 0$), от точек множества S или на расстоянии, большем $\frac{1}{\epsilon}$, от начала координат. Если при возрастании t от t_0 до некоторого конечного значения $t = \tau$ изображающая точка, начиная с некоторого значения t_1 [$t_1 = t_1(\epsilon) < \tau$], входит внутрь ϵ -окрестности множества S и остается в ней (сколь бы мало ни было ϵ) для всех $t_1 < t < \tau$, то мы скажем, что изображающая точка при $t \rightarrow \tau$ стремится к точкам множества S или уходит в бесконечность.

2) С помощью понятия ϵ -окрестности множества S , которое было дано в предыдущей сноске, можно дать точное определение устойчивости по Биркгофу. Рассматриваемое движение (В) будем называть *положительно* (отрицательно) *устойчивым* в смысле Биркгофа, если существует такое ϵ , что для всех $t > t_0$ (или $t < t_0$) изображающая точка, двигаясь на траектории, остается вне ϵ -окрестности множества S . Устойчивость по Биркгофу — это не то, что устойчивость по Ляпунову, о которой мы много говорили. Устойчивость по Ляпунову — это свойство, связанное с соседними движениями; устойчивость по Биркгофу — это внутреннее свойство данной траектории. Понятие устойчивости движения по Биркгофу идет от Лагранжа и в особенности от Лапласа к Пуанкаре и Биркгофу. Лаплас назвал бы солнечную систему устойчивой, если бы можно было показать, что планеты не уходят в бесконечность, не падают на солнце и не сталкиваются между собой. Биркгоф гово-

с координатами

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

С этими точками фазовой плоскости будет совпадать наша изображающая точка в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, двигающаяся по полутраектории C .

Так как рассматриваемое движение положительно устойчиво, то наша полутраектория C лежит в ограниченной части фазовой плоскости. Поэтому в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса множество точек $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ должно иметь хотя бы одну предельную точку P с координатами ξ, η . Это значит, что из последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ можно выбрать такую неограниченно возрастающую подпоследовательность $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(\tau_n) = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y(\tau_n) = \eta.$$

Точка ξ, η называется *предельной точкой* рассматриваемой положительной полутраектории.

Совершенно так же, рассматривая отрицательно устойчивое (в смысле Биркгофа) движение и последовательность значений, стремящуюся к $-\infty$, мы получим предельную точку отрицательной полутраектории. Очевидно, что при различных неограниченно возрастающих последовательностях значений t мы можем, вообще говоря (например, если полутраектория — спираль, наматывающаяся на предельный цикл), получить не одну, а несколько или даже бесчисленное множество предельных точек положительной полутраектории (это же высказывание, с очевидными изменениями, имеет силу и для отрицательной полутраектории). Заметим, что точки самой полутраектории могут либо принадлежать к предельным точкам (например в случае замкнутой полутраектории), либо могут и не принадлежать (например в случае, если полутраектория — спираль, наматывающаяся на предельный цикл).

Первая основная теорема. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ — положительно устойчивое движение и пусть C — соответствующая положительная полутраектория. Если ξ_0, η_0 — предельная точка полутраектории C , то все точки траектории C_0 , проходящей через точку ξ_0, η_0 , являются предельными для полутраектории C . При этом траектория C_0 является положительно и отрицательно устойчивой в смысле Биркгофа.

Рассмотрим одно из движений $x = \bar{x}(t), y = \bar{y}(t)$, которым соответствует траектория C_0 , и пусть точка ξ_0, η_0 соответствует $t = \tau$. Так как одна и та же траектория соответствует бесчисленному множеству движений, отличающихся одно от другого лишь выбором начала отсчета времени, то значение τ , которому соответствует точка ξ_0, η_0 , мы можем взять каким угодно; этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

Заметим, что если фазовая траектория вьется на конечном расстоянии от начала координат и не приходит к некоторым запрещенным точкам, где, например, скорости обращаются в бесконечность, то движение устойчиво. Так как мы можем идти по траектории следуя, как возрастающему, так и убывающему времени, то имеет смысл различать положительно (при $t \rightarrow +\infty$) и отрицательно (при $t \rightarrow -\infty$) устойчивые в смысле Биркгофа траектории.

Так как ξ_0, η_0 — предельная точка для полутраектории C , то существует неограниченно возрастающая последовательность значений $t: t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \xi_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \eta_0.$$

Другими словами, это значит, что, сколь бы малую окружность радиуса δ вокруг точки ξ_0, η_0 мы ни взяли, всегда начиная с некоторого достаточно большого значения N , все точки с координатами $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i)$ будут находиться внутри этой окружности.

По предыдущему мы можем взять такое движение $x = \bar{x}(t), y = \bar{y}(t)$ по траектории C_0 , чтобы точка ξ_0, η_0 соответствовала значению $t = \tau = t_i$, где i — любое целое число. Пусть ξ, η — любая другая точка траектории C_0 , соответствующая значению $t = \tau + T$ или, при нашем выборе τ , соответствующая значению $t = t_i + T$. Тогда в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, каково бы ни было ϵ ($\epsilon > 0$), мы всегда сможем выбрать столь малое δ , чтобы

$$|x(t_i + T) - \bar{x}(t_i + T)| = |x(t_i + T) - \xi| < \epsilon,$$

$$|y(t_i + T) - \bar{y}(t_i + T)| = |y(t_i + T) - \eta| < \epsilon,$$

если

$$|x(t_i) - \bar{x}(t_i)| = |x_i - \xi_0| < \delta,$$

$$|y(t_i) - \bar{y}(t_i)| = |y_i - \eta_0| < \delta.$$

Как мы указывали, всегда можно найти столь большое число N , что последние неравенства будут выполнены для всех $i > N$, так как ξ_0, η_0 — предельная точка полутраектории C .

Так как ϵ может быть выбрано сколь угодно малым, а t_i всегда можно взять настолько большим, чтобы $t_i + T$ было больше t_0 (это замечание существенно, когда $T < 0$), то отсюда следует, что точка ξ, η траектории C_0 есть предельная для точек полутраектории C , соответствующих значениям $t: t_i + T, t_{i+1} + T, \dots$

Таким образом всякая точка траектории C_0 является предельной для полутраектории C . Траекторию C_0 мы будем называть предельной траекторией для полутраектории C .

Легко видеть, что траектория C_0 и положительно и отрицательно устойчива в смысле Ляпунова. Действительно, в противном случае на C_0 существовали бы точки, сколь угодно близкие к точкам множества S или сколь угодно далекие от начала координат. Но так как все точки C_0 являются по доказанному предельными для полутраектории C , то в таком случае и на полутраектории C были бы точки, сколь угодно близкие к точкам множества S или сколь угодно далекие от начала координат; последнее невозможно, так как по условию движение $x = x(t), y = y(t)$ — положительно устойчивое.

Следствие. Множество предельных точек полутраектории состоит из множества целых траекторий, положительно и отрицательно устой-

чивых в смысле Биркгофа (среди них, само собою разумеется, могут быть траектории, выродившиеся в точки, т. е. состояния равновесия)¹⁾.

Очевидно, что все высказывания, относящиеся к первой основной теореме, могут быть повторены (в силу симметрии времени) с соответствующими изменениями по отношению к отрицательно устойчивым движениям и отрицательным полутраекториям. Поэтому дальше мы будем формулировать все предложения лишь по отношению к положительно устойчивым движениям и положительным полутраекториям.

Мы доказали эту теорему для случая траекторий на фазовой плоскости, однако она справедлива для траекторий на любой двумерной поверхности (например на торе) и даже для траекторий в пространстве n измерений (в случае n -уравнений первого порядка).

Прежде чем перейти к доказательству второй основной теоремы, которая покажет нам, какие траектории могут быть предельными, нам придется остановиться на ряде вспомогательных предложений, связанных с так называемым «отрезком без контакта» (отрезком без прикосновения). Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь точку x_0, y_0 , не являющуюся ни состоянием равновесия, ни точкой множества S . Пусть C_0 — траектория, проходящая через точку x_0, y_0 . Проведем через эту точку прямую D , не касающуюся в точке x_0, y_0 траектории C_0 . Очевидно, что мы всегда можем выделить на этой прямой такой отрезок, содержащий точку x_0, y_0 , который ни в одной своей точке не касался бы ни одной из траекторий системы (A). Такой отрезок и называется *отрезком без контакта*.

Дадим ряд предложений, относящихся к отрезку без контакта, которые нам будут необходимы в дальнейшем; некоторые из этих предложений совершенно очевидны, и мы их не будем доказывать.

I. Прямая D делит фазовую плоскость на две части, и мы можем различать две стороны прямой D . Пусть по рассматриваемой траектории C_0 задано движение $x = \bar{x}(t), y = \bar{y}(t)$ ²⁾ и пусть точка x_0, y_0 соответствует значению $t = t_0$. Так как в точке x_0, y_0 прямая D не касается траектории C_0 , то в силу непрерывности правых частей уравнений (A) мы всегда можем указать такие $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, чтобы часть траектории, соответствующая значениям t , удовлетворяющим неравенству $t_1 \leq t < t_0$, лежала целиком по одну сторону прямой D , а часть траектории, соответствующая $t_0 < t \leq t_2$, целиком лежала по другую сторону прямой.

1) Можно было бы показать, что множество предельных точек полутраекторий S связно. В рассматриваемом случае это значит, что каждые две предельные точки полутраектории S могут быть соединены непрерывной кривой, целиком состоящей из таких предельных точек; эта непрерывная кривая состоит из целых траекторий (среди которых могут быть и состояния равновесия) и самое большое — из двух кусков целых траекторий. Этот же факт может быть изложен следующим образом: множество предельных точек полутраектории S образует *связное множество целых траекторий*. Не предполагая у читателя сведений по теории множеств и не имея возможности здесь дать точное определение понятия связности точечного множества мы не будем пользоваться в дальнейшем этим понятием.

2) В следующих предложениях мы будем считать, что если дана траектория C , то дано и движение по траектории.

II. В силу непрерывности правых частей системы (A) изображающая точка, двигаясь по любой из траекторий, пересекающих отрезок без контакта, при возрастании t всегда переходит с одной и той же стороны прямой D на другую ее сторону. Это может быть сформулировано и так: *все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении.*

III. Изображающая точка, находящаяся в момент $t=t_0$ в точке x_1, y_1 , достаточно близкой к точке x_0, y_0 , через которую проведен отрезок без контакта L , непременно пересечет отрезок L либо при значении $t=t_0+\Delta$, либо при значении $t=t_0-\Delta$ ($\Delta \geq 0$). При этом Δ будет меньше любого наперед заданного положительного числа, если точку x_1, y_1 взять достаточно близкой к точке x_0, y_0 .

IV. Всякая часть траектории, соответствующая значениям t внутри некоторого конечного промежутка α, β ($\alpha \leq t \leq \beta$), может иметь лишь конечное число точек пересечения с любым отрезком без контакта.

Доказательство поведем от противного. Предположим, что траектория C_0 имеет бесчисленное множество точек пересечения с некоторым отрезком без контакта L и что все эти точки соответствуют значениям t , лежащим между α и β .

В силу принципа Больцано-Вейерштрасса из бесчисленного множества значений t , соответствующих этим точкам пересечения, мы можем выбрать последовательность $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, стремящуюся (при $n \rightarrow \infty$) к некоторому значению τ , где $\alpha \leq \tau \leq \beta$. Точка траектории C_0 , соответствующая $t=\tau$, является предельной точкой¹⁾ для множества точек пересечения траектории C_0 с отрезком без контакта L и поэтому должна лежать на L . Но

в силу основного свойства отрезка без контакта (предложение I) для значений t , достаточно близких к τ , не может быть на траектории C_0 точек, которые лежали бы опять на отрезке без контакта. Последнее утверждение находится в противоречии с тем, что τ есть предельное значение t , соответствующее точкам пересечения C_0 с L , т. е. с тем, что есть сколь угодно близкие к τ значения t , которым соответствуют точки пересечения C с L . Мы пришли к противоречию, и этим самым доказано, что число точек конечно.

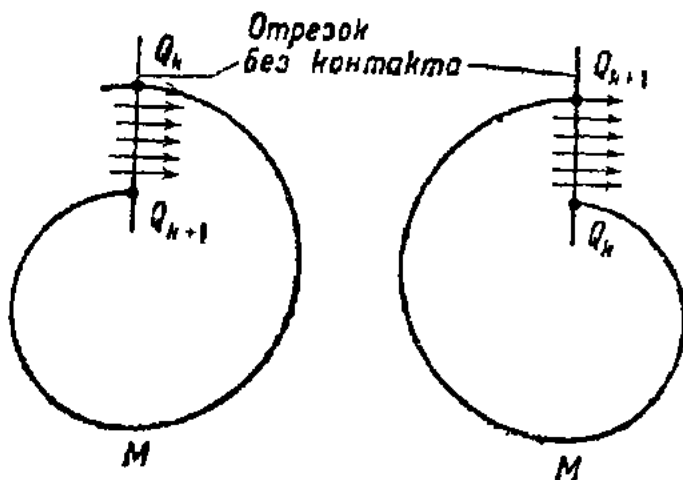


Рис. 220.

1) Ясно, что эта предельная точка не есть то, что мы назвали предельной точкой полутраектории. Здесь, как и в дальнейшем, нам приходится употреблять термин «предельная точка» как в смысле предельной точки точечного множества, так и в смысле предельной точки полутраектории. Не следует смешивать эти два понятия. Предельная точка полутраектории есть предельная точка точечного множества специального типа, именно — последовательности точек полутраектории, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t .

V. Точки пересечения незамкнутой траектории C_0 с любым отрезком без контакта L , соседние по значениям времени t будут также соседними и на отрезке L . Расположим значения t , соответствующие точкам пересечения траектории C_0 с отрезком L в порядке возрастания $t: t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < \dots$. Возьмем две точки пересечения C_0 с L : Q_k и Q_{k+1} , соответствующие соседним значениям времени t_k и t_{k+1} , и покажем, что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ не может быть больше точек пересечения C_0 с L . Действительно, если бы на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ была еще точка пересечения, то она могла бы соответствовать либо значениям $t > t_{k+1}$, либо значениям $t < t_{k+1}$ (так как между t_k и t_{k+1} нет значений t , соответствующих точкам пересечения C_0 с L). Но при значении $t = t_{k+1}$ изображающая точка, двигающаяся по траектории, входит внутрь (выходит из) замкнутой кривой $Q_k M Q_{k+1} Q_k$ (рис. 220), составленной из куска траектории $Q_k M Q_{k+1}$ и отрезка $Q_k Q_{k+1}$. Для того чтобы изображающая точка смогла еще раз пересечь отрезок $Q_k Q_{k+1}$, она должна выйти (или войти внутрь) из этой замкнутой кривой. Это невозможно, так как изображающая точка не сможет пересечь ни кусок траектории $Q_k M Q_{k+1}$ (траектории на фазовой плоскости не пересекаются), ни отрезок $Q_k Q_{k+1}$, так как она должна была бы пересечь последний в направлении, противоположном первоначальному (все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении — предложении II). Отсюда следует, что на нашем отрезке не может быть точек пересечения для $t > t_{k+1}$. Таким же образом можно показать, что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ не может быть точек пересечения с траекторией C_0 , соответствующих значениям $t < t_k$.

Доказанное предложение можно сформулировать и так: *последовательные точки пересечения положительной полутраектории с любым отрезком без контакта L располагаются на отрезке L в порядке возрастания времени.*

VI. *Замкнутая траектория может иметь с отрезком без контакта только одну точку пересечения.* Действительно, предположим, что замкнутая траектория C_0 имеет более одной точки пересечения с отрезком без контакта L , и пусть Q_k и Q_{k+1} — две соседние точки пересечения, соответствующие значениям t_k и t_{k+1} ($t_{k+1} > t_k$), так что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ нет больше точек пересечения C_0 с L . Очевидно, что на траектории C_0 есть точки, соответствующие значениям $t < t_k$, лежащие вне (внутри) замкнутой кривой $Q_k M Q_{k+1} Q_k$, составленной из куска траектории $Q_k M Q_{k+1}$ и отрезка $Q_k Q_{k+1}$, и есть точки, соответствующие значениям $t > t_{k+1}$, лежащие внутри (вне) этой замкнутой кривой (рис. 220). Так как траектория C_0 замкнута, то изображающая точка, двигающаяся по дуге $Q_k M Q_{k+1}$ и попавшая внутрь (оказавшаяся вне) кривой $Q_k M Q_{k+1} Q_k$, должна выйти из нее (войти в нее), чтобы описать внешнюю (внутреннюю) часть траектории C_0 . Это, очевидно, невозможно, так как все траектории пересекают отрезок $Q_k Q_{k+1}$ в одном и том же направлении, а пересечь дугу траектории $Q_k M Q_{k+1}$ изображающая точка также не сможет.

Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что все точки пересечения замкнутой траектории C_0 с отрезком без контакта L непременно совпадают.

VII. Рассмотрим незамкнутую положительную полутраекторию C , для которой траектория C_0 (не являющаяся состоянием равновесия) есть предельная. Если через какую-нибудь точку x_0, y_0 траектории C_0 проведен отрезок без контакта, то на этом отрезке будет бесконечная последовательность точек полутраектории C (расположенных в порядке возрастания времени t), стремящаяся к точке x_0, y_0 .

Это предложение является следствием первой основной теоремы и предложений III и V.

VIII. Пусть $x = \bar{x}(t), y = \bar{y}(t)$ — движение по траектории C_0 , не являющейся состоянием равновесия, причем точка ξ_0, η_0 этой траектории соответствует значению $t = t_0$, а точка ξ, η — значению $t = t_1$. Пусть L — отрезок без контакта в точке ξ, η . Тогда, сколь бы малы ни были ϵ и Δ ($\epsilon > 0, \Delta > 0$), всегда можно указать такое $\delta [\delta = \delta(\epsilon, \Delta)]$, что изображающая точка, помещенная в момент $t = t_0$ на расстоянии, меньшем δ , от точки ξ_0, η_0 , при некотором значении $t = T$, удовлетворяющем неравенству $|t_1 - T| < \Delta$, необходимо пересечет отрезок без контакта L , оставаясь в течение промежутка времени от $t = t_0$ до $t = T$ на расстоянии, меньшем ϵ , от точек траектории C_0 , соответствующих значениям t , между t_0 и t_1 .

Это предложение (справедливое как для $t_1 > t_0$, так и для $t_1 < t_0$) является следствием теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и предложения III.

Вторая основная теорема. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ — положительно устойчивое движение и C — соответствующая положительная полутраектория. Если полутраектория C не замкнута и имеет хотя бы одну предельную траекторию, не являющуюся состоянием равновесия, то она сама не может быть предельной.

Пусть C_0 — траектория, не являющаяся состоянием равновесия, предельная для полутраектории C . Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что полутраектория C сама является предельной для некоторой полутраектории C' , и покажем, что мы придем к противоречию.

Возьмем какую-нибудь точку P на траектории C_0 и проведем в ней отрезок без контакта L . Так как точка P — предельная для полутраектории C , то на отрезке L будет бесчисленное множество точек траектории C , расположенных в порядке возрастания t (предложение VII).

Возьмем три последовательные точки пересечения L с C : P_1, P_2, P_3 ; так как мы предположили, что траектория C сама является предельной для полутраектории C' , то, в частности, предельной для полутраектории C' будет точка P_2 . Тогда, опять-таки на основании предложения VII, либо на отрезке P_1P_2 , либо на отрезке P_2P_3 должна быть последовательность точек полутраектории C' , стремящаяся к точке P_2 . Мы покажем, что это невозможно, так как полутраектория C' может пересекать каждый из отрезков P_1P_2 и P_2P_3 только по одному разу.

Действительно, пусть Q — одна из точек пересечения полутраектории C' с отрезком P_1P_2 . Изображающая точка, помещенная в момент $t = \tau$ в точку Q , при значениях $t > \tau$ либо войдет внутрь замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$, образованной частью P_1MP_2 полутраектории C и отрезком без контакта P_1P_2 , либо выйдет из этой замкнутой кривой. Пусть,

например, изображающая точка при $t > \tau$ входит внутрь замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$; тогда она уже не сможет выйти из нее, так как она не может выйти ни через дугу P_1MP_2 (траектории не пересекаются), ни через отрезок P_1P_2 , потому что все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении. Следовательно, изображающая точка уже не сможет больше пересечь отрезок P_1P_2 при $t > \tau$.

Совершенно такое же рассуждение можно провести для того случая, когда изображающая точка выходит при $t > \tau$ из замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$; ясно, что аналогичное рассуждение справедливо и для отрезка P_2P_3 . Таким образом предположение, что полутраектория C есть предельная для полутраектории C' , приводит к противоречию, и теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что незамкнутая траектория не может быть самопредельной, так как в противном случае она имела бы предельную траекторию — самое себя, — не являющуюся состоянием равновесия, и сама являлась бы предельной.

Эта теорема отражает черты, характерные для плоскости, и вообще уже не справедлива для траекторий в других фазовых пространствах, например для траекторий на торе, или для случая системы трех уравнений, аналогичных системе (A), когда фазовым пространством является евклидово пространство трех измерений.

Из второй основной теоремы следует невозможность других типов предельных траекторий, кроме: 1) состояний равновесия, 2) замкнутых траекторий, 3) незамкнутых траекторий, имеющих в качестве предельных точек только состояния равновесия, так как в силу этой теоремы никакая незамкнутая предельная траектория сама уже не может иметь предельных точек, отличных от состояния равновесия. Мы добавим еще ко второй основной теореме еще две теоремы, которые позволят установить, какие комбинации из названных типов предельных траекторий возможны в качестве множества всех предельных точек устойчивой по Биркгофу полутраектории. При этом мы будем теперь предполагать, что правые части системы (A) не имеют общих множителей. В этом предположении всякая полутраектория, соответствующая устойчивому по Биркгофу движению, может иметь [как это нетрудно показать на основании аналитичности правых частей системы (A)] лишь конечное число состояний равновесия в качестве предельных точек.

ТЕОРЕМА I. Если положительная полутраектория C , соответствующая устойчивому движению, такова, что среди ее предельных точек могут быть лишь состояния равновесия, то она будет иметь одно и только одно состояние равновесия в качестве предельного. (Движение, соответствующее траектории C , называется тогда асимптотически стремящимся к состоянию равновесия при $t \rightarrow \infty$.)

Будем доказывать это предложение от противного. Предположим, что полутраектория C имеет более одной предельной точки, являющейся состоянием равновесия, и пусть P_1, P_2, \dots, P_N ($N \geq 2$) — все предельные точки этой полутраектории (все точки P_i — состояния равновесия).

Пусть наименьшее расстояние между точками P_1, P_2, \dots, P_N есть d . Окружим каждую точку P_i окружностью ϵ , радиуса, меньшего $\frac{d}{2}$ (ясно, что все окружности ϵ_i будут без общих точек).

Так как точки P_i — предельные для полутраектории C , то в любой близости каждой из них, а следовательно, и внутри каждой окружности ϵ_i , должно быть бесчисленное множество точек полутраектории C , соответствующих сколь угодно большим значениям t .

Возьмем какую-нибудь одну, фиксированную, окружность ϵ , и пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ — точки полутраектории C , лежащие внутри ϵ , и соответствующие неограниченно возрастающим значениям t : $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ ($t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$). Изображающая точка, помещенная при $t = t_k$ в какую-нибудь точку Q_k , должна при $t > t_k$ выйти из ϵ , для того чтобы попасть внутрь других окружностей, и затем вновь должна вернуться внутрь ϵ . Следовательно, вне всех окружностей ϵ_i должны быть точки полутраектории C , соответствующие $t > t_k$. Так как это рассуждение справедливо для любого k , то ясно, что вне всех окружностей ϵ_i должно быть бесчисленное множество точек полутраектории C , соответствующих сколь угодно большим значениям t . Так как, по предположению, полутраектория C не уходит в бесконечность, то эти точки должны иметь хотя бы одну предельную точку P , а так как они соответствуют сколь угодно большим значениям t , то точка P будет предельной точкой для полутраектории C . Точка P не совпадает ни с одной из точек P_1, P_2, \dots, P_N (потому что P лежит вне или в крайнем случае на границе окружностей ϵ_i) и, следовательно, точки P_1, P_2, \dots, P_N не включают всех предельных точек полутраектории C , а это противоречит нашему предположению, и теорема доказана ¹⁾.

ТЕОРЕМА II. Если положительная полутраектория C имеет замкнутую предельную траекторию C_0 , то C_0 является единственной предельной траекторией для C .

Если сама полутраектория C замкнута, то все ее точки являются предельными для нее самой; и ясно, что никаких других предельных точек у нее быть не может. В этом случае теорема очевидна.

Предположим теперь, что C не замкнута.

Докажем сначала, что сколь бы малое ϵ мы ни взяли, все точки полутраектории C , начиная с некоторого значения $t = t_1$ (зависящего от ϵ), будут находиться внутри полосы шириной ϵ , описанной вокруг траектории C_0 . Пусть полутраектория C соответствует движению $x = x(t)$, $y = y(t)$, а траектория C_0 : $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$. Так как траектория C_0 замкнута, то $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — периодические функции, т. е. существует такое h , что

$$\bar{x}(t+h) = \bar{x}(t), \quad \bar{y}(t+h) = \bar{y}(t). \quad (324)$$

Возьмем какую-нибудь точку ξ , η траектории C_0 , соответствующую значению $t = \tau$; эта же точка будет соответствовать значениям $\tau + h$,

¹⁾ Заметим, что теорема I является непосредственным следствием связности множества предельных точек полутраектории (см. примечание на стр. 298).

$\tau + 2h, \dots$. Напомним, что мы всегда можем выбрать движение по траектории C_0 так, чтобы значение τ , которому соответствует точка ξ, η , имело любое выбранное значение.

Проведем в точке ξ, η отрезок без контакта L , целиком лежащий внутри рассматриваемой ϵ -окрестности (ϵ можно взять сколь угодно малым). В силу предложения VII на отрезке без контакта находится последовательность точек полутраектории C : $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, стремящаяся к точке ξ, η (так точка ξ, η — предельная для полутраектории C). При этом точки $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ расположены на отрезке L в порядке возрастания значений t : $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, (t_n \rightarrow \infty)$.

На основании предложения VIII мы всегда можем взять окружность столь малого радиуса $\delta [\delta(\epsilon, \Delta)]$ вокруг точки ξ, η , чтобы траектория, проходящая при $t = \tau$ через любую точку внутри этой окружности, за время от $t = \tau$ до $t = T$ не выходила из рассматриваемой полосы шириной ϵ и в момент $t = T$, сколь угодно мало отличающийся от $\tau + h$ [$|T - (\tau + h)| < \Delta$], пересекла бы отрезок L .

Возьмем точку P_{k_1} , соответствующую $t = t_{k_1}$, лежащую внутри окружности радиуса δ на отрезке L . Будем считать в данном случае $\tau = t_{k_1}$. Тогда в силу только что сказанного значение T будет равно некоторому t_{k_2} , причем $t_{k_2} > t_{k_1}$.

Часть полутраектории C , соответствующая промежутку времени от t_{k_1} до t_{k_2} , целиком содержится в полосе ϵ . Ясно, что точка P_{k_2} (соответствующая $t = t_{k_2}$) лежит на отрезке L ближе к точке ξ, η , чем точка P_{k_1} , и содержится, следовательно, внутри окружности радиуса δ . К точке P_{k_2} приложимо поэтому такое же рассуждение, как и к точке P_{k_1} , значит, существует такая точка P_{k_3} , соответствующая значению $t = t_{k_3} > t_{k_2}$, лежащая на отрезке без контакта L , что часть полутраектории C , соответствующая значениям t между t_{k_2} и t_{k_3} , целиком содержится внутри полосы шириной ϵ .

Продолжая такое же рассуждение далее, мы видим, что вся часть полутраектории C , соответствующая значениям t , большим t_{k_1} , содержится внутри полосы шириной ϵ .

Покажем теперь, что замкнутая траектория C_0 содержит все предельные точки полутраектории C . Доказательство поведем от противного. Предположим, что полутраектория C имеет предельную точку Q , не лежащую на замкнутой траектории C_0 и, следовательно, находящуюся на некотором расстоянии $l > 0$ от C_0 . В любой близости точки Q должны находиться точки полутраектории C , соответствующие сколь угодно большим значениям t .

Но, с другой стороны, в силу доказанного выше, сколь бы малое ϵ мы ни взяли, всегда найдется такое $t = \tau$, что все точки полутраектории C , соответствующие $t = \tau$, будут лежать внутри полосы шириной ϵ вокруг траектории C_0 .

Мы всегда можем взять ϵ меньше, чем $\frac{l}{2}$, так что точка Q будет лежать вне полосы шириной ϵ вокруг C_0 , и, следовательно, сколь угодно близко от точки Q не смогут находиться точки полутраектории C ,

соответствующие сколь угодно большим значениям t . Таким образом мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

Доказанные теоремы позволяют установить характер возможных совокупностей предельных траекторий для одной полутраектории: положительная полутраектория, соответствующая положительно устойчивому движению, может иметь множество предельных точек одного из следующих трех типов:

I тип. Одно состояние равновесия.

II тип. Одна замкнутая траектория.

III тип. Совокупность состояний равновесия и траекторий, соответствующих движениям, асимптотически стремящимся к состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ ¹⁾. Зная возможные характеры предельных множеств, мы можем сразу указать возможные виды любой положительной полутраектории, соответствующей положительно устойчивому движению. Именно такая полутраектория или: 1) состояние равновесия, 2) замкнутая траектория, 3) асимптотическая к состоянию равновесия, 4) асимптотическая к замкнутой траектории, 5) стремящаяся к предельному множеству типа III. Полутраектории всех названных типов, за исключением последнего, встречались нам уже неоднократно. Пример полутраектории последнего типа изображен на рис. 221, где полутраектория C (внешняя) стремится к предельному множеству, состоящему из двух состояний равновесия (седел) и четырех незамкнутых траекторий, асимптотических к этим состояниям равновесия как для $t \rightarrow +\infty$, так и для $t \rightarrow -\infty$.

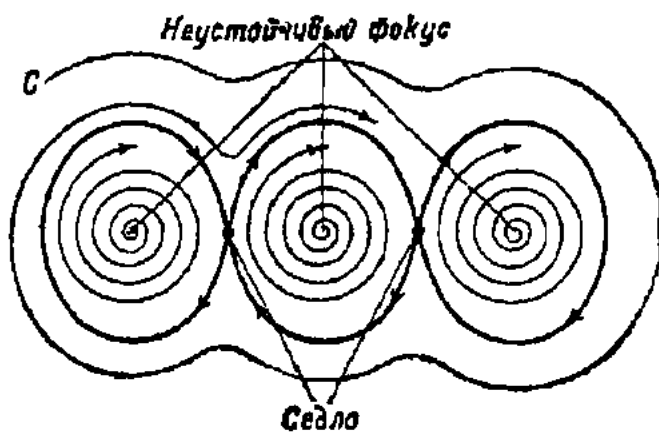


Рис. 221.

§ 10. «Особенные» и «грубые» системы. Характер возможных траекторий в грубых системах²⁾

Мы рассматривали сейчас характер возможных движений при сравнительно широких предположениях относительно вида дифференциальных уравнений (А). Мы сейчас введем требования, которые весьма сильно

¹⁾ Заметим, что каждое из движений, о которых здесь идет речь, может асимптотически стремиться к одному и тому же состоянию равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, или может стремиться к одному состоянию равновесия при $t \rightarrow +\infty$ и к другому при $t \rightarrow -\infty$. Нетрудно видеть, что эти состояния равновесия, входящие в состав рассматриваемой совокупности предельных траекторий, не могут быть фокусами или узлами, так как изображающая точка, попавшая в достаточно близость к узлу или фокусу, приближается к нему асимптотически и не может дать никакой другой предельной точки соответствующей полутраектории. Следовательно, этими состояниями равновесия могут быть либо седла, либо так называемые «патологические» особые точки (особые точки высших порядков).

²⁾ Ряд предложений дан в этом параграфе без доказательств. Доказательства см. А. Андроппов и Л. С. Понтрягин [114].

ограничат рассматриваемый класс дифференциальных уравнений и вместе с тем позволят значительно дальше провести исследование.

Динамические системы, относящиеся к этому выбранному нами классу, могут быть, во-первых, охарактеризованы тем, что для них существует *цикл без прикосновения*, т. е. замкнутая, не самопересекающаяся кривая, которую все траектории пересекают и ни одна не касается. С точки зрения физики существенно, чтобы этот цикл без прикосновения был столь велик, чтобы можно было ограничиться изучением характера траекторий внутри области, ограниченной этим циклом (область G), не суживая физической проблемы о возможных движениях системы.

Во-вторых, мы будем предполагать, что функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — аналитические в области G .

В-третьих, — и это наиболее существенное — мы потребуем, чтобы *качественная картина поведения траекторий на фазовой плоскости не менялась при малых изменениях дифференциального уравнения*. Укажем физическое обоснование такого требования.

При написании дифференциального уравнения, как мы уже говорили, мы никогда не учитываем и не можем учесть всех без исключения факторов, которые так или иначе влияют на поведение системы. С другой стороны, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во время движения физической системы; следовательно, параметры в реальной физической системе нельзя считать абсолютно постоянными, а лишь приблизительно постоянными. Между тем часто некоторые качественные черты рассматриваемой нами идеализированной схемы обусловлены известными вполне определенными количественными соотношениями, именно, некоторыми равенствами между параметрами описывающих схему уравнений, и эти качественные черты исчезают при сколь угодно малом изменении количественных соотношений между параметрами. Ясно, что такие качественные черты, вообще говоря, не наблюдаются в реальных системах. Поэтому мы можем сразу отказаться от рассмотрения таких качественных сторон движения, которые исчезают при небольших изменениях вида дифференциальных уравнений, описывающих систему.

Это общее требование, которое мы будем называть *требованием устойчивости характера движений при малых изменениях динамической системы*, может быть сформулировано математически следующим образом.

Пусть мы имеем на фазовой плоскости, внутри цикла без прикосновения, область G . Движение в этой области определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (325)$$

Рассмотрим «измененную» систему:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y). \quad (326)$$

Систему (325) мы будем называть *грубой* (в отличие от систем негрубых или *особенных*), если существует такое конечное ε ($\varepsilon > 0$), что для

всевозможных аналитических $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющих внутри области G условиям:

$$\left. \begin{aligned} |p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon, \\ \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

топологическая структура разбиения области G на траектории остается одинаковой при переходе от системы (325) к системе (326)¹⁾.

Выясним, какие особенности характерны для грубой системы. Требование «грубости» накладывает далеко идущие ограничения на характер возможных траекторий в области G , которые могут быть сформулированы в виде следующих трех предложений, которые мы здесь дадим без доказательства.

I. В области G могут быть только простые особые точки, т. е. только такие состояния равновесия, для которых действительные части корней характеристического уравнения отличны от нулей. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть состояний равновесия $x = x_0, y = y_0$:

а) для которых

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

б) для которых при $\Delta > 0$ $\sigma = -[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)] = 0$.

II. В области G могут быть только простые предельные циклы, т. е. только такие предельные циклы, для которых характеристический показатель не равен нулю. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть периодических движений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad [\varphi(t + \tau) = \varphi(t); \quad \psi(t + \tau) = \psi(t)],$$

для которых

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt = 0.$$

III. В области G не может быть сепаратрис (усов седла), идущих из седла в седло.

Таким образом требование «грубости» запрещает сложный характер так называемых «особых элементов» (особых точек, предельных циклов и сепаратрис) и приводит к относительно весьма простым качественным картинам траекторий в области G . Можно доказать еще одно важное предложение, обратное только что указанным²⁾.

1) Точнее: мы назовем систему (325) «грубой», если, каково бы ни было $\eta > 0$, всегда можно найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы при всевозможных аналитических $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющих условиям (B), существовали взаимно однозначные и взаимно непрерывные функции $\bar{x} = \varphi(x, y)$; $\bar{y} = \psi(x, y)$, переводящие область G в самое себя, каждую траекторию уравнения (325) в траекторию уравнения (326) и при этом такие, что $|x - \bar{x}| < \eta$, $|y - \bar{y}| < \eta$.

2) Для того чтобы сразу дать цельную картину, мы приводим это обратное предложение, непосредственно после первых трех, хотя доказательство этого предложения (которое мы здесь не даем) основывается на последующем изложении.

IV. Если система $\frac{dx}{dt} = P(x, y); \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ имеет внутри цикла без прикосновения:

1) лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и для которых $\sigma \neq 0$, если $\Delta > 0$;

2) лишь такие предельные циклы, для которых $h \neq 0$;

3) лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло, то такая система внутри цикла без соприкосновения является грубой.

Нужно отметить, что как в случае с особыми точками, так и в случае с предельными циклами требование неизменности характера интегральных кривых при малых изменениях вида дифференциальных уравнений накладывает *аналитические* требования на дифференциальные уравнения. Например, в случае цикла, даже если характеристический показатель равен нулю, то все же возможно, правда, так сказать, «ослабленное» накручивание с обеих сторон, и, следовательно, «топологически» мы имеем дело с орбитно устойчивым предельным циклом. Этот цикл может быть устойчивым по отношению к малым изменениям начальных условий, но является неустойчивым по отношению к изменению вида дифференциальных уравнений, например может распасться на нечетное число циклов при сколь угодно малом изменении вида дифференциальных уравнений¹⁾.

Посмотрим, какие предельные движения, т. е. движения, к которым стремятся другие движения при $t \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow -\infty$), могут быть в грубых системах. Мы знаем на примерах, что такими движениями могут быть состояния равновесия и предельные циклы.

Общая теория, изложенная в § 9, показывает, что траектория, не являющаяся состоянием равновесия или замкнутой траекторией, стремится при $t \rightarrow +\infty$ (а также и при $t \rightarrow -\infty$, если она не выходит из области G) либо к состоянию равновесия, либо к замкнутой траектории, либо к совокупности траекторий, состоящей из траекторий асимптотических (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$), к состояниям равновесия, и состояний равновесия, которыми в этом последнем случае могут быть только седла или так называемые сложные особые точки. Так как в грубых системах, как мы видели, не может быть сложных особых точек, то в последнем случае совокупность предельных траекторий могла бы состоять лишь из седел и траекторий, идущих из седла в седло (см. рис. 221). Однако этот случай (в силу III) также не может осуществиться в грубой системе.

Таким образом в грубой системе невозможны *предельные* движения типа сепаратрис. *Единственными* предельными траекториями являются в невырожденной системе простые состояния равновесия и простые предельные циклы. Грубость налагает, следовательно, весьма сильные требования, исключающие возможность целого ряда движений в системе. Теперь перейдем к классификации всех возможных траекторий в рассматриваемом нами случае грубой системы.

1) Подобно тому, как если в уравнении $f(x) = 0$ мы имеем тройной корень $x = a$, мы не можем этот случай различить по знаку $f(x)$ справа и слева от $x = a$ от случая, когда a — однократный корень.

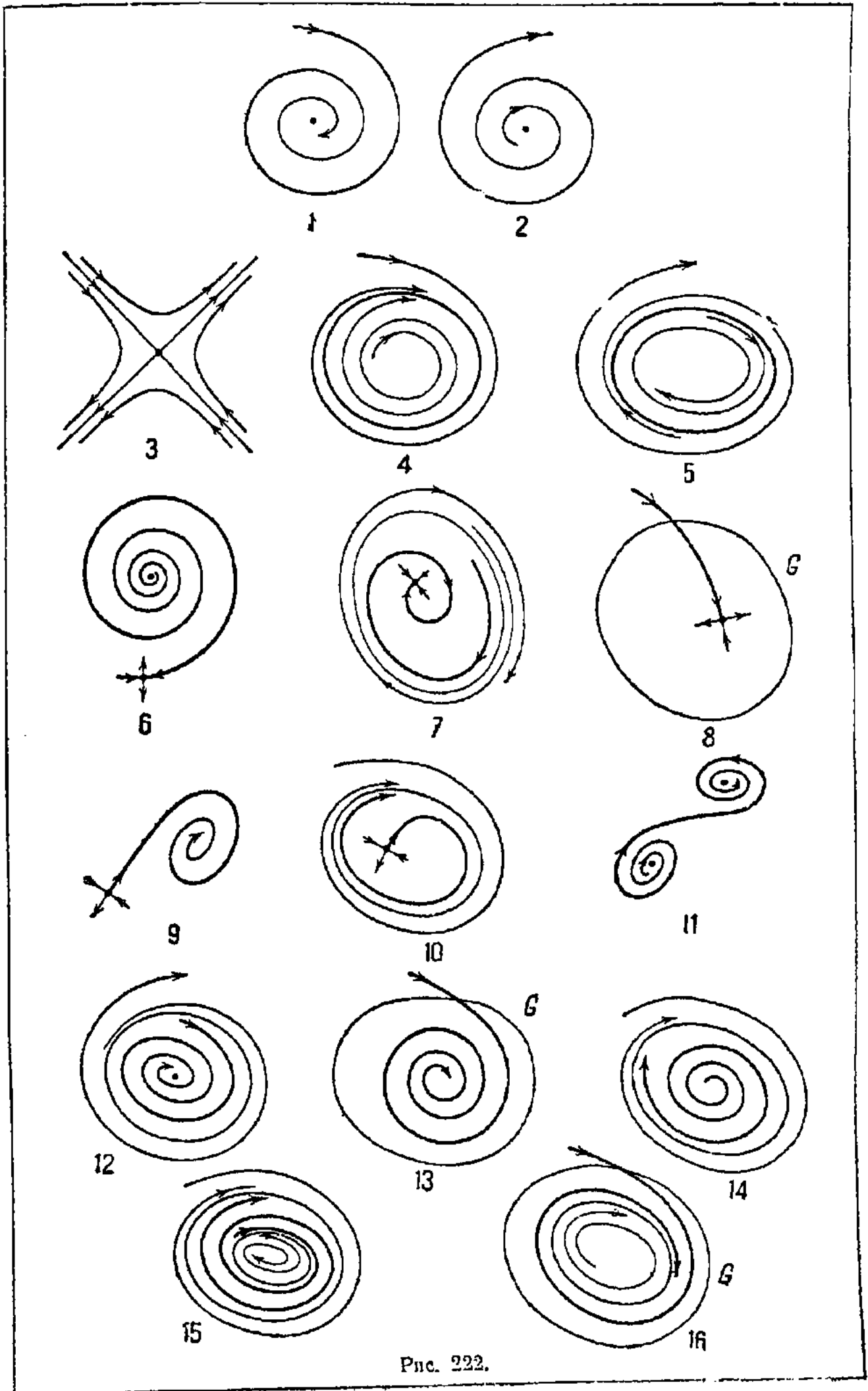


Рис. 222.

Рассмотрим какую-нибудь точку внутри области G и проходящую через нее траекторию ¹⁾. Исследуем сперва поведение траектории при $t \rightarrow +\infty$. Траектория эта по-предыдущему может быть:

1) особой точкой — тогда это состояние равновесия одного из трех возможных типов, 2) замкнутой траекторией — тогда это непременно предельный цикл, устойчивый или неустойчивый, 3) траекторией, стремящейся к устойчивому фокусу или узлу, 4) траекторией, стремящейся к устойчивому предельному циклу, 5) траекторией, являющейся устойчивым усом седла.

Рассмотрим теперь поведение той же траектории при $t \rightarrow -\infty$, если траектория не выходит из области G , и до момента выхода из области G , если при движении по «убывающему времени» траектория выходит из области G . Тут могут быть, не считая первых двух случаев (состояний равновесия и замкнутых траекторий), следующие возможности:

1) Траектория выходит из неустойчивого фокуса или из неустойчивого узла.

2) Траектория сворачивается с неустойчивого предельного цикла.

3) Траектория является неустойчивым усом седла.

4) Траектория входит при $t = \tau$ ($\tau < t_0$) в область G .

Таким образом, принимая во внимание характер обоих концов траекторий и поведение соседних, мы получаем 16 различных видов траекторий (на рис. 222 изображены эти виды траекторий под соответствующими номерами). В нижеследующей таблице эти виды траекторий разбиты на пять основных типов:

| | | | |
|---|---|---|------|
| I. Состояния равновесия | { | фокус (или узел) устойчивый | (1) |
| | | фокус (или узел) неустойчивый | (2) |
| | | седло | (3) |
| II. Предельные циклы | { | устойчивый | (4) |
| | | неустойчивый | (5) |
| III. Сепаратриса | { | сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла | (6) |
| | | сворачивающаяся с неустойчивого цикла | (7) |
| | | входящая при $t = \tau$ в область G | (8) |
| | | стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу | (9) |
| | | стремящаяся к устойчивому предельному циклу | (10) |
| IV. Траектория, стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу и | { | сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла | (11) |
| | | сворачивающаяся с неустойчивого цикла | (12) |
| | | входящая при $t = \tau$ в область G | (13) |
| V. Траектория, стремящаяся к устойчивому циклу и | { | сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла | (14) |
| | | сворачивающаяся с неустойчивого цикла | (15) |
| | | входящая при $t = \tau$ в область G | (16) |

¹⁾ В дальнейшем мы будем предполагать, что все траектории пересекают цикл без прикосновения, входя внутрь области G с возрастанием времени.

Мы будем в дальнейшем называть *особыми траекториями* траектории первых трех типов (т. е. состояния равновесия, предельные циклы и сепаратрисы); траектории остальных двух типов мы будем называть *обыкновенными траекториями*. Дальнейшее изложение покажет фундаментальное различие в поведении этих двух классов траекторий по отношению к соседним траекториям.

Пусть мы имеем какую-нибудь обыкновенную траекторию типа IV или V. Нетрудно видеть, анализируя возможные здесь случаи, что соседние траектории ведут себя так же, как и рассматриваемая обыкновенная траектория, т. е. траектории идут рядом и концы их имеют одинаковое поведение, т. е., например, скручиваются или накручиваются на один и тот же объект. Более того, оказывается, что изображающие точки, двигающиеся по траекториям в согласии с дифференциальными уравнениями, ведут себя весьма схожим образом.

Мы сейчас покажем, что *всякая обыкновенная траектория устойчива по Ляпунову* в обе стороны, т. е. и при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$, если она неограниченно продолжаема в обе стороны или по крайней мере в одну сторону, т. е. при $t \rightarrow +\infty$, если при убывающем t траектория выходит из области G .

Возьмем какую-нибудь обыкновенную траекторию, например траекторию № 11, свертывающуюся с неустойчивого фокуса и наворачивающуюся на устойчивый фокус (см. рис. 222). Докажем, что эта траектория устойчива по Ляпунову как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Возьмем какую-нибудь точку P на нашей траектории и рассмотрим движение изображающей точки, совпадающей с точкой P в начальный момент $t = t_0$. Рассматриваемое движение будет, как известно, устойчиво по Ляпунову, если, задав любое ϵ ($\epsilon > 0$), мы всегда можем отыскать вокруг точки P такую область δ , что все другие изображающие точки, начинающие свое движение в момент $t = t_0$ из этой области, *всегда* будут оставаться на расстоянии, меньшем ϵ , от изображающей точки исследуемого движения.

Чтобы доказать существование такой области, сделаем следующие два замечания, справедливость которых вытекает из предшествующего.

1. Изображающая точка, подошедшая достаточно близко к устойчивому фокусу, непременно будет к нему асимптотически приближаться при $t \rightarrow +\infty$.

2. Если задан конечный промежуток времени и задано расстояние, то всегда можно вокруг начального положения точки, изображающей исследуемое движение, выделить область таким образом, что все другие изображающие точки, начинающие свое движение в тот же момент из этой области, в течение заданного промежутка времени будут оставаться на расстоянии, меньшем заданного, от исследуемой изображающей точки.

Используем сперва первое замечание. Как мы знаем, вблизи устойчивого фокуса существует семейство эллипсов без контакта, в каждый из которых интегральные кривые могут только входить. Пусть нам задано ϵ ($\epsilon > 0$). Возьмем какой-нибудь эллипс без контакта (эллипс C), целиком лежащий в круге диаметра ϵ . Пусть его большая полуось

будет ϵ_1 , малая полуось ϵ_2 . Выберем затем среди семейства эллипсов без контакта второй эллипс (эллипс \bar{C}), который целиком лежал бы внутри предыдущего и был бы столь мал, чтобы его большая полуось $\bar{\epsilon}_1$ была меньше половины малой полуоси первого эллипса ϵ_2 ($\bar{\epsilon}_1 < \frac{\epsilon_2}{2}$) (рис. 223).

Как известно, мы всегда сможем отыскать такой эллипс, так как мы располагаем целым семейством вложенных друг в друга эллипсов, стягивающихся к особой точке — фокусу.

Очевидно, что исследуемая изображающая точка, начав двигаться из точки P , достигнет эллипса без контакта с осями $\bar{\epsilon}_1$ и $\bar{\epsilon}_2$ в *конечный* промежуток времени T .

Используем теперь второе замечание.

В согласии с этим замечанием вокруг точки P должна существовать такая область δ [$\delta = \delta(T, \bar{\epsilon}_1)$], что все изображающие точки, начавшие двигаться из этой области одновременно с исследуемой, останутся от этой последней на расстоянии, меньшем $\bar{\epsilon}_1$, в течение всего промежутка времени T .

Отсюда сразу следует устойчивость по Ляпунову рассматриваемого движения для $t \rightarrow +\infty$, так как эту область δ мы можем отождествить с той, о которой идет речь в определении устойчивости по Ляпунову. Действительно, к моменту $t = t_0 + T$ исследуемая точка достигнет эллипса \bar{C} ; расстояние между эллипсами C и \bar{C} больше $\bar{\epsilon}_1$; поэтому все изображающие точки, находившиеся в области δ в момент $t = t_0$, будут находиться к моменту $t = t_0 + T$

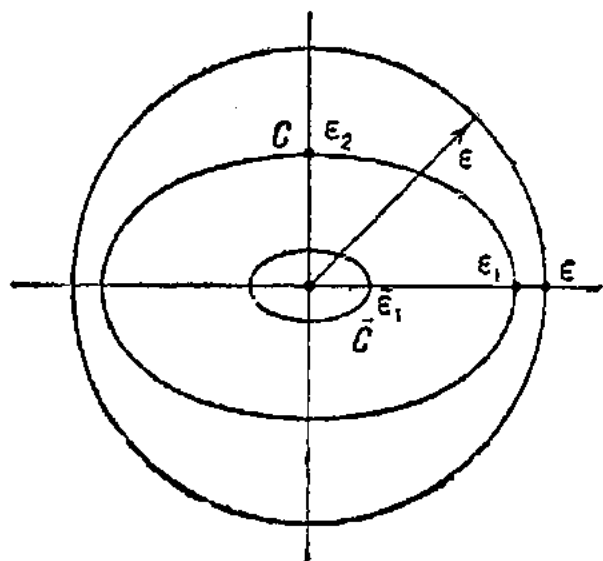


Рис. 223.

внутри эллипса C . Так как при дальнейшем движении изображающие точки не могут выйти из эллипса C , то расстояние между ними и исследуемой точкой всегда останется меньше ϵ .

То же рассуждение, в сущности без всяких изменений (заменив, например, t на $-t$), можно провести для $t \rightarrow -\infty$.

Так как у получившихся таким образом двух областей δ (одна для $t \rightarrow -\infty$, другая для $t \rightarrow +\infty$) непременно будет общая часть, то отсюда следует для рассматриваемого движения устойчивость по Ляпунову как для $t \rightarrow +\infty$, так и для $t \rightarrow -\infty$.

Несколько более сложное рассуждение, использующее существование циклов без прикосновения вокруг предельных циклов и существование «кривых Ляпунова», позволяет установить то же самое обстоятельство для траекторий, идущих от цикла к циклу, от фокуса к циклу и т. д.

Если наша траектория при убывающем t выходит из области G , то, само собой разумеется, мы уже не можем говорить об устойчивости

или неустойчивости по Ляпунову при $t \rightarrow -\infty$; вопрос о том, что близкие траектории будут себя во всех отношениях вести одинаково с исследуемой до выхода из области G , решается теоремой зависимости от начальных условий, ибо этот выход произойдет через конечный промежуток времени от начала движения.

Таким образом мы видим, что обыкновенные траектории и соответствующие им движения действительно ведут себя весьма похожим образом: каждая обыкновенная траектория весьма похожа на соседнюю траекторию. Нетрудно видеть, что это совершенно не имеет места для тех траекторий, которые мы причислили к особым.

Начнем с особых точек. Узлы и фокусы устойчивы по Ляпунову или при $t \rightarrow +\infty$, или при $t \rightarrow -\infty$, но никогда не могут быть устойчивыми и при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$; седло неустойчиво по Ляпунову и при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$. Предельные циклы в отношении устойчивости ведут себя так же, как фокусы и узлы, т. е. могут быть устойчивыми либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$. Сепаратрисы неустойчивы по Ляпунову по крайней мере в одну из сторон, так как изображающая точка 1, двигающаяся вдоль уса по направлению к особой точке (рис. 224), всегда отстанет от изображающих точек 2 и 3, двигающихся по соседним траекториям на расстояние, которым мы не сумеем распорядиться в отношении его величины, если время будет неограниченно расти.

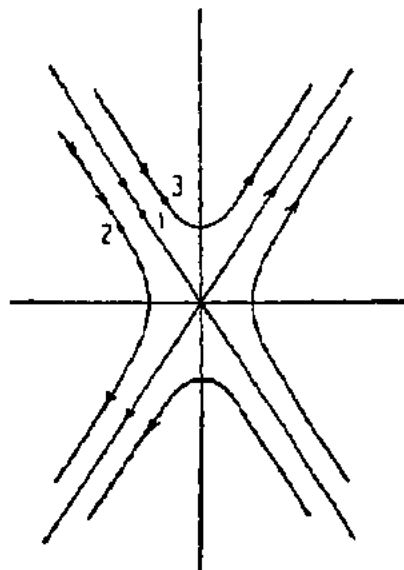


Рис. 224.

Можно показать, что обыкновенные траектории заполняют область, состоящую из отдельных связанных компонент, т. е. отдельных ячеек, содержащих траектории одинакового асимптотического поведения. Эти компоненты отделены друг от друга особыми траекториями, которые наряду с циклом без прикосновения являются границами всей области обыкновенных траекторий. Все элементарные ячейки (компоненты) можно разбить на два класса: на ячейки, примыкающие к циклу без прикосновения, и на внутренние ячейки. В каждой внутренней ячейке любая траектория устойчива по Ляпунову как для $t \rightarrow +\infty$, так и для $t \rightarrow -\infty$; каждая такая ячейка имеет в составе границы одну устойчивую по Ляпунову (для $t \rightarrow +\infty$) особую траекторию, являющуюся элементом притяжения или стоком, и одну неустойчивую по Ляпунову (опять для $t \rightarrow +\infty$) особую траекторию, являющуюся элементом отталкивания или источником. В каждой ячейке, примыкающей к циклу без контакта, любая траектория устойчива по Ляпунову для $t \rightarrow +\infty$; каждая такая ячейка имеет один устойчивый особый элемент — «сток». Таким образом фазовая плоскость (внутри цикла без прикосновения) разбивается особыми траекториями на элементарные ячейки, заполненные обыкновенными траекториями одинакового типа, стремящимися при $t \rightarrow \infty$ к единственному элементу притяжения.

В связи с этим можно указать на некоторые характерные различия между отдельными типами особых траекторий.

Фокусы (или узлы) служат источниками или стоками; хотя они и входят в границы компонент, но они не играют существенной роли при разбиении фазовой плоскости на компоненты. Состояния равновесия типа седла не могут быть элементами притяжения или отталкивания; как и узлы, они входят в границу компонент; не играя сами по себе существенной роли при разбиении фазовой плоскости на компоненты, они играют важную роль породителей сепаратрис. Сепаратрисы (усы седла) не могут служить ни источниками, ни стоками, они входят в границы компонент и играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на компоненты, являясь, так сказать, «водоразделами», отделяющими друг от друга траектории различного поведения. Предельные циклы играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на компоненты и одновременно служат элементами притяжения (или отталкивания).

В грубой системе особые траектории, которые мы будем также называть «особыми элементами», определяют в некотором смысле качественную картину протекания траекторий на фазовой плоскости¹). Именно, можно показать, что если мы знаем совокупность особых траекторий (в частности знаем направления движения по «отделяющим» особым элементам — сепаратрисам и предельным циклам) и знаем характер устойчивости элементов притяжения и отталкивания, то этих знаний нам достаточно для однозначного установления качественной картины поведения всех остальных траекторий на фазовой плоскости для грубой системы²).

Имея такие знания относительно фазовой плоскости рассматриваемого дифференциального уравнения, мы можем считать задачу качественного интегрирования законченной.

Мы постоянно говорим о «качественной картине фазовых траекторий» или, что то же самое, о «топологической структуре разбиения фазовой плоскости на траектории». Сформулируем теперь несколько точнее, что мы подразумеваем под этими понятиями, содержание которых выявляется всем предыдущим.

Две топологические структуры разбиения плоскости на траектории [заданные, например, двумя различными системами дифференциальных уравнений вида (A)] тождественны, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование плоскости в плоскость, при котором траектории переходят в траектории. Это определение эквивалентности двух структур, которым мы уже пользовались при определении грубых систем, является косвенным определением самого понятия топологической структуры разбиения фазовой плоскости на траектории. Именно, под топологической структурой разбиения

1) Это же обстоятельство имеет место и в негрубых системах; однако там особые траектории должны быть определены иначе — не при помощи устойчивости по Ляпунову, а при помощи так называемой «орбитной» устойчивости (см. Е. Леонтович и Майер [115]).

2) Само собою разумеется, что и знание особых траекторий нам существенно для этой цели лишь качественно, т. е. нам, например, важно знать их относительное расположение, но нам, например, совершенно не важно знать, будут ли циклы точными кругами или еще какими-либо простыми замкнутыми кривыми.

фазовой плоскости на траектории (или, иначе, под качественной картиной траекторий на фазовой плоскости) понимают те свойства совокупности фазовых траекторий, которые сохраняются при взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях плоскости в плоскость, при которых каждая траектория переходит в траекторию. Например, одним из таких свойств, которые сохраняются при преобразованиях, является существование особых элементов, число особых элементов различных типов и т. д. Однако в дальнейшем мы иногда будем в более узком смысле понимать тождественность двух топологических структур разбиения фазовой плоскости на траектории. Именно, мы будем считать тождественными две структуры только тогда, когда существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование плоскости в плоскость, при котором траектории переходят в траектории, и сохраняется ориентация (направление вращения) на всех замкнутых траекториях.

Точно так же, как о тождественности двух структур разбиения всей плоскости, мы можем говорить о тождественности топологических структур двух отдельных ячеек или компонент. При этом мы будем отдельные ячейки или компоненты всегда рассматривать вместе с границами. Мы скажем, что две ячейки (вместе с границами) топологически эквивалентны или принадлежат к одному и тому же топологическому типу, если существует такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование плоскости в плоскость, при котором все точки одной ячейки (вместе с границами) соответствуют точкам другой ячейки (вместе с границами), каждой траектории одной ячейки соответствует определенная траектория другой и при этом так, чтобы ориентация замкнутых кривых сохранялась¹⁾. Можно показать, что в грубых системах мы имеем определенное число топологических типов элементарных ячеек. Не проводя полностью исследования возможных типов, разберем ряд простых случаев. Начнем классификацию внутренних ячеек, не примыкающих к циклу без прикосновения; при этом мы не будем перечислять те ячейки, которые получаются из рассматриваемых путем замены t на $-t$ (при таком изменении времени меняются направления движения по «отделяющим» траекториям и устойчивость элементов притяжения и отталкивания). Возьмем какую-нибудь ячейку, т. е. возьмем отдельную связную компоненту и возьмем границу этой компоненты. Здесь могут быть следующие два случая:

- 1) седло не входит в границу,
- 2) седло входит в границу.

Рассмотрим первый случай. Если седло не входит в границу, то отсюда следует, что в границу непременно должен входить предельный цикл, так как плоскость не может разбиваться на компоненты состояниями равновесия, а особые траектории, из которых может состоять граница, суть сепаратрисы (и тогда непременно есть седло), предельные

¹⁾ Таким образом здесь идет речь не о внутренней топологической эквивалентности (гомеоморфизме), а о топологической эквивалентности в пространстве (изотопии), в данном случае в плоскости.

циклы и состояния равновесия. Если имеется предельный цикл, составляющий часть границы, то может быть опять два случая:

I. Траектории рассматриваемой компоненты лежат вне (снаружи) цикла.

II. Траектории рассматриваемой компоненты лежат внутри цикла. В первом случае (так как седла нет) должен быть еще один (внешний) предельный цикл. Так как очевидно, что в этом случае никаких

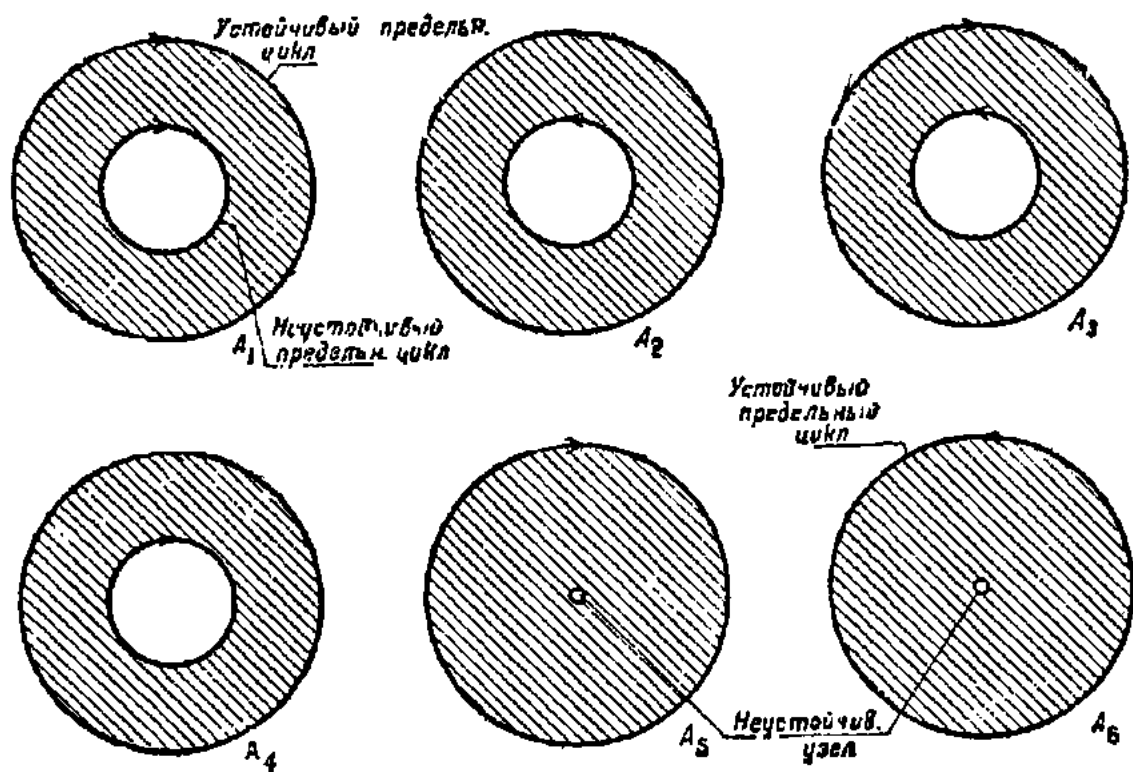


Рис. 225а.

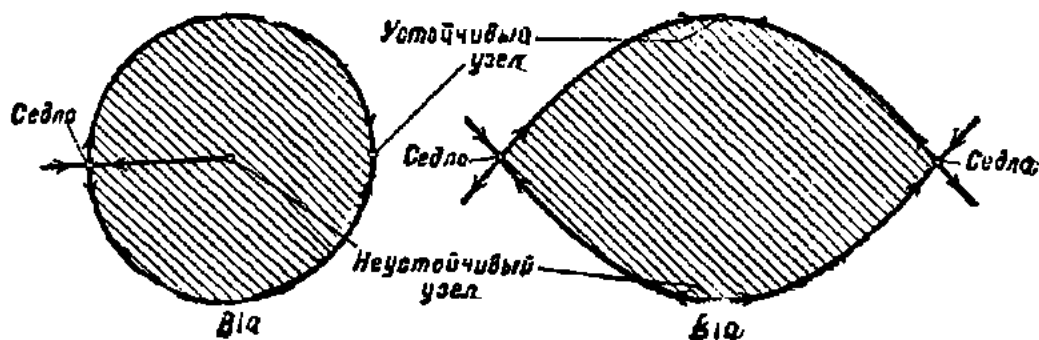


Рис. 225б.

других дозволённых особых траекторий не может входить в границу, то, принимая во внимание направление вращения и устойчивость, мы получим в этом случае четыре различных типа областей: $A1a_1$, $A1a_2$, $A1a_3$, $A1a_4$ (рис. 225а, случаи A_1 , A_2 , A_3 , A_4). Во втором случае могут быть два варианта: либо опять внутри предельный цикл — тогда мы опять возвращаемся к тем же типам, либо внутри фокус (или узел) — тогда имеем, учитывая направление вращения и устойчивость, два типа ячеек $A1b_1$ и $A1b_2$ (рис. 225а, случаи A_5 , A_6):

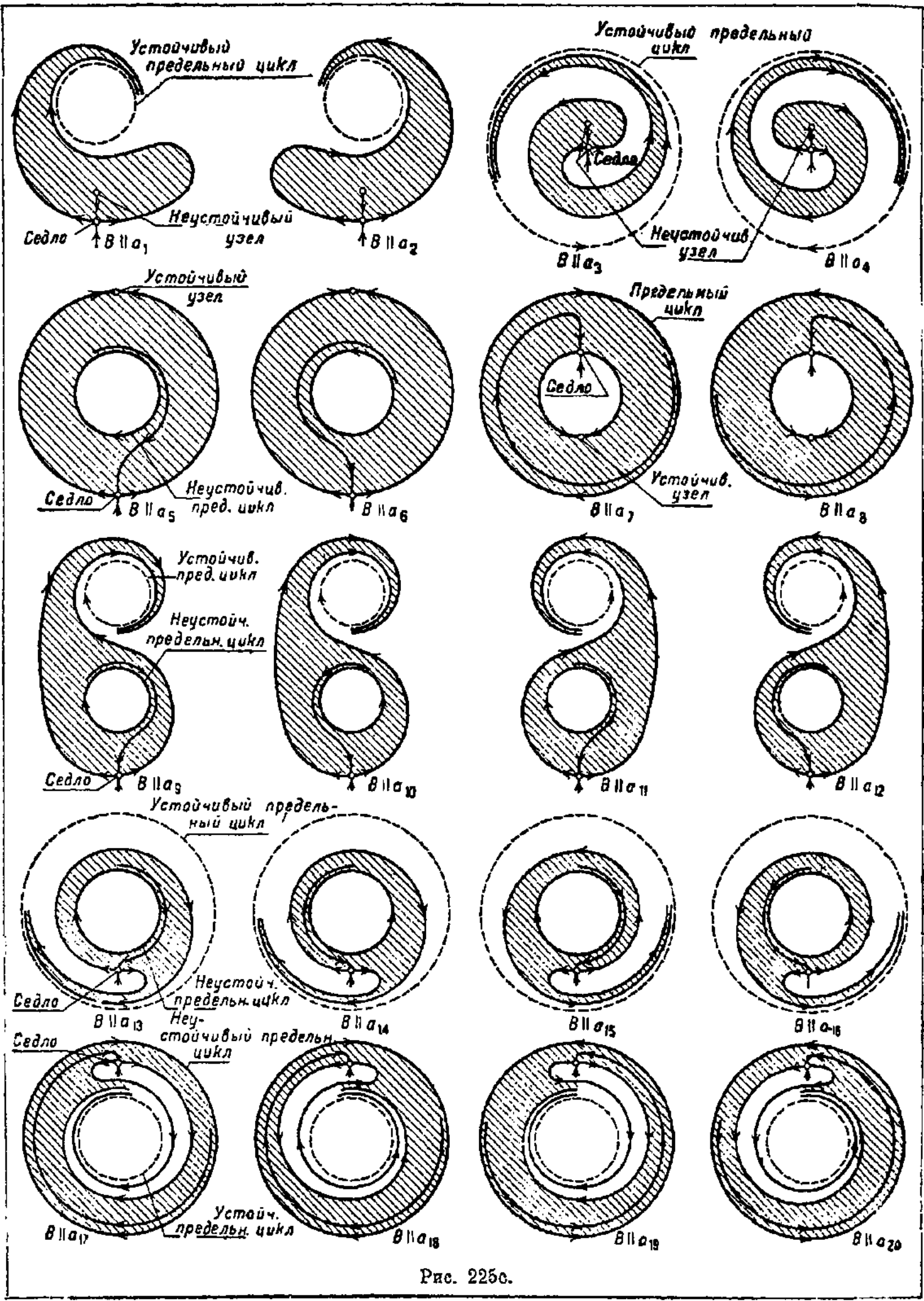


Рис. 225с.

Теперь вернемся ко второму основному случаю, когда седло входит в границу. Этот случай также придется разбить на два класса:

VI — предельный цикл не входит в границу,

VII — предельный цикл входит в границу.

Рассмотрим первый класс *VI*, когда предельных циклов нет, а в границу входит седло. Как известно, седло имеет четыре уса — два

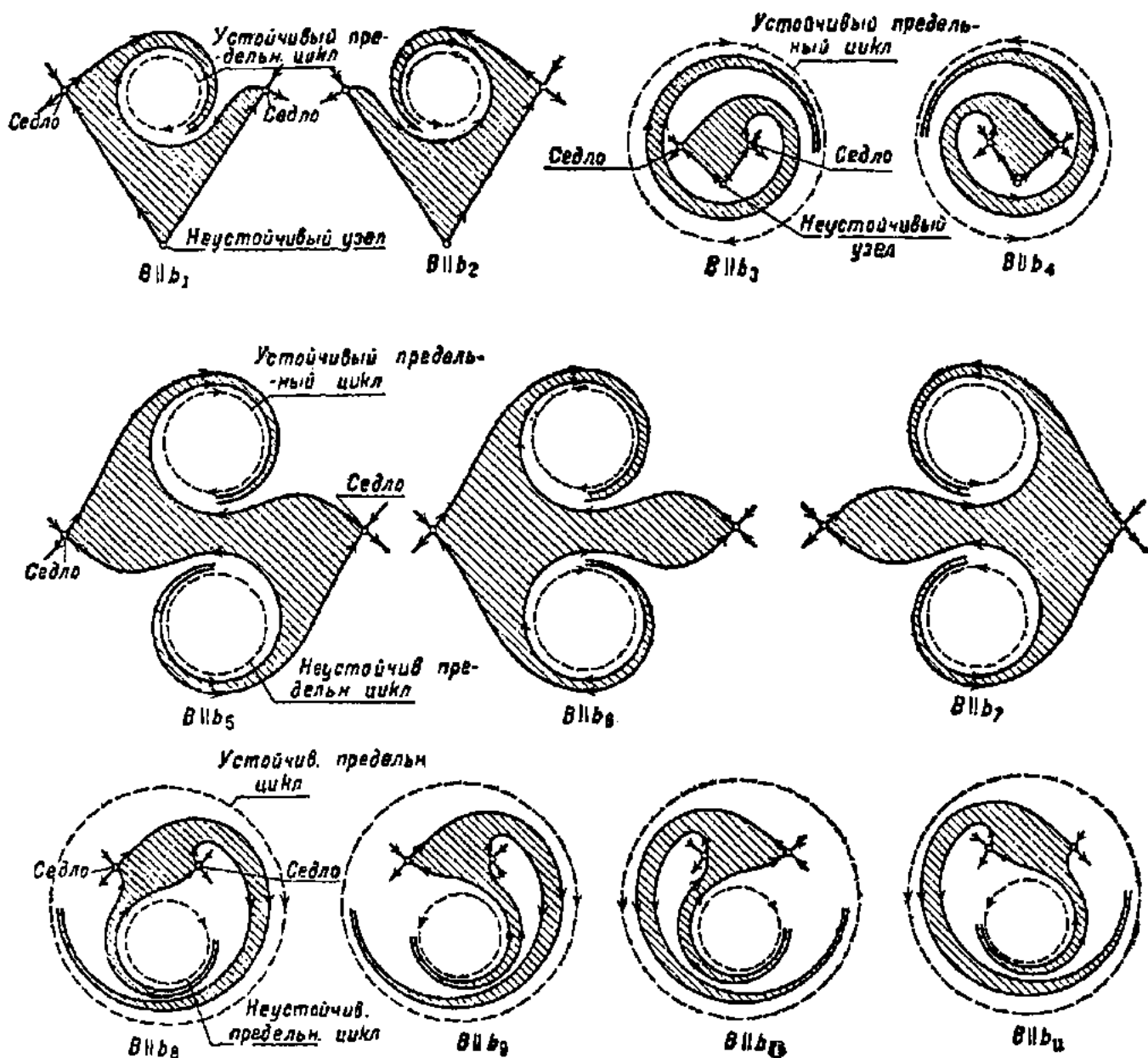


Рис. 225d.

устойчивых и два неустойчивых. Предположим сперва (случай *VIa*), что в границу входят два уса одинаковой устойчивости, например два неустойчивых. Так как каждый из этих усов принадлежит границе области и не может (в силу грубости) идти в седло, то его асимптотическое поведение такое же, как и у других траекторий, т. е. оба неустойчивых уса седла стремятся к устойчивому элементу, т. е. в нашем случае — к устойчивому узлу (или фокусу). Мы получаем таким образом замкнутую кривую *C*, состоящую из седла, двух неустойчивых усов и устойчивого фокуса (или узла). Рассматриваемая нами связная компонента должна лежать или вся вне этой замкнутой кривой, или

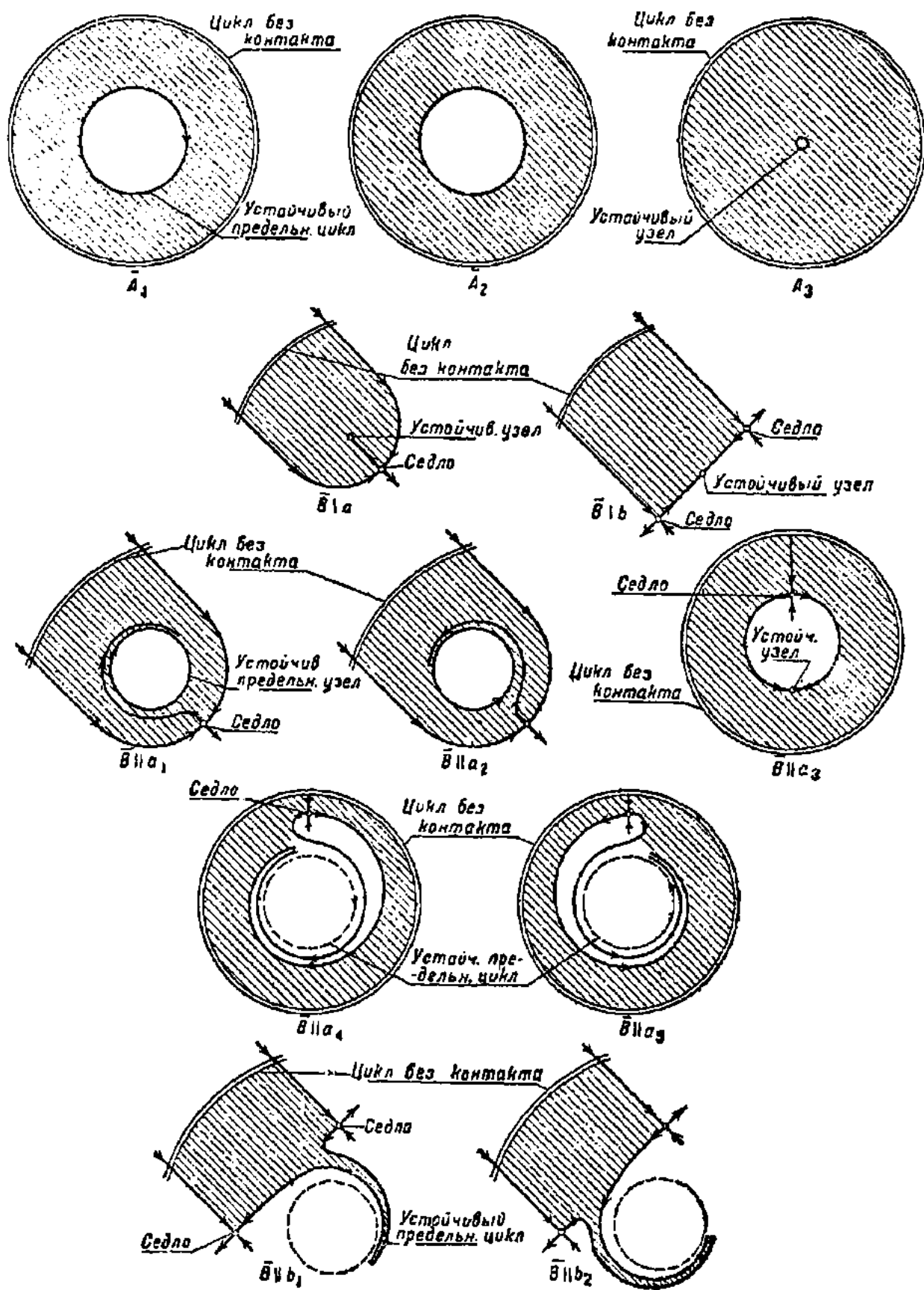


Рис. 225е.

вся внутри нее. Пусть она лежит вся внутри. Посмотрим, что еще тогда может входить в границу. Очевидно, что тот устойчивый ус седла, который лежит внутри кривой C , также входит в границу. Он идет от неустойчивого элемента — неустойчивого узла (или фокуса), который, как и следовало ожидать, непременно лежит внутри кривой C . Таким образом в границу рассматриваемой компоненты непременно входят соответственно расположенные три уса седла и три состояния равновесия. Может быть еще что-либо, входящее в границу. Так как мы предположили, что предельный цикл не входит в границу, так как граница может содержать лишь один источник и один сток, то в границу могут входить лишь седла с усами. Докажем, что этого не может быть, что граница рассматриваемой связанной компоненты исчерпывается перечисленными шестью особыми элементами. Будем доказывать от противного. Предположим, что где-то внутри кривой C у нас имеется седло, входящее в границу. Но раз седло входит в границу, то есть и усы, входящие в границу.

Легко видеть, что если один из усов входит в границу, то непременно один из смежных с ним усов также входит в границу. Таким образом должен быть один устойчивый и один неустойчивый ус, которые входят в границу. Так как эти усы непременно стремятся к тем же устойчивому и неустойчивому элементам, то наша компонента разбивается на две части таким образом, что кривая C уже не может входить в границу нашей связанной компоненты. Мы пришли к противоречию. В рассматриваемом варианте никаких других особых элементов в границу входить не может.

Мы еще оставили без рассмотрения другой вариант, когда наша связанная компонента целиком лежит вне кривой C , которая входит в его границу. Легко показать, рассуждая совершенно аналогично предыдущему, что этот случай также приведет нас к противоречию. Таким образом случай VIa осуществляется только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 225b, фиг. VIa).

Предположим теперь (случай VIb), что в границу входят два рядом стоящих уса разной устойчивости — один устойчивый и один неустойчивый, а остальные два уса не входят в границу рассматриваемой компоненты. Так как усы не могут идти из седла в седло, то непременно устойчивый ус идет из неустойчивого узла (или фокуса), а неустойчивый ус идет в устойчивый узел (или фокус). Так как по предположению остальные усы рассматриваемого седла не входят в границу, то непременно в границу входит еще одно седло. Здесь, очевидно, возможны два случая поведения усов второго седла (см. рис. 226). Случая I быть не может, так как мы уже рассматривали тот вариант, когда два уса одинаковой устойчивости входят в границу компоненты, и показали, что тогда второе седло не входит в границу. Остается случай II . Здесь опять можно сделать два предположения — либо наша компонента лежит целиком внутри замкнутой кривой C_1 , образованной четырьмя усами и четырьмя состояниями равновесия, либо лежит целиком вне. Рассмотрим первое предположение, — компонента лежит целиком внутри кривой C_1 . Покажем, что никаких других особых траекторий в границу рассматриваемой ячейки входить не

может. Действительно, единственные особые траектории, которые еще могут войти в границу, — это сепаратрисы и, следовательно, седла (предельные циклы не могут входить в границу по предположению; источник и сток уже имеются). Но если в границу войдет седло, то непременно войдут и два соседних уса. Эти усы обязательно пойдут в устойчивый и неустойчивый узлы (или фокусы) и разобьют нашу компоненту на две части таким образом, что кривая C_1 уже не может целиком входить в границу связанной компоненты. Мы пришли к противоречию, и, следовательно, требуемое доказано. Нетрудно также опровергнуть предположение, что наша компонента лежит целиком вне кривой C_1 . Таким образом случай VIb осуществляется опять только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 225b, фиг. VIb).

Мы не будем исследовать подробно возможные топологические типы для наиболее сложного случая VII , когда в границу компоненты входят

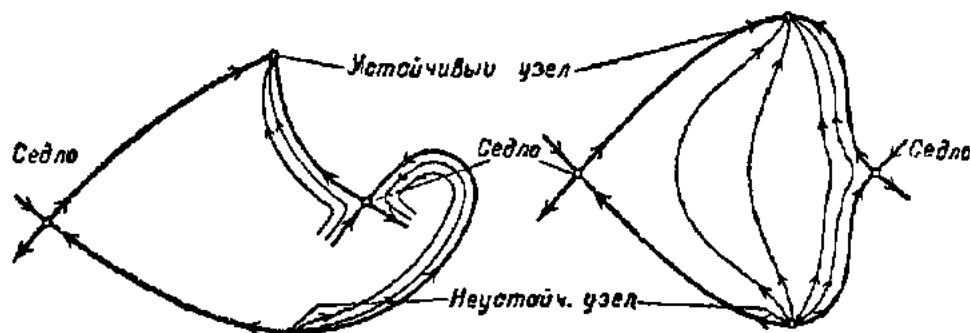


Рис. 226.

и предельные циклы и седла. Возможные здесь случаи приведены на рис. 225c и 225d. Заметим, что для случаев VII в известном смысле прототипами служат случаи VI . Именно, случаи VII получаются из случаев III путем соответствующей замены одного или двух узлов другими элементами притяжения или отталкивания — предельными циклами; количество различных типов при этом сильно возрастает вследствие того, что один цикл может располагаться внутри или вне другого и ввиду необходимости различать на циклах направление вращения. Также без специального рассмотрения мы оставим случаи ячеек, примыкающих к циклу без прикосновения. Случаи, которые могут здесь осуществляться, изображены на рис. 225e.

После рассмотрения различных типов элементарных ячеек в грубых системах возникает очевидный вопрос о «законах совместного существования» элементарных ячеек различных типов. Мы не будем здесь касаться этого, еще не решенного полностью вопроса. Поясним только одно понятие, которое имеет к этому вопросу некоторое отношение. Именно, иногда бывает удобно пользоваться понятием *области устойчивости в большом* данного элемента притяжения; под такой областью устойчивости в большом понимается тогда совокупность всех элементарных ячеек, имеющих рассматриваемый особый элемент своим элементом притяжения. Этим замечанием мы заканчиваем рассмотрение грубых систем. В § 12 мы скажем еще несколько слов о зависимости грубых систем от параметра.

§ 11. Индексы Пуанкаре

Хотя вопрос о совместном существовании отдельных элементарных ячеек полностью не решен даже для грубых систем, однако существуют фундаментальные общие законы сожительства состояний равновесия различной природы и замкнутых траекторий, сформулированные Пуанкаре и не связанные с грубостью рассматриваемой системы. Для формулировки этих законов необходимо ввести понятие об индексе замкнутой кривой по отношению к векторному полю. Это понятие индекса будет иметь значение и для других целей, в частности для изучения зависимости качественной картины траекторий от параметра.

Рассмотрим фазовую плоскость динамической системы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (A)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ мы будем предполагать, для сокращения рассуждений, аналитическими на всей фазовой плоскости.

Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь простую замкнутую кривую N , не проходящую через состояния равновесия. Возьмем на этой кривой какую-нибудь точку S и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной k , проходящей через эту точку фазовой траектории (рис. 227а). Если рассматриваемую точку S

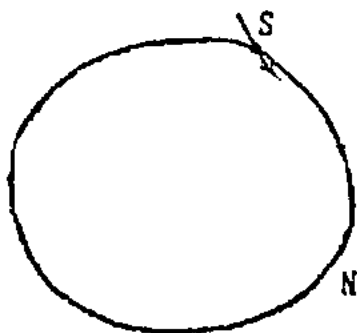


Рис. 227а.

мы будем двигать вдоль кривой N , вектор касательной к фазовой траектории будет вращаться. Когда точка S сделает полный оборот по замкнутой кривой N и вернется на прежнее место, то вектор сделает некоторое целое число оборотов, т. е. повернется на $2\pi j$, где j — целое число. Направление вращения вектора мы будем считать положительным, когда оно совпадает с направлением, в котором точка S обходит замкнутую кривую N , для определенности можно, например, условиться, что точка S всегда обходит кривую N , совершая оборот против часовой стрелки. Таким образом j может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Целое число j в известном смысле не зависит от формы замкнутой кривой N . Действительно, если вид кривой непрерывно изменяется, то и угол, на который поворачивается вектор, может изменяться тоже только непрерывно (если наша замкнутая кривая при изменении не проходит через особые точки); следовательно, он вообще не меняется, так как он может принимать только дискретный ряд значений. Поэтому все другие замкнутые кривые, если они содержат только те же особые точки, что и кривая N , дадут то же число j . Целое число j носит название индекса замкнутой кривой N по отношению к рассматриваемому векторному полю. Окружим простой замкнутой кривой N какое-нибудь одно состояние равновесия, какую-нибудь одну особую точку. Как мы видели, если эта замкнутая кривая не содержит других особых

точек, то индекс не зависит от формы этой кривой и, следовательно, определяется характером особой точки. Поэтому индекс такой замкнутой кривой можно отнести к самой особой точке и говорить об индексе Пуанкаре рассматриваемой особой точки.

Непосредственным рассмотрением (рис. 227b) нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла и фокуса равны $+1$, индекс Пуанкаре для седла равен -1 .

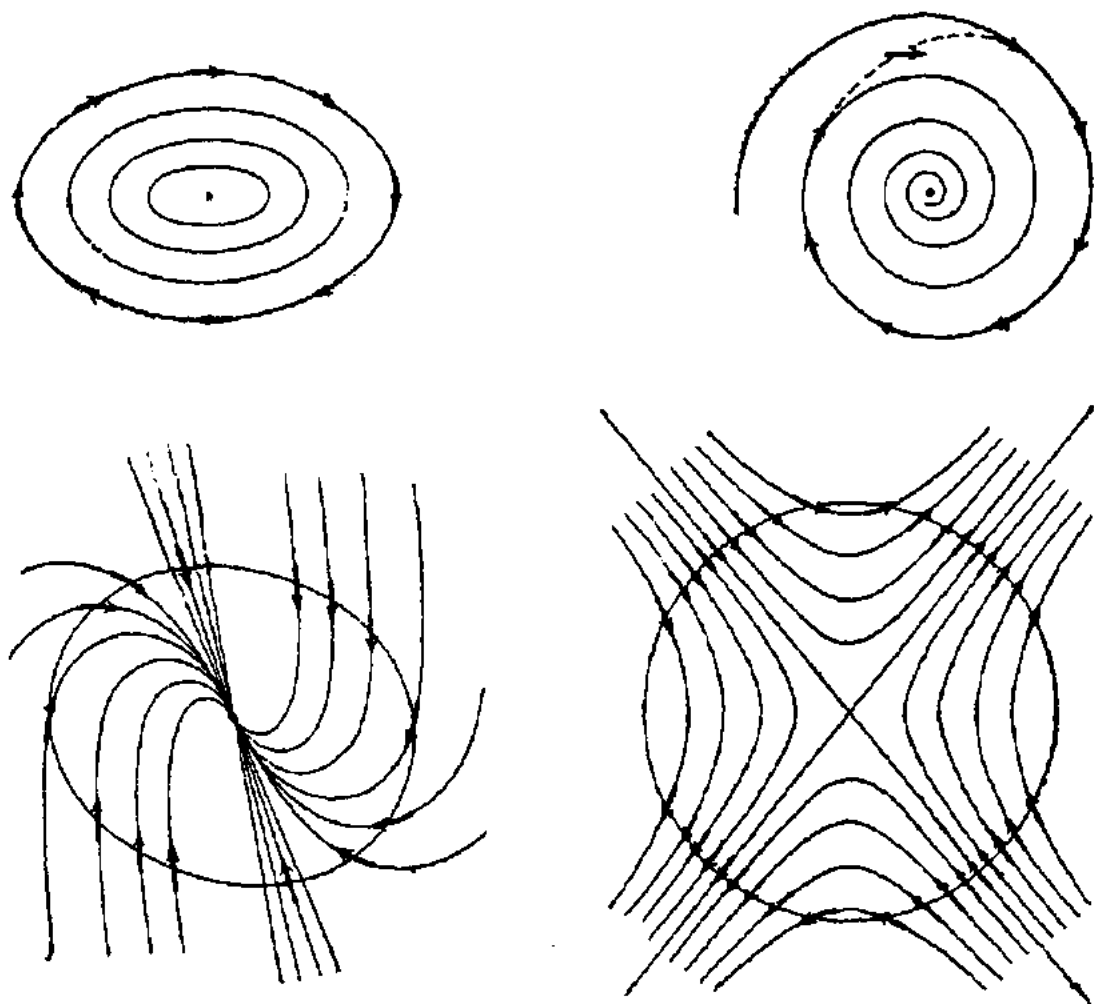


Рис. 227b.

Также непосредственным рассмотрением нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) индекс замкнутой кривой, не содержащей внутри себя ни одной особой точки, равен нулю (рис. 227c);

2) индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек¹⁾;

1) Рассмотрим замкнутую кривую N , содержащую несколько особых точек. Разобьем область, ограниченную кривой N при помощи приведения внутренних кривых «перегородок», на меньшие области, с таким расчетом, чтобы каждая из получившихся областей содержала по одной особой точке. Тогда угол, на который повернется вектор при обходе кривой N , равен сумме углов, на которые повернутся векторы при обходе отдельных областей, если все эти области обходить в одном и том же направлении; углы поворота, получающиеся при обходе внутренних перегородок, взаимно уничтожаются, так как каждая такая перегородка обходится дважды — один раз в прямом, другой раз в обратном направлении. Отсюда вытекает утверждение 2).

3) индекс замкнутой кривой, являющейся одновременно замкнутой траекторией системы (A), равен $+1$ (см. рис. 227b — случай центра), так как тогда направление вектора каждый раз совпадает с направлением касательной к кривой N ;

4) индекс замкнутой кривой, вдоль которой векторы, определенные системой (A), направлены либо все внутрь, либо все наружу, равен $+1$ (см. рис. 227b — случай узла).

Эти утверждения, полученные путем непосредственного рассмотрения, т. е. в сущности путем рассмотрения отдельных примеров и некоторых соображений о непрерывности, опирающихся на геометрическую интуицию¹⁾, могут быть строго доказаны, например аналитически. Прежде чем перейти к выводам из этих утверждений, дадим несколько примеров такого аналитического рассмотрения.

Нетрудно видеть, что индекс замкнутой кривой N по отношению к векторному полю, определяемому системой (A)²⁾, может быть выражен криволинейным интегралом:

$$i = \frac{1}{2\pi} \oint_N d \left\{ \operatorname{arctg} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \oint_N \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2}.$$

Это — криволинейный интеграл от полного дифференциала; следовательно, если внутри области, охватываемой кривой N , вдоль которой производится интегрирование, соответствующие подинтегральные функции и их производные непрерывны, то интеграл равен нулю. Отсюда сразу и строго получается наше первое утверждение о том, что индекс замкнутой кривой N , внутри которой нет особых точек, равен нулю³⁾, так как при наших предположениях о правых частях системы (A) непрерывность подинтегральных функций и их производных может нарушаться лишь в тех точках, где одновременно $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Вычислим теперь аналитически индекс Пуанкаре для особой точки, т. е. вычислим индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту особую точку и не содержащей никаких других особых точек. При этом будем предполагать, что для этой точки $q \neq 0$.

1) За исключением утверждения 2), которое можно считать обоснованным соображениями, данными в сноске.

2) Следует отметить, что индекс не учитывает направления движения по фазовым траекториям; например, устойчивый узел и неустойчивый узел имеют один и тот же индекс: $+1$.

3) Обратное утверждение не имеет места, так как могут быть особые точки высшего порядка (для которых $q = 0$) с индексом, равным нулю.

Чтобы не менять обозначений, предположим, что рассматриваемая особая точка представляет собою начало координат, так что

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y),$$

где P_2 и Q_2 — ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по x и y .

Докажем сперва, что при вычислении индекса особой точки (если $q \neq 0$) мы можем отбросить члены высших порядков, т. е. P_2 и Q_2 . Так как по-предыдущему индекс не зависит от формы кривой, то можно при вычислении индекса взять за кривую N окружность достаточно малого радиуса ρ ($\rho > 0$).

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, преобразуем криволинейный интеграл в обычный определенный интеграл:

$$j = I(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \varphi + b \sin \varphi) d(c \cos \varphi + d \sin \varphi) - (c \cos \varphi + d \sin \varphi) d(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + \rho F(\rho, \varphi) d\varphi}{(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 + (c \cos \varphi + d \sin \varphi)^2 + \rho G(\rho, \varphi)},$$

где $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$ — степенные ряды по ρ (начинающиеся с членов нулевого измерения по ρ), коэффициенты которых — периодические функции φ .

Здесь через $I(\rho)$ мы обозначили определенный интеграл, стоящий в правой части. Точнее следовало бы написать: $j = I(\rho)$ для $\rho > 0$, так как криволинейный интеграл, с которым связано понятие индекса, имеет смысл лишь для $\rho > 0$. Однако обратим внимание на следующее. Определенный интеграл $I(\rho)$ является непрерывной функцией ρ для достаточно малых ρ ($q \neq 0$). Поэтому $\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = I(0)$. С другой стороны, мы

знаем, что криволинейный интеграл не зависит от ρ для достаточно малых ρ . Отсюда следует, что, для достаточно малых ρ , $I(\rho) = I(0)$ и, наконец, что $j = I(0)$:

$$j = I(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \varphi + b \sin \varphi) d(c \cos \varphi + d \sin \varphi) - (c \cos \varphi + d \sin \varphi) d(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}{(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 + (c \cos \varphi + d \sin \varphi)^2} d\varphi.$$

Таким образом показали, что при вычислении индекса Пуанкаре для особой точки ($q \neq 0$) можно отбросить нелинейные члены. Чтобы вычислить $I(0)$, удобно применить следующий прием. Перейдем снова к обычным координатам и запишем наше выражение опять в виде криволинейного интеграла:

$$j = I(0) = \oint_N \frac{(ax + by) d(cx + dy) - (cx + dy) d(ax + by)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

где N — любая простая замкнутая кривая, охватывающая начало, так как для линейного уравнения, получающегося после отбрасывания нелинейных членов, единственная особая точка — начало координат.

Прием заключается в том, что за такую замкнутую кривую выбирают эллипс Γ^1):

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1;$$

тогда, как показывают несложные выкладки,

$$j = I(0) = \frac{q}{2\pi} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx),$$

где

$$q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

или в силу известного выражения для площади через криволинейный интеграл

$$j = I(0) = \frac{q}{\pi} S,$$

где S — площадь эллипса. Так как $S = \frac{\pi}{|q|} \cdot 2$, то

$$j = \frac{q}{|q|}.$$

Отсюда сразу следует, что индекс Пуанкаре для узла, фокуса и центра равен $+1$, а для седла равен -1 , т. е. те же самые результаты, которые мы получили из непосредственного рассмотрения. Мы не будем дальше проводить аналитических рассуждений, с помощью которых можно было бы обосновать остальные наши утверждения; заметим только, что второе утверждение прямо получается из основных свойств криволинейного интеграла.

Перейдем теперь к следствиям, которые вытекают из теории индексов в отношении законов сожительства замкнутых фазовых траекторий и состояний равновесия различной природы.

¹⁾ Дискриминант $\Delta = q^2 > 0$.

²⁾ Возьмем эллипс $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$. Чтобы вычислить площадь этого эллипса, перейдем от прямоугольных координат x, y к координатам $\xi = ax + by, \eta = cx + dy$, которые также будем интерпретировать как прямоугольные координаты.

Тогда эллипс $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$ деформируется в круг $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Площадь этого круга $S_1 = \pi$.

С другой стороны очевидно, что

$$S_1 = S \left| D \left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ x, y \end{matrix} \right) \right|,$$

где $D \left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ x, y \end{matrix} \right)$ — соответствующий якобиан. Так как

$$D \left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ x, y \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = q,$$

то $S_1 = S \cdot |q|$, откуда площадь

$$S = \frac{\pi}{|q|}$$

Следствие 1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, так как индекс такой траектории по-прежнему равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.

Следствие 2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, не может быть также никакая особая точка с индексом, отличным от $+1$.

Следствие 3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся только такие особые точки, для которых $g \neq 0$, то число таких особых точек всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек¹⁾.

§ 12. Зависимость качественной картины траекторий от параметра

Предположим, что наша динамическая система, отображаемая уравнениями (A), зависит от некоторого параметра λ , могущего принимать те или другие фиксированные значения. Таким параметром в реальной системе может быть, например, коэффициент взаимной индукции, сопротивление контура и т. д.

Нашей задачей будет изучение изменения качественной картины траекторий на фазовой плоскости при изменении параметра. С этим вопросом тесно связан другой вопрос. Именно, пусть мы имеем для какого-нибудь заданного значения параметра определенное движение и пусть изображающая точка описывает у нас определенную траекторию на фазовой плоскости. Начнем затем в течение некоторого времени изменять, например увеличивать, параметр, а затем закрепим его на новом постоянном значении. Фазовая плоскость в конце процесса (хотя бы с количественной точки зрения) у нас другая, чем в начале процесса. По какой из «новых» фазовых траекторий будет двигаться теперь изображающая точка? Очевидно, что в общем случае ответить на этот вопрос нельзя, не зная, как (в зависимости от времени) мы меняли параметр, не зная решений соответствующих неавтономных уравнений. Однако в целом ряде случаев *достаточно медленно* изменения параметра (медленного в известном смысле по сравнению со скоростью движения изображающей точки по фазовой траектории); такой ответ дать все же можно. Для консервативных систем ответ на этот вопрос, как мы уже упоминали, дается теорией адиабатических инвариантов; для грубых же систем, если система при таком изменении параметра остается все время грубой, ответ дается мгновенно: изображающая точка все время находится вблизи одного и того же элемента притяжения²⁾. Если же начальное и конечное значения

¹⁾ Заметим, что те же выводы (на основании утверждения 4) могли быть сделаны для любой замкнутой кривой, являющейся циклом без прикосновения. Отсюда, в частности, вытекает следующее: если бесконечность абсолютно устойчива или абсолютно неустойчива, то сумма индексов всех особых точек, находящихся на конечном расстоянии, равна $+1$.

²⁾ Дело в том, что в грубой системе всякое движение стремится к соответствующему элементу притяжения, так что при достаточно медленных изменениях параметра всегда можно считать, что изображающая точка находится в непосредственной бли-

параметра соответствуют грубой системе, но не для всех промежуточных значений параметра система оставалась грубой, то, вообще говоря, мы не сможем указать, как будет двигаться изображающая точка после закрепления параметра. Однако и в таких случаях иногда можно дать однозначный ответ, проследив изменения соответствующей области устойчивости в большом. Примерами такого однозначного ответа могут служить обычные случаи мягкого и жесткого возникновения колебаний (см. гл. VII данной книги), когда изменение качественной картины однозначно определяет переход изображающей точки с одного элемента притяжения на другой.

1. Основные теоремы. Понятие бифуркационного значения параметра.

Сформулируем основные теоремы, необходимые для исследования изменения траекторий при изменении параметра.

ТЕОРЕМА I¹⁾. Пусть мы имеем динамическую систему:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y; \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y; \lambda), \quad (\alpha)$$

где $P(x, y; \lambda)$ и $Q(x, y; \lambda)$ — аналитические функции x и y в некоторой области G_1 (не зависящей от λ) и аналитические функции параметра λ в области $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Пусть x_0, y_0 — точка области G_1 . Тогда при всех значениях λ из указанного промежутка решение

$$x = \varphi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda), \quad y = \psi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda), \quad (\beta)$$

принимает при $t = t_0$ значения $x = x_0, y = y_0$, существует для всех значений t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < b$, где $b > 0$ есть некоторое, не зависящее от λ число²⁾. Функции φ и ψ для всех значений λ и t в указанных промежутках являются голоморфными функциями этих переменных.

Это решение может быть продолжено для значений $t > t_0 + b$ (или $t < t_0 - b$), если точка, соответствующая значению $t_0 + b$ (или $t_0 - b$), лежит в области G_1 ; в частном случае оно может быть неограниченно продолжаемо.

Соединяя эту теорему с теоремой о непрерывной зависимости от начальных условий, мы получим еще одно предложение; в формулировке этого предложения мы будем говорить о неограниченно продолжаемом решении, ввиду того что для нас такие решения будут представлять основной интерес.

ности к элементу притяжения. С другой стороны, так как система остается грубой, то топологическая структура не меняется; мы можем проследить за элементом притяжения, который не может исчезнуть или изменить свой характер.

1) См., например, H. Poincaré, Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, т. I.

2) Выделим вокруг точки x_0, y_0 прямоугольник, целиком лежащий внутри области G_1 , определяемой неравенствами: $|x - x_0| < A, |y - y_0| < B$. Пусть M таково, что при всех λ , удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, $|P(x, y; \lambda)| < M, |Q(x, y; \lambda)| < M$ в этом прямоугольнике. Тогда b не меньше наименьшего из чисел $\frac{A}{M}, \frac{B}{M}$.

ТЕОРЕМА II. *Предположим, что при значении $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$) решение*

$$x = \varphi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda_0), \quad y = \psi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda_0), \quad (\alpha)$$

принимая значения x_0, y_0 при $t = t_0$, продолжаемо для всех значений $t > t_0$ (или $t < t_0$) и остается в области G_1 . Пусть

$$x = \varphi(\xi, \eta; t - t_0; \lambda), \quad y = \psi(\xi, \eta; t - t_0; \lambda) \quad (\beta)$$

— решение, соответствующее некоторому значению λ из рассматриваемого промежутка и принимающее значение $x = \xi, y = \eta$ при $t = t_0$. Тогда, каково бы ни было ε и T , всегда можно выбрать такое $\delta > 0$ [$\delta = \delta(\varepsilon, T)$], чтобы решение (β) существовало для всех значений $t, t_0 \leq t \leq T$ (или $T \leq t \leq t_0$), и при этих значениях t удовлетворяло бы условию:

$$\begin{aligned} |\varphi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda_0) - \varphi(\xi, \eta; t - t_0; \lambda)| &< \varepsilon, \\ |\psi(x_0, y_0; t - t_0; \lambda_0) - \psi(\xi, \eta; t - t_0; \lambda)| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

если только $|x_0 - \xi| < \delta, |y_0 - \eta| < \delta, |\lambda_0 - \lambda| < \delta$.

Геометрический смысл этой теоремы можно пояснить так: задавая любой конечный промежуток времени, мы всегда можем взять столь близкие значения λ и столь близкие начальные точки, чтобы соответствующие траектории в течение выбранного промежутка времени сколь угодно мало отличались друг от друга¹⁾.

Сделаем ряд общих замечаний, касающихся изменения вида фазовых траекторий, при изменении параметра, предполагая, что система (А) — аналитическая на всей фазовой плоскости.

Хотя на основании приведенных выше теорем каждая отдельная траектория в части, соответствующей конечному промежутку времени, мало изменяется при малом изменении параметра, но вся совокупность траекторий в целом может претерпевать значительные изменения при изменении параметра. Именно, как мы увидим в дальнейшем, малые изменения параметра могут сопровождаться изменением качественной картины фазовых траекторий.

Напомним определение так называемого бифуркационного значения параметра.

Пусть нам дано какое-нибудь значение $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$). Если существует такое ε ($\varepsilon > 0$), что для всех значений λ , удовлетворяющих условию $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, топологическая структура разбиения фазовой плоскости на траектории одинакова, то мы скажем, что $\lambda = \lambda_0$ есть *обыкновенное* значение параметра. Всякое *необыкновенное* значение параметра λ мы будем называть *бифуркационным*.

Таким образом значение $\lambda = \lambda_0$ называется бифуркационным значением параметра, если найдутся сколь угодно близкие к λ_0 значения параметра λ , для которых качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории отлична от такой же картины, соответствующей

1) Заметим, что отсюда вовсе не следует, что эти траектории будут сколь угодно близки в течение неограниченного промежутка времени.

щей $\lambda = \lambda_0$. Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории, как мы знаем, определяется так называемыми особыми элементами, особыми траекториями. Поэтому, чтобы изучить зависимость качественной картины фазовых траекторий от параметра, следует изучить зависимость от параметра системы особых элементов¹⁾. Однако пока не существует полной теории такой зависимости. В настоящем параграфе мы рассмотрим ряд частных задач, касающихся зависимости особых элементов, главным образом предельных циклов, от параметра.

2. *Зависимость грубых систем от параметра.* Начнем с нескольких замечаний, касающихся грубых систем, о которых мы говорили в § 10.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ наша система является грубой, т. е. на фазовой плоскости существует цикл без прикосновения, определяющий собой область G , внутри которой все особые точки таковы, что для них $q \neq 0$ и при $q > 0$ $p \neq 0$, все предельные циклы имеют характеристические показатели, отличные от нуля, и сепаратрисы не идут из седла в седло. Очевидно, что в этом случае значение $\lambda = \lambda_0$ не может быть бифуркационным по самому определению грубых систем и по нашему предположению об аналитичности правых частей уравнений (A) как функций λ .

Предположим для упрощения рассуждений, что при всех рассматриваемых изменениях параметра ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) цикл без прикосновения так и остается циклом без прикосновения. Очевидно, что только те значения параметра λ могут быть бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу²⁾.

Укажем некоторые простейшие случаи таких негрубых образований:

- 1) сложные особые точки (такие точки могут либо появиться вновь, либо получиться от слияния простых точек, например узла и седла);
- 2) вырожденный фокус или центр;
- 3) полуустойчивый предельный цикл (такой цикл может либо появиться вновь, либо получиться от слияния устойчивого и неустойчивого циклов);
- 4) сепаратриса, идущая из седла в седло.

При дальнейшем изменении параметра система может опять сделаться грубой: сложная особая точка может или исчезнуть, или разбиться на простые; вырожденный фокус может, как мы увидим в дальнейшем, стать невырожденным, изменяя при этом устойчивость и породив предельный цикл, и т. д.

3. *Зависимость состояний равновесия от параметра.* Прежде чем перейти к предельным циклам, выскажем сначала несколько простых соображений, касающихся зависимости состояний равновесия от параметра. Во-первых, очевидно — мы уже об этом говорили в связи с так называемой pq -диаграммой, — что при изменении параметра ха-

1) Как нетрудно видеть, для бифуркационных значений параметра система не может быть грубой. Поэтому для такой постановки вопроса существенно наличие особых элементов, определяющих топологическую структуру и в негрубых системах.

2) Если $\lambda = \lambda_0$ соответствует грубой системе, то мы всегда можем указать интервал (достаточно малый) значений λ вокруг $\lambda = \lambda_0$, чтобы при значениях λ из этого интервала система также была грубой. Отсюда ясно, что не может быть «последнего грубого значения λ », но может быть «первое негрубое».

рактор состояния равновесия может измениться лишь в том случае, если для соответствующего состояния равновесия либо q либо p обратится в нуль. Во-вторых, легко видеть, что при наших предположениях о $P(x, y; \lambda)$ и $Q(x, y; \lambda)$ индекс замкнутой кривой

$$j = \frac{1}{2\pi} \int_N \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2}$$

есть непрерывная (и даже аналитическая) функция параметра λ , если только на самой кривой N не появляются состояния равновесия; отсюда следует, что при этом условии индекс не меняется при изменении параметра, так как он является целым числом.

Отсюда вытекает, что одно состояние равновесия с индексом, не равным нулю, не может ни появиться, ни исчезнуть при изменении параметра. Если мы имеем простую особую точку — узел, то она может, например, исчезнуть лишь после предварительного слияния с седлом, при котором образуется сложная особая точка с индексом, равным нулю. Обратное, седло или узел могут, например, появиться следующим образом: сначала появляется сложная особая точка с индексом, равным нулю, которая затем разделяется на две — седло и узел¹⁾.

4. *Функция последования.* Мы рассмотрим более подробно зависимость от параметра предельных циклов. Для этой цели нам придется ввести данное Пуанкаре понятие так называемой *функции последования* (fonction de consequence).

Проведем в какой-нибудь обыкновенной (не особой) точке для системы (A) отрезок без контакта L , с концами A и B и установим на нем определенное направление. Возьмем на отрезке L какую-нибудь определенную точку P и будем обозначать через s расстояния точек отрезка L до точки P . При этом s будет положительным, если направление от точки P до взятой точки на отрезке L будет совпадать с выбранным на L направлением, и отрицательным в противном случае.

Пусть Q — точка на L . Рассмотрим траекторию C , проходящую через точку Q , и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — движение по этой траектории, при котором точка Q соответствует $t = t_0$. Проследим траекторию C для значений $t > t_0$ (или $t < t_0$). Может случиться, что при значении $t > t_0$ (или $t < t_0$) траектория C больше не пересекает отрезок L . Мы скажем тогда, что точка Q «не имеет последующих на отрезке L ».

Но может случиться, что траектория C пересекает отрезок L еще раз при значении $t > t_0$ (или $t < t_0$). Пусть \bar{t} — первое значение t , большее t_0 (или меньшее t_0), при котором C пересекается с L , и \bar{Q} — соответствующая точка отрезка L . Мы скажем тогда, что точка Q «имеет последующую \bar{Q} на отрезке L » (см. рис. 228а).

Легко показать, на основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, что если какая-нибудь точка Q имеет последующую, не совпадающую с концами A или B отрезка L , то и все достаточно близкие к Q точки L также имеют последующие.

1) В некоторых случаях бывает удобно исследовать сложные особые точки путем подходящего введения параметра таким образом, чтобы для определенного значения параметра мы получили сложную особую точку, а для соседних значений параметра эта особая точка распалась бы на ряд простых.

Пусть s — расстояние различных точек L до выбранной точки P и \bar{s} — расстояние до P их последующих.

Ясно, что \bar{s} есть функция s , $\bar{s} = f(s)$. Эта функция $\bar{s} = f(s)$ называется *функцией последования*. Геометрически ясно, что «функцию последования» мы имеем тогда, когда отрезок без контакта пересекает траектории, имеющие характер спиралей или замкнутые. При этом очевидно, что если некоторому значению $s = s_0$ соответствует замкнутая траектория, то $f(s_0) = s_0$, т. е. точка Q и ее последующая \bar{Q} совпадают. Обратное, отыскание замкнутых траекторий, пересекающих данный отрезок без контакта, сводится к отысканию тех значений s , для которых $\bar{s} = f(s) = s$. Нетрудно также видеть, что в том случае, когда все траектории, пересекающие отрезок L , замкнуты, функция последования имеет вид: $\bar{s} = s$. Пуанкаре^[2] доказал ряд свойств функции $s = f(s)$, которые мы приведем без доказательств.

I свойство. Если точка Q_0 , соответствующая $s = s_0$, имеет последующую на отрезке L , то функция $\bar{s} = f(s)$ — голоморфная функция s в точке $s = s_0$.

II свойство. Производная $\frac{d\bar{s}}{ds}$ всегда положительна.

Геометрически последнее свойство означает, что если мы будем двигаться по отрезку L , например, в положительном направлении, то и последующие проходимых нами точек будут двигаться по отрезку L в том же направлении.

Предположим, что некоторая точка Q_0 отрезка L , соответствующая $s = s_0$, имеет последующую (не совпадающую с концами A или B отрезка L). Тогда, в силу сказанного выше, все достаточно близкие к Q_0 точки также имеют последующие, и, следовательно, для всех значений s , достаточно близких к s_0 , существует функция последования $\bar{s} = f(s)$. Будем двигаться по отрезку L от точки Q_0 в положительном (или отрицательном) направлении, т. е., другими словами, будем, начиная с s_0 , увеличивать (или уменьшать) s .

Могут представиться следующие возможности:

1) Или мы дойдем до точки Q_1 отрезка L , соответствующей $s = s_1$, для которой последующей будет конец B (или A) отрезка L (рис. 228а). Тогда точки L , соответствующие значениям $s > s_1$, не будут уже, в силу свойства II, иметь последующих на отрезке L , и функция последования не будет определена для значений $s > s_1$. В этом случае мы, вообще говоря, можем удлинить отрезок без контакта и, следовательно, увеличить интервал значений s , для которых определена функция последования¹⁾.

2) Или мы дойдем до такого значения $s = s_1$, что все точки отрезка L , соответствующие значениям s , $s_0 < s < s_1$, будут иметь последующие, а точка Q_1 , соответствующая $s = s_1$, не будет иметь последующей на отрезке L .

1) Удлинение отрезка без контакта возможно до наступления соприкосновения с фазовыми траекториями. В некоторых случаях бывает тогда целесообразно, вместо прямой и соответственно отрезка без контакта, пользоваться непрерывной кривой и соответственно дугой без контакта.

Можно показать, что в этом случае траектория, проходящая через точку Q_1 , будет кончатся в особой точке, не пересекая больше L . В том случае, когда мы имеем лишь простые особые точки, эта точка может быть только седлом¹⁾.

Может случиться, что точки, соответствующие значениям $s = s_1$, опять имеют последующие. Таким образом у нас имеется функция последования для $s < s_1$ и для $s > s_1$.

Для $s = s_1$ функция последования неопределенна (рис. 228b и 228c). Однако иногда говорят об этих двух функциях последования (одной для $s < s_1$, другой для $s > s_1$) как об одной функции последования, и тогда при значении $s = s_1$ эта функция будет, вообще говоря, претерпевать разрыв в том смысле, что $f(s_1 + 0) \neq f(s_1 - 0)$.

5. *Зависимость предельных циклов от параметра.* Мы используем функцию последования для некоторых заключений относительно появления и исчезновения предельных циклов.

Предположим, что для некоторого значения параметра $\lambda = \lambda_0$ мы имеем отрезок без контакта L и функцию последования на нем. Опораясь на основную теорему, сформулированную в начале этого параграфа, можно сделать следующее утверждение:

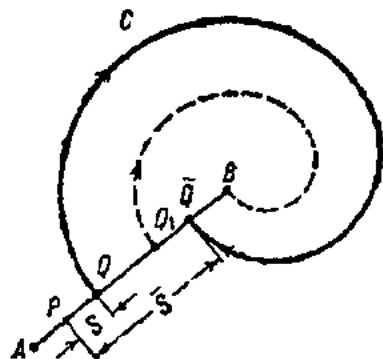


Рис. 228a.

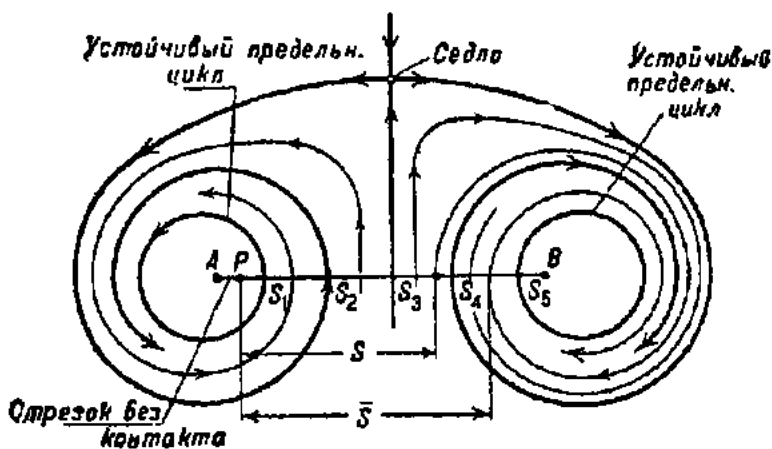


Рис. 228b.

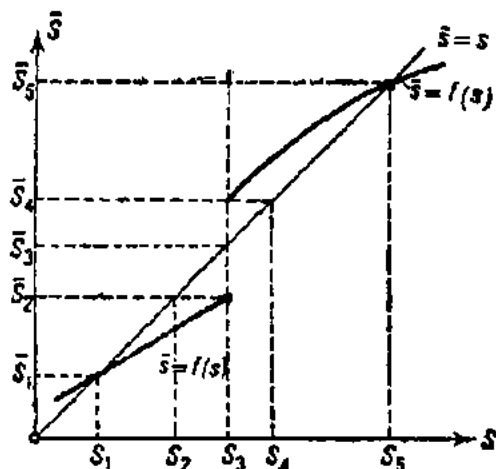


Рис. 228c.

Всегда можно указать такое $\eta > 0$, чтобы для всех значений λ внутри интервала $\lambda_0 - \eta < \lambda < \lambda_0 + \eta$ отрезок без контакта оставался отрезком без контакта²⁾ и на нем существовала бы функ-

1) Эта точка не может быть ни узлом, ни фокусом. Действительно, предположим, что траектория, проходящая через Q_1 , кончается (не пересекая уже больше L) в узле или фокусе. Тогда, как нетрудно показать, все траектории, проходящие через точки L , соответствующие значениям s , меньшим s_1 , но достаточно близким к s_1 , также кончатся бы в этой особой точке, не пересекая уже больше L . Но отсюда следовало бы, что точки, соответствующие значениям s , меньшим s_1 , не имеют последующих, что противоречило бы нашему предположению.

2) Как легко видеть, то же самое предложение будет справедливо, если вместо неподвижного отрезка без контакта мы будем рассматривать «подвижный» отрезок без контакта (и даже «подвижную» дугу без контакта), положение которого аналитически изменяется вместе с λ .

ция последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$ для значений s : $s_1 < s < s_2$, где s_1 и s_2 можно взять не зависящими от λ . При этом функция $f(s, \lambda)$ — голоморфная функция s и λ для значений переменных s и λ внутри указанных границ.

Итак, предположим, что для значений λ внутри некоторого интервала $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ мы имеем отрезок без контакта L и функцию последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$, определенную для значений s : $s_1 < s < s_2$, причем s_1 и s_2 не зависят от λ . Рассмотрим, как при изменении λ могут появляться и исчезать предельные циклы.

В дальнейшем мы особо разберем случай рождения предельного цикла из особой точки, или стягивания предельного цикла в особую точку, при изменении параметра. Точно так же сейчас мы не рассматриваем тех случаев рождения и исчезновения предельных циклов, которые связаны с исчезновением или с изменением характера сепаратрис. Такие случаи будут нами рассмотрены в дальнейшем на примерах.

Для того чтобы сообщить дальнейшим рассмотрением большую наглядность, возьмем плоскость с прямоугольными координатами s , \bar{s} и будем при различных фиксированных значениях λ изображать на ней функцию последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$.

Рассмотрим наряду с кривой, представляющей функцию последования, прямую $\bar{s} = s$. Как мы уже говорили, замкнутые траектории мы будем иметь в том случае, когда $f(s, \lambda) = s$. Геометрически это будет означать, что кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ имеет общую точку с прямой $\bar{s} = s$, т. е. что она либо пересекает эту прямую, либо касается с ней.

Заметим, что из характера поведения функции $\bar{s} = f(s, \lambda)$ вблизи ее точки пересечения с прямой $\bar{s} = s$ можно сделать заключения о поведении траекторий вблизи предельного цикла. Именно, предположим, что при составлении функции $\bar{s} = f(s, \lambda)$ (λ мы будем сейчас считать фиксированным) мы переходили от данных точек на отрезке без контакта к их последующим, двигаясь по траекториям в сторону возрастающего времени. Тогда, если кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ пересекает прямую $\bar{s} = s$ в точке, соответствующей $s = s_0$, причем для значений s , меньших s_0 (но достаточно близких к s_0), кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ лежит выше $\bar{s} = s$ (т. е. $f(s, \lambda) > s$), а для значений s , больших s_0 (но достаточно близких к s_0), — ниже прямой $\bar{s} = s$, то, как легко видеть, предельный цикл, соответствующий $s = s_0$, орбитно устойчив для $t \rightarrow +\infty$. Если, наоборот, кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ для значений $s < s_0$ лежит ниже прямой $\bar{s} = s$, а для значений $s > s_0$ — выше прямой $\bar{s} = s$, то предельный цикл орбитно неустойчив. Высказанные соображения находятся в тесной связи с изложенной ранее теорией устойчивости по Ляпунову периодических движений. Именно, можно показать¹⁾, что если s_0 — координата точки пересечения кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ с прямой $\bar{s} = s$, то

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)_{s=s_0} = e^{\lambda\tau}, \quad (324)$$

1) Доказательство основывается на теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами [118].

где h — характеристический показатель, а τ — период соответствующего периодического движения. Отсюда, в частности, следует, что если $h \neq 0$, то кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ не может в общей с прямой $\bar{s} = s$ точке касаться этой прямой. Касание может быть только в том случае, если $h = 0$. Таким образом мы можем отсюда заключить, что условием устойчивости по Ляпунову периодического движения, соответствующего предельному циклу, является: $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)_{s=s_0} < 1$. Если $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)_{s=s_0} > 1$, то предельный цикл неустойчив.

Пользуясь геометрическим изображением функции последования, рассмотрим некоторые случаи появления и исчезновения предельных циклов.

1) Пусть при значении $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$) кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ пересекает прямую $\bar{s} = s$ в некоторой точке K_0 , соответствующей $s = s_0$, причем касательная к кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ в этой точке не совпадает

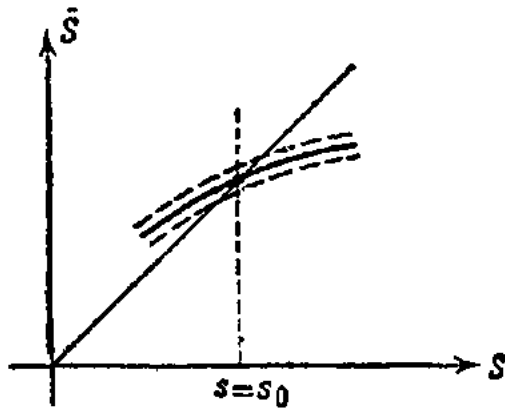


Рис. 229а.

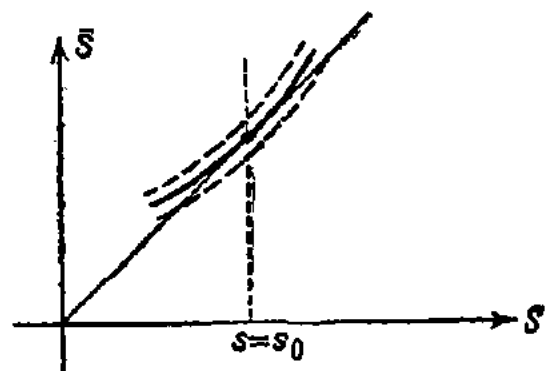


Рис. 229б.

с прямой $\bar{s} = s$. Так как функция последования — голоморфная функция λ , то кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ мало меняется при малых изменениях λ , и, следовательно, при значениях λ , достаточно близких к λ_0 , кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ также будет пересекать прямую $\bar{s} = s$ в точке K , близкой к K_0 , и не будет иметь никаких других точек пересечения, достаточно близких к K .

Это означает, что при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , мы будем иметь предельный цикл и притом только один (для всех значений s , достаточно близких к s_0) (рис. 229а).

2) Предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ кривая $\bar{s} = f(s, \lambda_0)$ в точке, соответствующей $s = s_0$, имеет соприкосновение первого порядка с прямой $\bar{s} = s$. Тогда при $\lambda = \lambda_0$ значению $s = s_0$ будет соответствовать «двойной» — полуустойчивый предельный цикл. Можно легко показать, что при сколь угодно малых изменениях λ этот цикл может, вообще говоря, либо исчезнуть, либо разделиться на два цикла, из которых один устойчивый, другой неустойчивый (рис. 229б).

Обратно, один полуустойчивый цикл может получиться от слияния двух циклов, из которых один устойчивый, другой неустойчивый.

3) Предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ в точке, соответствующей $s = s_0$, имеет с прямой $\bar{s} = s$ соприкосновение второго порядка (т. е. касается прямой $\bar{s} = s$, имея при этом точку перегиба). Можно показать, что в этом случае, при сколь угодно малых изменениях λ , предельный цикл иногда может разбиться на три цикла.

Мы можем продолжить рассмотрение дальше и выяснить, в каких случаях предельный цикл может разделиться на четыре, пять и т. д. предельных циклов, но мы не будем на этом останавливаться. Укажем только, что высказанные соображения могут быть изложены в иной геометрической форме и аналитически обоснованы при помощи обычной теории бифуркаций.

Именно, составим функцию:

$$\phi(s, \lambda) = f(s, \lambda) - s.$$

Легко видеть, что корни уравнения $\phi(s, \lambda) = 0$ при всяком данном λ соответствуют предельным циклам¹⁾.

На плоскости s, λ мы можем получить обычную бифуркационную диаграмму, так как условием устойчивости предельного цикла, как мы видели, является:

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} < 1 \text{ или иначе } (\phi'_s)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} < 0. \quad (326)$$

Мы не будем подробно останавливаться на этой бифуркационной диаграмме, так как она по существу не отличается от бифуркационных диаграмм, рассмотренных ранее, и совершенно аналогичная бифуркационная диаграмма будет подробно рассмотрена для случая появления предельного цикла из точки.

6. *Случай появления предельного цикла из особой точки. Физический пример.* Рассмотрим теперь случай появления предельного цикла из появления равновесия типа фокус или стягивания предельного цикла в такую особую точку.

Предположим, что мы имеем состояние равновесия типа фокус, удовлетворяющее условию $q > 0$.

Тогда, как известно, при $p > 0$ мы имеем устойчивый фокус, при $p < 0$ — неустойчивый фокус. Если, при изменении параметра λ , p проходит через нуль, то при этом могут появиться предельные циклы. Различные случаи, которые здесь могут представиться, мы и будем рассматривать.

Предположим, что исходную систему (A) путем надлежащего преобразования мы привели к так называемому каноническому виду, которым мы занимались, когда рассматривали вопрос об устойчивости

1) Если при заданном λ уравнение $\phi(s, \lambda) = 0$ обращается в тождество, то это будет означать, что все траектории, пересекающие отрезок без контакта, замкнуты. Этот исключительный случай мы сейчас не рассматриваем.

по Ляпунову состояний равновесия типа фокус. Тогда исходная система запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(\lambda)x - b_1(\lambda)y + P_2(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(\lambda)x + a_1(\lambda)y + Q_2(x, y, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

где $P_2(x, y, \lambda)$ и $Q_2(x, y, \lambda)$ — ряды, расположенные по степеням x и y , начинающиеся с членов не ниже второго порядка, а $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$ — действительная и мнимая части корней характеристического уравнения:

$$S_1 = a_1(\lambda) + ib_1(\lambda), \quad S_2 = a_1(\lambda) - ib_1(\lambda).$$

Напомним, что если $a_1(\lambda) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво, если $a_1(\lambda) < 0$, то устойчиво. Если $a_1(\lambda) = 0$, то члены первого порядка не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} &= a_1(\lambda)(x^2 + y^2) + P_2(x, y, \lambda)x + Q_2(x, y, \lambda)y, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} [b_1(\lambda)(x^2 + y^2) + Q_2(x, y, \lambda)x - P_2(x, y, \lambda)y]. \end{aligned} \right\} \quad (327a)$$

Заметим, что если $b_1(\lambda) > 0$ (или $b_1(\lambda) < 0$), то для достаточно малых x и y : $\frac{d\theta}{dt} > 0$ (или $\frac{d\theta}{dt} < 0$). Нам удобнее будет в дальнейшем рассматривать вместо системы (327) одно уравнение, получающееся от деления первого из уравнений (327a) на второе. Получим:

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{[a_1(\lambda)r + P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta]}{[b_1(\lambda)r + Q_2 \cos \theta - P_2 \sin \theta]}, \quad (327b)$$

где в функциях P_2 и Q_2 x и y заменены через $r \cos \theta$ и $r \sin \theta$.

Правую часть этого уравнения мы преобразуем следующим образом:

$$\frac{dr}{d\theta} = \left[\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} r + \frac{P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta}{b_1(\lambda)} \right] \left\{ 1 + \frac{P_2 \sin \theta - Q_2 \cos \theta}{b_1(\lambda)r} + \left(\frac{P_2 \sin \theta - Q_2 \cos \theta}{b_1(\lambda)r} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (327c)$$

Мы можем затем представить правую часть в виде ряда, расположенного по степеням r :

$$\frac{dr}{d\theta} = rR_1(\theta, \lambda) + r^2R_2(\theta, \lambda) + r^3R_3(\theta, \lambda) + \dots \quad (328)$$

Так как по предположению $g \neq 0$, то $b_1(\lambda)$ ни при каких рассматриваемых значениях λ не обращается в нуль, и ряд в правой части (328) сходится при всех значениях θ и при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) для всех достаточно малых значений r , $|r_1| < \rho$

(ρ не зависит от θ и λ). Как легко видеть, $R_1(\theta, \lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)}$, т. е. не зависит от θ , а $R_k(\theta, \lambda)$ ($k=2, 3, \dots$) — периодические функции θ .

Пусть

$$r = f(\theta, r_0, \lambda)$$

— решение уравнения (328), обращающееся в r_0 при $\theta=0$, так что

$$r_0 = f(0, r_0, \lambda).$$

Можно показать, что это решение может быть разложено в ряд по степеням r_0^1 , сходящийся при всех θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) и при всех рассматриваемых значениях λ для значений r_0 , $|r_0| < \rho_0$, где ρ_0 можно взять не зависящим от λ .

Таким образом:

$$r = f(r_0, \theta, \lambda) = r_0 u_1(\theta, \lambda) + r_0^2 u_2(\theta, \lambda) + r_0^3 u_3(\theta, \lambda) + \dots \quad (329)$$

Для вычисления коэффициентов $u_k(\theta, \lambda)$ мы можем, например, подставить этот ряд в дифференциальное уравнение (328) и получить для функций $u_k(\theta, \lambda)$ рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= u_1 R_1(\theta, \lambda), \\ \frac{du_2}{d\theta} &= u_2 R_1(\theta, \lambda) + u_1^2 R_2(\theta, \lambda), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (329a)$$

Так как

$$f(0, r_0, \lambda) = r_0,$$

то

$$u_1(0, \lambda) = 1, \quad u_k(0, \lambda) = 0 \quad (k=2, 3, \dots). \quad (330)$$

Этими начальными условиями совместно с дифференциальными уравнениями (329a) полностью определяются функции $u_k(\theta, \lambda)$. В частности, первое из уравнений (329a) дает:

$$u_1(\theta, \lambda) = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} \theta}.$$

Обратим теперь внимание на следующее. Прямая $\theta=0$ для всех достаточно малых значений r и при всех рассматриваемых значениях λ не касается интегральных кривых на плоскости r, θ . Поэтому достаточно малый отрезок этой прямой (соответствующий значениям $0 < r < \rho_0$) будет играть роль, вполне аналогичную обычному отрезку без контакта, хотя один из его концов упирается в особую точку (фокус).

¹⁾ См., например, L. Bieberbach, *Differentialgleichungen*, т. II; Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mécanique céleste*, т. I.

Поэтому, давая в решении (329) θ значение 2π , мы получим функцию, вполне аналогичную функции последования, о которой у нас была речь выше:

$$\bar{r} = f(2\pi, r_0, \lambda) = u_1(2\pi, \lambda) r_0 + u_2(2\pi, \lambda) r_0^2 + u_3(2\pi, \lambda) r_0^3 + \dots$$

При этом

$$u_1(2\pi, \lambda) = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} 2\pi}.$$

Пользуясь этой функцией, мы могли бы провести геометрическое рассмотрение, в точности аналогичное тому, которое мы провели для случая обычной функции последования (см. выше). Введем функцию

$$\phi(r_0, \lambda) = f(2\pi, r_0, \lambda) - r_0 = a_1(\lambda) r_0 + a_2(\lambda) r_0^2 + a_3(\lambda) r_0^3 + \dots, \quad (331)$$

где

$$a_1(\lambda) = u_1(2\pi, \lambda) - 1 = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} 2\pi} - 1; \quad a_k = u_k(2\pi, \lambda), \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Рассмотрим плоскость r_0, λ и будем строить для этого случая обычные бифуркационные диаграммы. При этом нужно иметь в виду, что функции $f(2\pi, r_0, \lambda)$ и $\phi(r_0, \lambda)$ имеют смысл только для положительных значений r_0 .

Посмотрим, какие здесь могут быть возможности:

1) Предположим, что для рассматриваемых значений λ $a_1(\lambda) \neq 0$ и, следовательно, и $a_1(\lambda) \neq 0$. Тогда для рассматриваемых значений λ кривая $\phi(r_0, \lambda) = 0$ не имеет кратных точек (точек, в которых одновременно $\phi_r' = 0$ и $\phi_\lambda' = 0$); знак $a_1(\lambda)$ не меняется, особая точка — фокус — сохраняет свою устойчивость и от нее не может отделиться (и в ней не может стянуться) предельный цикл.

2) Займемся теперь случаем, о котором мы говорили выше, когда $a_1(\lambda) = \frac{r}{2}$ обращается в нуль, т. е. когда среди рассматриваемых значений λ найдется такое значение $\lambda = \lambda_0$, при котором $a_1(\lambda_0) = 0$, а следовательно, и $a_1(\lambda_0) = 0$ (фокус становится вырожденным). Кривая $\phi(r_0, \lambda) = 0$ имеет тогда в точке $r_0 = 0$ кратную точку (легко проверить, что $(\phi_r')_{r_0=0} = 0$ и $(\phi_\lambda')_{r_0=0} = 0$).

Прежде чем исследовать характер бифуркационной диаграммы вокруг точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, сделаем следующее замечание: если при значении $\lambda = \lambda_0$ $a_1(\lambda_0) = 0$, то непременно обращается в нуль также и $a_2(\lambda_0)$. И вообще, если $a_1(\lambda_0) = a_2(\lambda_0) = \dots = a_{n-1}(\lambda_0) = 0$, то непременно $a_{2k} = 0^1$.

1) Покажем, что в том случае, когда $a_1(\lambda_0) = 0$, а следовательно, и $a_1(\lambda_0) = 0$, непременно и $a_2(\lambda_0) = 0$. Если $a_1(\lambda_0) = 0$, то в уравнении (328) $R_1(\theta, \lambda_0) = \frac{a_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)} = 0$. Пер-

Рассмотрим функцию $\psi(r_0, \lambda) = 0$. Для исследования кратной точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ найдем выражения для вторых производных $\psi(r_0, \lambda)$ при значении $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$.

Получим:

$$\left. \begin{aligned} (\psi''_{r_0 r_0})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} &= \alpha_2(\lambda_0) = 0, \\ (\psi''_{\lambda \lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} &= 0, \\ (\psi''_{r_0 \lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} &= \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi \frac{\alpha'_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (332)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда

$$(\psi''_{r_0 \lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \neq 0;$$

тогда

$$(\psi''_{r_0 r_0})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} \cdot (\psi''_{\lambda \lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} - (\psi''_{r_0 \lambda})_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}}^2 < 0,$$

и точка $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ будет простой двукратной точкой (узлом) для кривой $\psi(r_0, \lambda) = 0$.

В этом случае, при изменении λ от значений, меньших λ_0 , до значений, больших λ_0 , $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$ меняют знак, и рассматриваемый фокус меняет устойчивость.

Проще всего исследовать характер точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, если воспользоваться тем, что кривая $\psi(r_0, \lambda) = 0$ распадается на прямую $r_0 = 0$ и кривую $\varphi(r_0, \lambda) = \alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)r_0 + \dots$

Для того чтобы выяснить, как расположена кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, вычислим значения $\frac{d\lambda}{dr_0}$ и $\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}$ в этой точке.

Мы получим:

$$\left(\frac{d\lambda}{dr_0} \right)_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ r_0=0}} = - \frac{\alpha_2(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0}} = 0,$$

выс два уравнения (329а) при $\lambda = \lambda_0$ принимают вид: $\frac{du_1}{d\theta} = 0$, откуда, принимая во внимание начальные условия, получаем: $u_1 = 1$ и $\frac{du_2}{d\theta} = \bar{R}_2(\theta, \lambda_0)$, так как $[R_1(\theta, \lambda_0) = 0$ и $u_1 = 1]$. Нетрудно видеть, что $\bar{R}_2(\theta, \lambda_0)$ есть однородная функция $\cos \theta$ и $\sin \theta$ третьего измерения. Интегрируя обе части последнего уравнения в пределах от 0 до 2π и принимая во внимание, что $u_2(0, \lambda_0) = 0$, получим:

$$u_2(2\pi, \lambda_0) = \int_0^{2\pi} \bar{R}_2(\theta, \lambda) d\theta = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что первый не равный нулю коэффициент $\alpha_k(\lambda_0)$ должен быть нечетного номера (см. Л я л у о в, Общая задача об устойчивости движения, стр. 147).

т. е. кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ имеет в точке $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ вертикальную касательную

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = - \frac{2\alpha_3(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}}.$$

Предположим, что $\alpha_3(\lambda_0) \neq 0$. Тогда кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ расположена целиком по одну сторону от касательной.

Нетрудно видеть, что здесь могут быть четыре возможности в зависимости от знака $\alpha'_1(\lambda_0)$ и знака $\alpha_3(\lambda_0)$ [согласно сказанному выше $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, и мы будем считать, что $b_1(\lambda) > 0$].

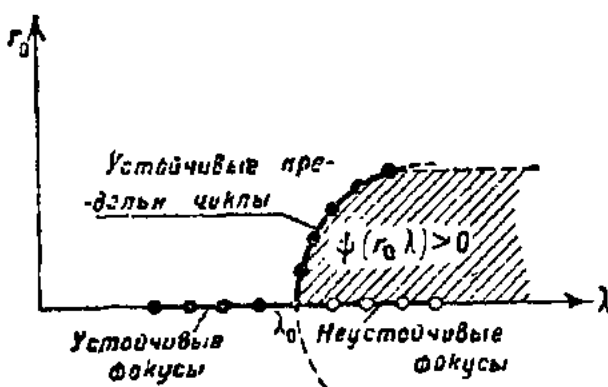


Рис. 230а.

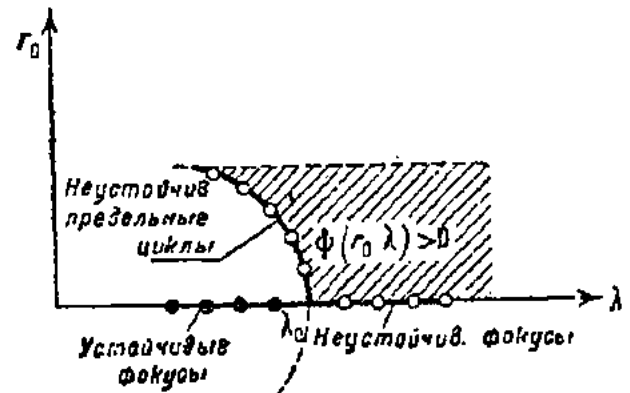


Рис. 230б.

Приведем бифуркационные диаграммы, соответствующие этим случаям, где, как обычно, заштрихованные области соответствуют $\varphi(r_0, \lambda) > 0$.

а) $\alpha'_1(\lambda_0) > 0, \alpha_3(\lambda_0) < 0$:

тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} > 0.$$

Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 230а. В этом случае при возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, и при этом появляется устойчивый предельный цикл (и только один).

б) $\alpha'_1(\lambda_0) > 0, \alpha_3(\lambda_0) > 0$:

тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} < 0.$$

Бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 230б. При возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, при этом неустойчивый предельный цикл (только один) стягивается в фокус.

в) $\alpha'_1(\lambda_0) < 0, \alpha_3(\lambda_0) > 0$:

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} > 0.$$

В этом случае неустойчивый фокус при возрастании λ делается устойчивым, и появляется неустойчивый предельный цикл (рис. 230с).

$$d) \quad a_1'(\lambda_0) < 0, \quad a_3(\lambda_0) < 0:$$

$$\left[\frac{da_1(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0} < 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{d\lambda}{dr^2} \right] < 0.$$

При возрастании λ неустойчивый фокус делается устойчивым. Устойчивый предельный цикл стягивается в фокус (рис. 230д).

Такие же результаты мы получили бы, если бы $a_3(\lambda_0) = 0$, и первый не равный нулю коэффициент был бы $a_{2k+1}(\lambda_0)$, где $k > 1$. И в этом случае всегда появляется (или исчезает) один и только один предель-

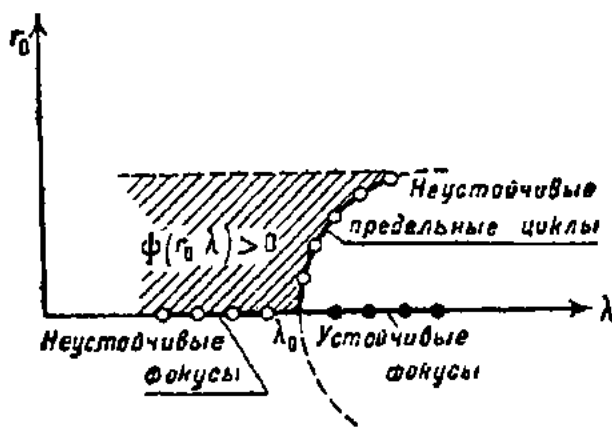


Рис. 230с.

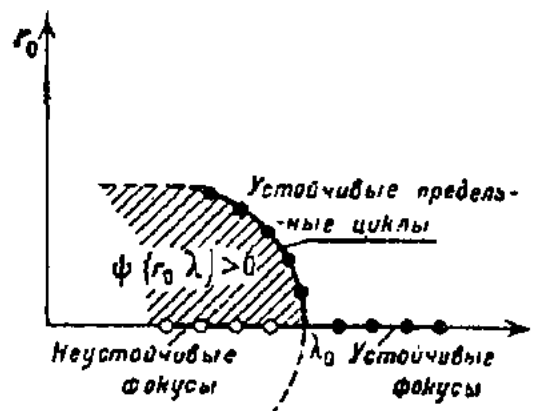


Рис. 230д.

ный цикл. Случай $a_1'(\lambda_0) = 0$ мы рассматривать не будем. В этом случае, вообще говоря, при изменении λ могут появиться два, три и т. д. предельных циклов.

Прежде чем перейти к рассмотрению физического примера, заметим следующее. Как мы видели, в простейшем случае (практически наиболее интересном) для решения вопроса нам достаточно знать величины $a_k(\lambda)$ только для $\lambda = \lambda_0$. Поэтому для упрощения вычислений следует писать уравнение (327с) только для $\lambda = \lambda_0$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{b_1(\lambda_0)} [(P_2)_0 \cos \theta + (Q_2)_0 \sin \theta] \left\{ 1 + \frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} + \left(\frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (333a)$$

где через $(P_2)_0$ и $(Q_2)_0$ обозначены $P_2(x, y; \lambda)$ и $Q_2(x, y; \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ или

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0) r^2 + R_3(\theta, \lambda_0) r^3 + \dots,$$

так как $R_1(\lambda_0, \theta) = 0$. Решение этого упрощенного уравнения опять ищем в виде ряда

$$r = r_0 u_1 + r_0^2 u_2 + r_0^3 u_3 + \dots,$$

причем $u_1 = 1$, а для остальных $u_k(\theta, \lambda_0)$ получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_2}{d\theta} &= R_2(\theta, \lambda_0), \\ \frac{du_3}{d\theta} &= 2u_2 R_2(\theta, \lambda_0) + R_3(\theta, \lambda_0), \\ \frac{du_4}{d\theta} &= (u_2^2 + 2u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + 3u_2 R_3(\theta, \lambda_0) + R_4(\theta, \lambda_0), \\ \frac{du_5}{d\theta} &= (2u_4 + 2u_2 u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + (3u_2^2 + 3u_3) R_3(\theta, \lambda_0) + 4u_2 R_4(\theta, \lambda_0) + R_5(\theta, \lambda_0), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (333b)$$

с начальными условиями $u_k(0, \lambda_0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$).

Отсюда мы сможем найти $a_3(\lambda_0)$ или если $a_3(\lambda_0) = 0$, то $a_5(\lambda_0)$ и т. д. Что же касается выражения для $a_1'(\lambda_0)$, которое также необходимо для решения вопроса о стягивании или рождении цикла, то $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$, нужные для его вычисления, могут быть найдены из обычного уравнения, определяющего характеристические показатели.

В качестве физического примера рассмотрим случай возникновения автоколебаний в катодном генераторе при увеличении обратной связи.

Уравнение катодного генератора с колебательным контуром в цепи сетки при обычных идеализациях и при характеристике лампы в виде полинома третьей степени [$I_a = V_s(\bar{\alpha}_1 v + \bar{\beta}_1 v^2 - \bar{\gamma}_1 v^3)$], где I_a — анодный ток, V_s — условное напряжение насыщения, $v = \frac{v_g}{V_s}$, v_g — напряжение на сетке, равное напряжению на конденсаторе; будем предполагать, что $\bar{\alpha}_1 > 0$ и $\bar{\gamma}_1 > 0$] имеет в безразмерных переменных следующий вид (см. гл. VII настоящей книги):

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + v = (\alpha' + 2\beta'v - 3\gamma'v^2) \frac{dv}{d\tau},$$

где

$$\tau = \omega_0 t, \quad \alpha' = \omega_0(M\bar{\alpha}_1 - RC), \quad \beta' = \bar{\beta}_1 M\omega_0, \quad \gamma' = \bar{\gamma}_1 M\omega_0$$

— вполне понятные обозначения.

Полагая $v = y$, $v = x^1$), запишем дифференциальное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -y + (\alpha' + 2\beta'y - 3\gamma'y^2)x, \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (334)$$

Будем рассматривать состояние равновесия $x = 0, y = 0$ и будем исследовать возможное рождение цикла из этого состояния равновесия при

1) Необычное обозначение координат на фазовой плоскости проинтуитивно требуем, чтобы при $\alpha' = 0$ система (334) прямо переходила в систему вида (327) с $a_1 = 0$ и $b_1 = 1 > 0$.

изменении параметра M . Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид:

$$S^2 - a'S + 1 = 0,$$

откуда

$$a_1(M) = \frac{a'}{2} = \frac{\omega_0}{2} (M\bar{\alpha}_1 - RC),$$

$$b_1(M) = \pm \sqrt{1 - \frac{a'^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4} (M\bar{\alpha}_1 - RC)^2}.$$

Бифуркационное значение параметра

$$M_0 = \frac{RC}{\bar{\alpha}_1},$$

откуда

$$a'_1(M_0) = \frac{\omega_0 \bar{\alpha}_1}{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению $\alpha_3(M_0)$. На основании (333a), (334) имеем¹⁾:

$$R_2(\theta, M_0) = 2\beta'_0 \cos^2 \theta \sin \theta,$$

$$R_3(\theta, M_0) = -3\gamma'_0 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4\beta'_0 \cos^3 \theta \sin^3 \theta,$$

откуда по формулам (333b) находим:

$$u_2(\theta, M_0) = \frac{2}{3} \beta'_0 (1 - \cos^3 \theta),$$

$$u_3(2\pi, M_0) = \alpha_3(M_0) = -\frac{3}{8} \gamma'_0 2\pi = -\frac{3\pi\omega_0}{4} RC \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}_1}.$$

Так как по предположению $\bar{\alpha}_1 > 0$, $\bar{\gamma}_1 > 0$, то $a'_1(M_0) > 0$, $\alpha_3(M_0) < 0$; мы имеем по нашей классификации первый случай (случай а): при возрастании M у нас фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом появляется устойчивый предельный цикл. Отсюда следует, что при $M > M_0$, но достаточно близких к M_0 , в системе наверное возможен устойчивый автоколебательный процесс. Заметим, что если бы у нас было $\bar{\gamma}_1 < 0$, то мы имели бы второй случай (случай б), когда при возрастании M фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом неустойчивый цикл стягивается в точку. Легко видеть, что этот последний случай физически соответствует так называемому жесткому возбуждению колебаний, в то время как первый случай соответствует так называемому мягкому возбуждению колебаний.

Сделаем еще два замечания: 1) если бы мы учли дальнейшие члены в разложении характеристики, пропорциональные v^4 , v^5 , v^6 и т. д., то, как легко видеть из уравнения (333b), эти члены в нашем случае никак

¹⁾ $\beta'_0 = (\beta')_{M=M_0}$, $\gamma'_0 = (\gamma')_{M=M_0}$.

не повлияли бы на решение вопроса о рождении или исчезновении цикла, если $\bar{\gamma}_1 \neq 0$; 2) все наши выводы сделаны без всяких предположений о малости величин R , $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\gamma}_1$. Аналогичное рассмотрение возникновения автоколебаний в катодном генераторе при увеличении обратной связи, гораздо более далеко идущее (изменения циклов будут

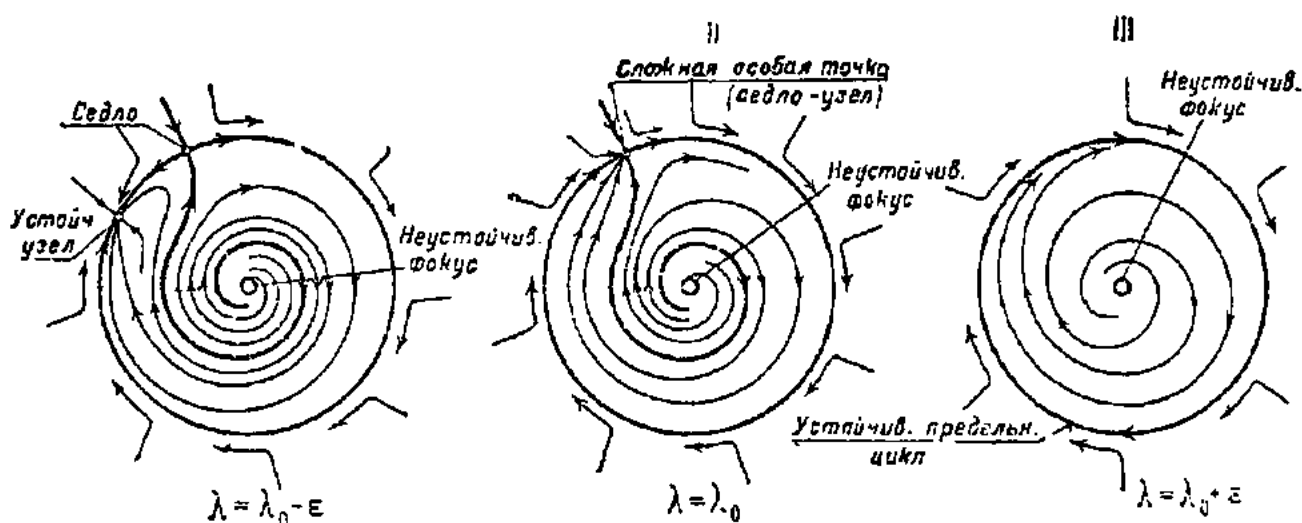


Рис. 231.

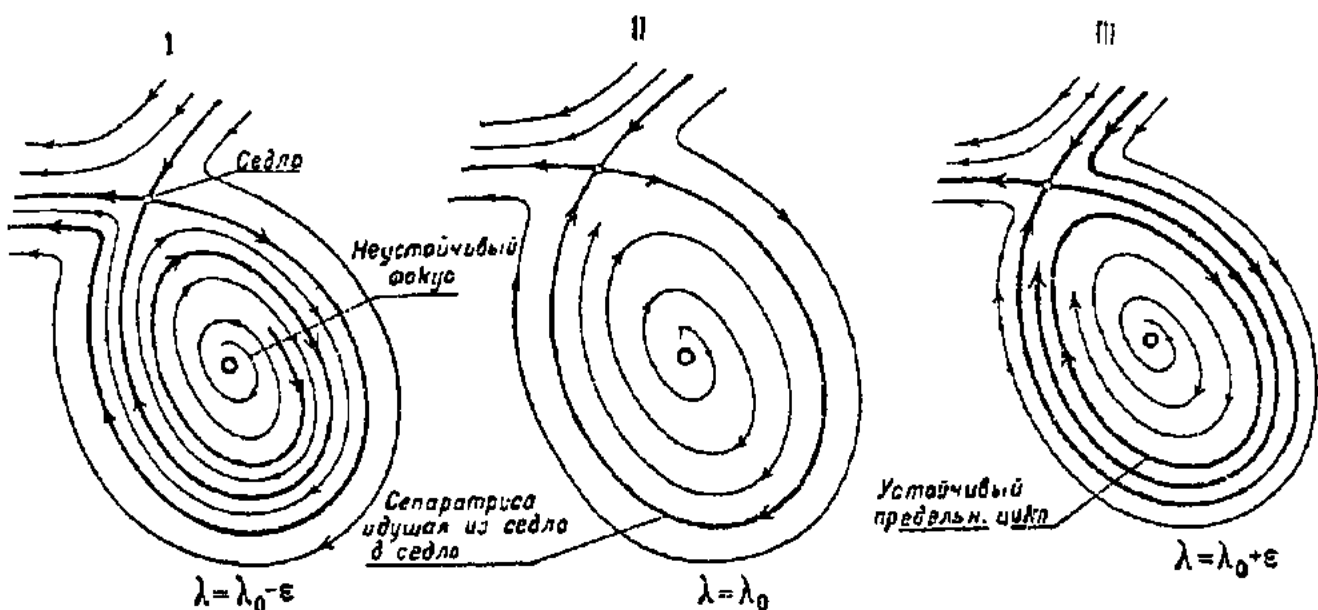


Рис. 232.

прослежены не только в непосредственной близости к особой точке), будет сделано в гл. VII; однако при этом придется предъявить определенные требования малости к коэффициентам характеристики лампы, к сопротивлению и т. д.

7. *Появление предельного цикла из сепаратрисы.* Случай рождения цикла из сепаратрисы и соответствующие случаи исчезновения цикла представляют очень большой интерес как с точки зрения теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения физики. Однако при аналитическом исследовании таких случаев возникают затруднения, которые еще не преодолены [40], поэтому мы здесь ограничимся при-

ведением рисунков (рис. 231 и 232), которые иллюстрируют два типичных случая рождения цикла из сепаратрисы. Легко видеть, что на каждом из этих рисунков фигура II соответствует бифуркационному значению параметра $\lambda = \lambda_0$.

§ 13. Системы без замкнутых траекторий

До сих пор, занимаясь качественной теорией, мы главным образом (за исключением рассмотрения состояний равновесия и некоторых примеров, связанных с исследованием зависимости предельных циклов от параметра) изучали общий вопрос о том, какие могут быть качественные картины фазовых траекторий, какие возможны изменения качественной картины при изменении параметра и т. д. Теперь мы должны перейти к способам, при помощи которых эти качественные картины могут быть действительно изучены в *конкретных случаях*, интересующих физика или техника. Трудности, которые здесь возникают, очень велики, и часто ввиду отсутствия регулярных и достаточно эффективных методов приходится обращаться к различным способам численного интегрирования. Однако есть случаи, когда на основании общей теории исследование сравнительно просто может быть доведено до конца. Один из таких случаев, практически, пожалуй, наиболее важный, это тот, когда удастся каким-либо способом показать, что на фазовой плоскости рассматриваемой системы нет замкнутых фазовых траекторий.

Можно указать ряд критериев для отсутствия замкнутых фазовых траекторий, каждый из которых дает некоторые достаточные условия. Хотя эти критерии отнюдь не дают какого-либо регулярного способа доказательства отсутствия замкнутых траекторий у системы, заданной уравнениями типа (A), тем не менее, как это будет видно из приведенных физических примеров, они представляют определенный практический интерес.

Предположим, что рассматриваемая система отображается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (A)$$

где мы опять будем предполагать $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитическими на всей фазовой плоскости.

Первый критерий, который мы рассмотрим, это так называемый *критерий Бендиксона* ^[13], касающийся критерия *несуществования замкнутых контуров, целиком составленных из траекторий*. Может показаться, что всегда имеются замкнутые контуры, составленные из фазовых траекторий. Например, даже в случае грубых систем для всех случаев *внутренних* элементарных ячеек в границу входит замкнутый контур, составленный из целых траекторий. Однако для конкретных физических задач довольно часто дело обстоит так: бесконечность абсолютно неустойчива, и мы имеем только лишь внешние, «открытые» элементарные ячейки.

Критерий Бендиксона. Если кривая $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ не имеет действительных ветвей, т. е., другими словами, выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ никогда не меняет знака, то на фазовой плоскости не существует замкнутых контуров, целиком составленных из траекторий. Для доказательства воспользуемся теоремой Гаусса, согласно которой

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dy - Q dx).$$

Если интеграл по контуру берется по кривой, целиком состоящей из траекторий, то в силу уравнений (А) он равен нулю, а следовательно, и двукратный интеграл также равен нулю. Но в таком случае выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ должно обязательно менять знак где-нибудь внутри взятого контура; таким образом наше утверждение доказано.

Перейдем теперь к критериям, связанным с гораздо более слабым требованием — с требованием отсутствия замкнутых фазовых траекторий, т. е., иначе говоря, к критериям отсутствия периодических решений системы (А).

Можно было бы дать, на основании изложенной в § 11 теории индексов, целый ряд критериев; мы приведем только некоторые из них, практически наиболее существенные. Впоследствии мы познакомимся еще с некоторыми критериями, основанными на свойствах так называемой «кривой контактов».

1. Если в системе не существует особых точек, то у нее не может быть и замкнутых фазовых траекторий.

2. Если в системе существует только одна особая точка, причем индекс ее не равен $+1$ (например седло), то в этой системе не может быть замкнутых фазовых траекторий.

3. Если система обладает несколькими особыми точками, сумма индексов любой комбинации которых не равна $+1$, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

4. Если система допускает, например, только простые особые точки, причем через все точки с индексами $+1$ проходят интегральные кривые, уходящие в бесконечность, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

1. Ламповые реле. В качестве примера рассмотрим работу так называемых кип-реле, употребляемых для включения отклонения по оси времени в катодном осциллографе Роговского [26]. Как известно, в катодном осциллографе тонкий пучок электронов проходит между обкладками двух скрещенных конденсаторов, причем к обкладкам одного конденсатора подводится то напряжение, для которого должна быть изучена зависимость от времени. К обкладкам другого конденсатора подводится монотонно меняющееся напряжение, служащее для развертки процесса по оси времени. Если снимаемые процессы очень кратковременны, например блуждающая волна, то и временная развертка должна быть очень быстра; для этой цели употребляется разряд конденсатора через сопротивление.

Для того чтобы развертка этого кратковременного процесса началась во-время, т. е. чтобы разряд начался одновременно с приходом волны, поступают следующим образом. Конденсатор, напряжение которого служит для отклонения пучка электронов по оси времени, замыкается

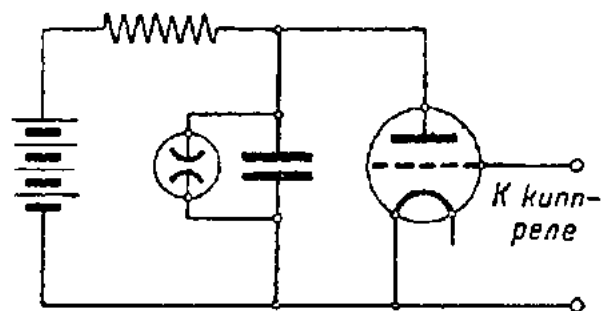


Рис. 233а.

через анодную цепь лампы, на сетку которой наложено столь большое отрицательное напряжение, что анодный ток в лампе отсутствует и конденсатор не разряжается. Это отрицательное напряжение, запирающее лампу, может быть изменено при помощи лампового реле, присоединенного к цепи сетки и «срабатывающего» под действием

толчка проходящей волны (рис. 233а). Так как работа реле требует некоторого времени, то необходимо несколько «задержать» волну; это достигается тем, что волна от реле до осциллографа пропускается по-

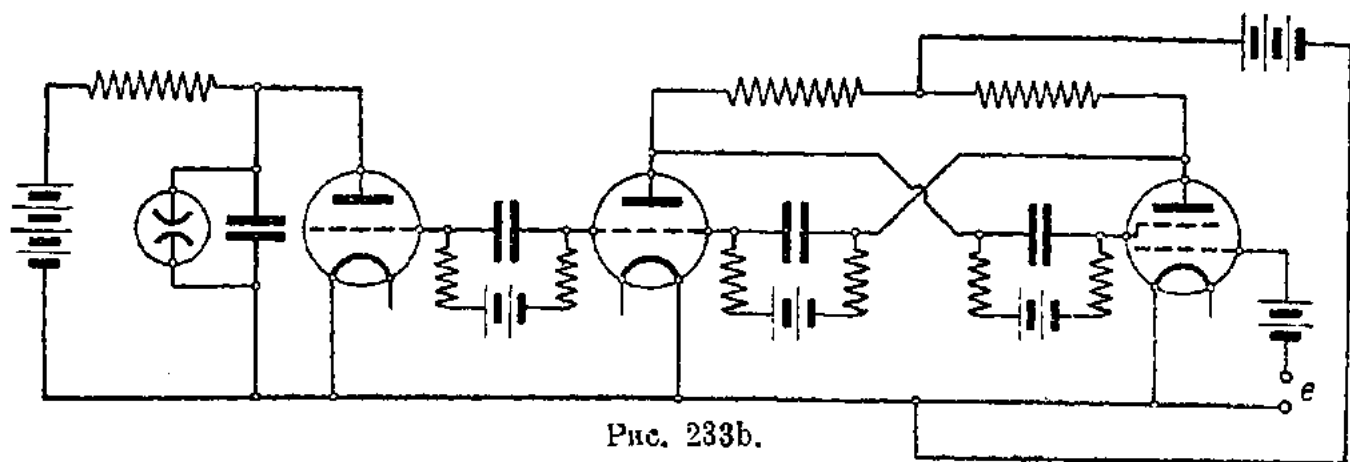


Рис. 233б.

некоторому отрезку кабеля, и длину этого отрезка подбирают так, чтобы, пока сигнал его пробегает, реле успело прийти в действие и устранить отрицательное напряжение, запирающее лампу.

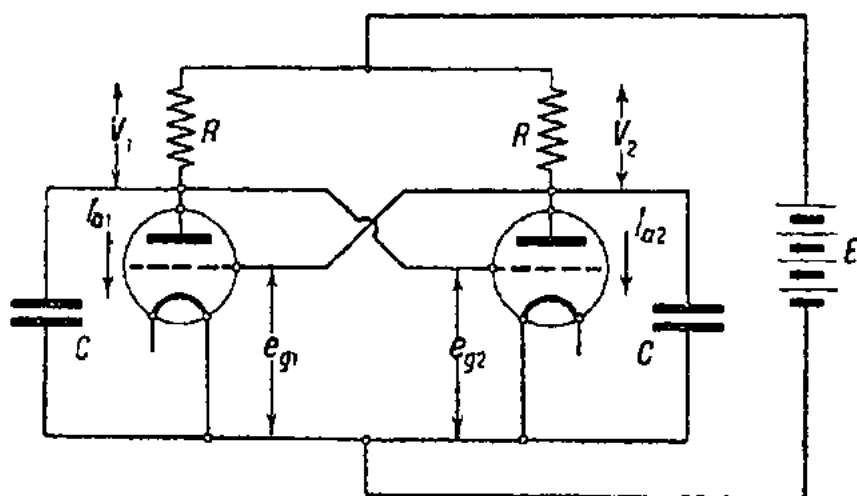


Рис. 233с.

рассмотреть теорию этого реле, мы разберем упрощенную схему (рис. 233с). Емкости C изображают схематически внутренние емкости ламп, именно: емкости между анодом и нитью. Для простоты мы считаем

Итак, мы сейчас займемся рассмотрением таких ламповых реле, которые носят название кинп-реле. Кинп-реле употребляются двух типов: одни, реагирующие на отрицательные напряжения, другие — на положительные. Мы рассмотрим только первый случай. Полная схема этого реле приведена на рис. 233б. Но, чтобы

схему симметричной, т. е. обе лампы и оба сопротивления совершенно одинаковыми. Уравнения такого реле напишутся так:

$$\frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1 - i_{a1}}{C} = 0, \quad \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2 - i_{a2}}{C} = 0, \quad (335)$$

где i_{a1} и i_{a2} — анодные токи соответственно I и II ламп, а V_1 и V_2 — падения напряжений на анодных сопротивлениях, отсчитываемые от «нулевого падения напряжения» $V_0 = Ri_0$ (i_0 — сила анодного тока лампы при $e_g = 0$). Далее, пренебрегая для упрощения задачи реакцией анода, мы будем считать, что анодный ток есть функция только напряжения на сетке (введение анодной реакции не внесет ничего принципиально нового в наше рассмотрение). Не учитывая анодной реакции,

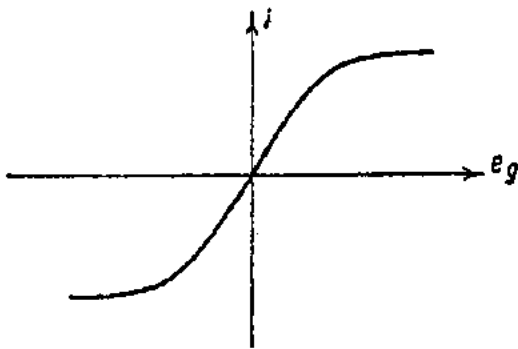


Рис. 234.

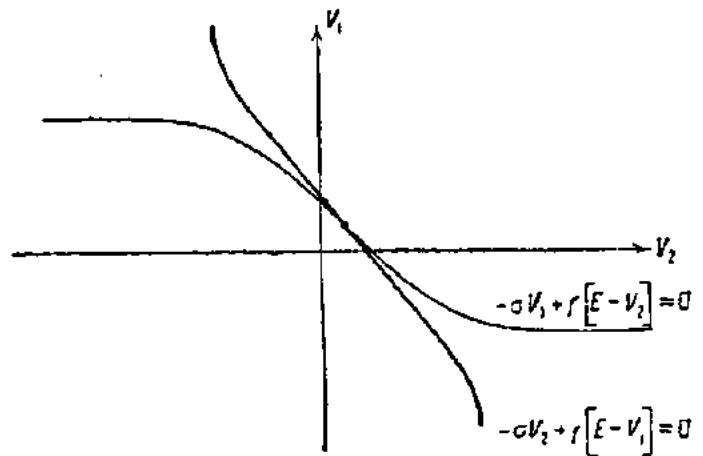


Рис. 235а.

мы можем, следовательно, ввести характеристику лампы в виде некоторой функции только от e_g , т. е. положить $i_{a1} = f(e_{g1})$ и $i_{a2} = f(e_{g2})$, где e_{g1} и e_{g2} — сеточные напряжения соответственно I и II ламп. Относительно характеристики $f(e_g)$ предположим, что она имеет вид изображенной на рис. 234, т. е. обладает следующими свойствами, которые мы уже неоднократно приписывали обычным характеристикам лампы:

- 1) $f(e_g) = -f(e_g)$, и, следовательно, $f(0) = 0$,
- 2) $\left(\frac{\partial f}{\partial e_g}\right)_{e_{g0}} = S$ и $S > 0$,
- 3) $\frac{\partial f}{\partial e_g} > 0$, причем если $|e_{ga}| > |e_{gb}|$, то $\frac{\partial f}{\partial e_{ga}} < \frac{\partial f}{\partial e_{gb}}$,
- 4) и, наконец, $f(e_g) \leq J_S$, т. е. характеристика ограничена и существует ток насыщения. Вводя в исходные уравнения характеристику лампы, можем привести эти уравнения к виду:

$$C \frac{dV_1}{dt} = -\sigma V_1 + f(E - V_2); \quad C \frac{dV_2}{dt} = -\sigma V_2 + f(E - V_1), \quad (336)$$

где $\sigma = \frac{1}{R}$, т. е. проводимость анодных сопротивлений. Положения равновесия определяются уравнениями:

$$-\sigma V_1 + f(E - V_2) = 0, \quad (336a)$$

$$-\sigma V_2 + f(E - V_1) = 0. \quad (336b)$$

Решение этих уравнений можно рассматривать как точки пересечения кривых (336a) и (336b). Легко видеть, что при сделанных нами предположениях относительно вида характеристики, этих точек пересечения может быть либо одна (рис. 235a), либо три (рис. 235b). (Это можно было бы вывести аналитически из условий, определяющих характеристику.) Одна точка пересечения, которая всегда существует, определяется условием $V_1 = V_2$. Действительно, уравнение

$$-cV + f(E - V) = 0 \quad (337)$$

всегда имеет одно и только одно решение, определяемое пересечением прямой $y = cV$ и кривой $y = f(E - V)$ (рис. 235c). Это решение, очевидно, удовлетворит уравнениям (336a) и (336b) при $V_1 = V_2$. При

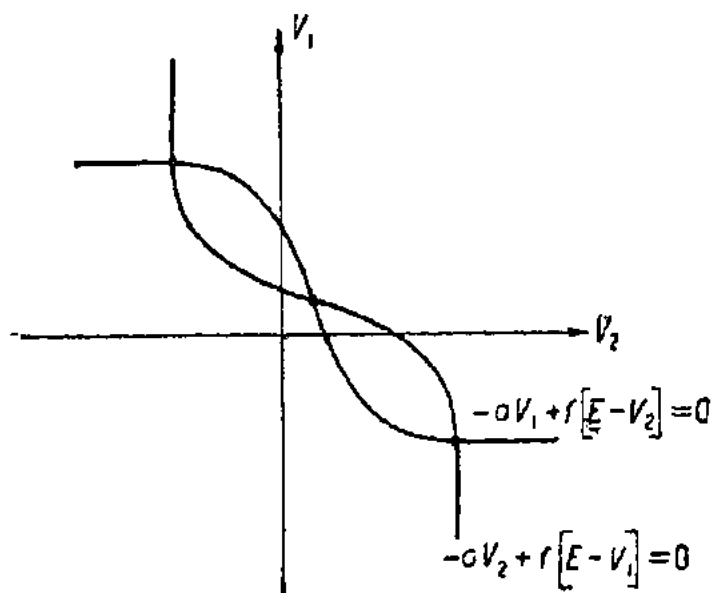


Рис. 235b.

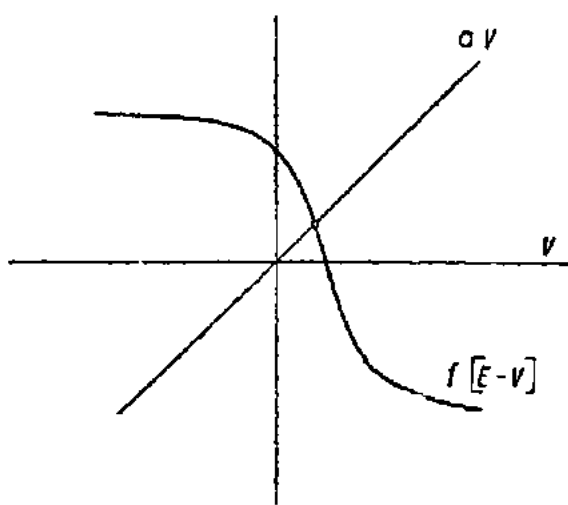


Рис. 235c.

некоторых определенных значениях параметра все три точки одновременно сливаются в одну; это критическое значение определяется условием:

$$\frac{1}{c} \left[\frac{\partial f(V)}{\partial V} \right]_{V=E-V_0} = -1 \quad \text{или} \quad \left[\frac{\partial f(V)}{\partial V} \right]_{V=E-V_0} = c, \quad (338)$$

где V_0 — решение уравнения (337). Точка пересечения будет одна, если

$$\left[\frac{\partial f(V)}{\partial V} \right]_{V=E-V_0} < c.$$

Перейдем теперь к исследованию устойчивости положений равновесия. Для этого составим уравнение первого приближения. Положим:

$$V_1 = V'_1 + V_1^0; \quad V_2 = V'_2 + V_2^0,$$

где V_1^0 и V_2^0 — значения напряжений, соответствующих данному состоянию равновесия. Уравнение первого приближения имеет вид:

$$\frac{dV'_1}{dV'_2} = \frac{-cV'_1 - \left[\frac{\partial f}{\partial V} \right]_{V=E-V_2^0} V'_2}{-cV'_2 - \left[\frac{\partial f}{\partial V} \right]_{V=E-V_1^0} V'_1}.$$

Характеристические показатели определяются уравнением:

$$\begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & -\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_2} \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_1} & -\sigma - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_1} \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_2}}.$$

Принимая во внимание, что $-\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_2}$ есть тангенс угла наклона касательной кривой (336a), а $-\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_1}$ — тангенс угла наклона касательной кривой (336b), легко убедиться, что положение равновесия V_0 , лежащее на прямой $V_1 = V_2$, устойчиво (устойчивый узел), если $\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_0} < \sigma$, и неустойчиво (седло), если имеет место обратное неравенство. Следовательно, это состояние равновесия устойчиво, если оно единственное, и неустойчиво, если состояний равновесия три; остальные два состояния равновесия в этом случае всегда устойчивы — это устойчивые узлы. Далее легко убедиться, что рассматриваемая система не допускает замкнутых контуров, составленных из целых траекторий; действительно, критерий Бендиксона дает:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -2\sigma \neq 0.$$

С другой стороны, прямая $V_1 = -V_2$ есть интегральная кривая. Нетрудно также видеть, что из бесконечности все кривые направлены внутрь; действительно, из уравнений (335) следует, что

$$C \frac{d}{dt} (V_1^2 + V_2^2) = -2\sigma (V_1^2 + V_2^2) + 2V_1 f(E - V_2) + 2V_2 f(E - V_1).$$

При достаточно больших значениях V_1 или V_2 правая часть всегда отрицательна.

Случаи $\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_0} < \sigma$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{V=E-V_0} > \sigma$ изображены схематически на фазовой плоскости V_1, V_2 соответственно на рис. 236a и 236b.

[Из уравнений (336) сразу видно, что кривая (336a) есть изоклина $\frac{dV_1}{dt} = 0$, а кривая (336b) есть изоклина $\frac{dV_2}{dt} = \infty$.]

Рассмотрим теперь, какое действие произведет внезапное включение отрицательного напряжения $-e$, которое мы будем считать постоянным. Это добавочное напряжение подводится к сетке одной из ламп, либо к специальной второй сетке (рис. 233b), либо к той же самой сетке, к которой подводится напряжение e_0 . Уравнения движения при наличии добавочного напряжения, подведенного к одной из ламп, имеют вид:

$$C \frac{dV_1}{dt} = -\sigma V_1 + f(E - V_2), \quad C \frac{dV_2}{dt} = -\sigma V_2 + f(E - V_1 - ke), \quad (339)$$

где k — некоторый коэффициент, зависящий от того, куда именно подведено напряжение e . Если напряжение e подводится к управляющей сетке, как на рис. 233b, то $k=1$. Для простоты мы будем дальше считать, что $k=1$. Положения равновесия определяются точками пересечения кривых:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma V_1 + f(E - V_2) &= 0, \\ -\sigma V_2 + f(E - e - V_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

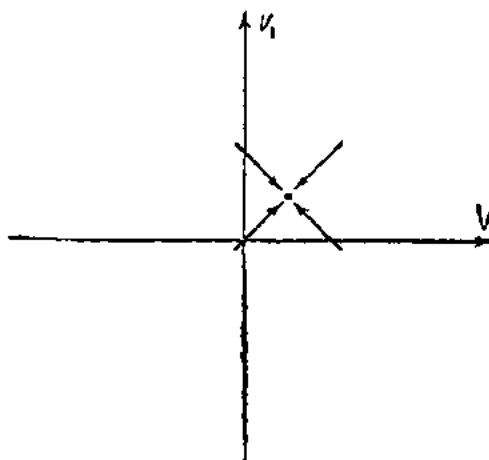


Рис. 236a.

Легко опять убедиться, что точек пересечения может быть либо одна, либо три; нетрудно также получить прежние результаты относительно устойчивости. Именно, если этих положений равновесия (точек пересечения) одно (рис. 237), то это — устойчивый узел, если их три, то одно из них седло и два других — устойчивые узлы.

Работу реле можно теперь описать следующим образом. Будем считать, что сигнал, на который должно отозваться реле, имеет прямоугольную форму. В начале работы реле устанавливается так, чтобы оно находилось в положении равновесия, соответствующем отрицательному значению $E - V_2$, т. е. отрицательному напряжению на сетке I лампы (левый узел на рис. 236b).

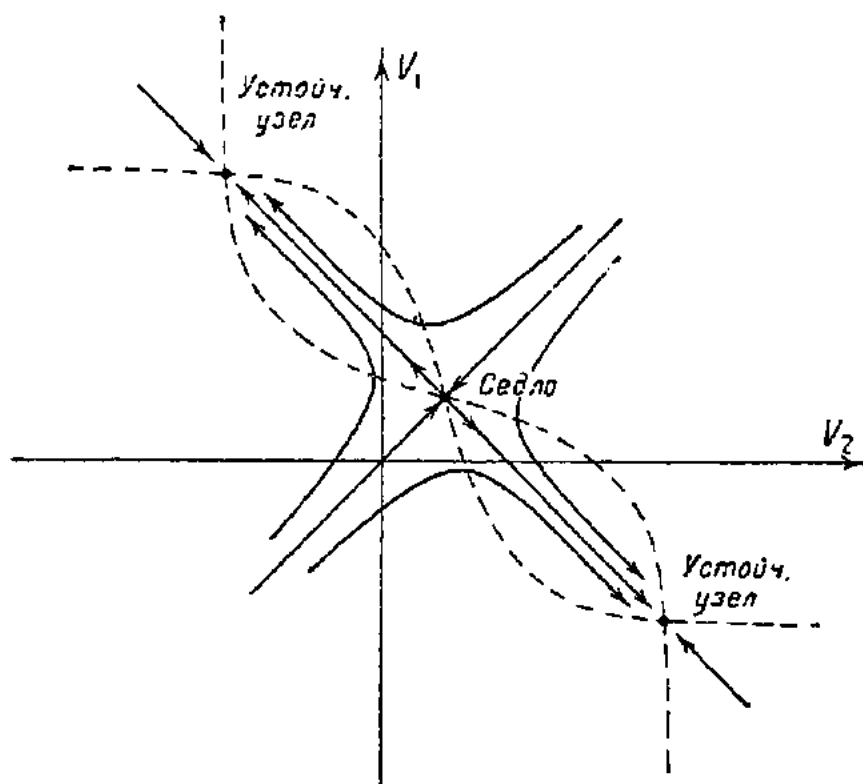


Рис. 236b.

Поэтому конденсатор временного отклонения не может разряжаться. Параметры системы подобраны так, что после включения сигнала получается случай, изображенный на рис. 236a.

Когда существует только одно устойчивое положение равновесия, соответствующее положительному напряжению на сетке I лампы, следовательно, когда сигнал действует, лампа открывается и конденсатор разряжается. По прекращении сигнала мы

имеем снова три положения равновесия, но теперь реле находится в положении равновесия, соответствующем положительному напряжению на сетке I лампы; таким образом сигнал открывает лампу, через которую разряжается конденсатор временного отклонения, причем по прекращении сигнала она остается открытой.

2. Включение динамомашин и моторов. Рассмотрим две параллельно включенных динамомашин последовательного возбуждения (рис. 239). Характеристика такой серийной динамомашин, т. е. кривая зависимости E от i , имеет вид, изображенный на рис. 239.

Обозначим зависимость в виде некоторой функции ψ , т. е. положим $E = \psi(i)$, и обозначим через ρ производную от E по i при $i = 0$, т. е. $\rho = \left(\frac{\partial E}{\partial i}\right)_{i=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)_{i=0}$.

Омические сопротивления r в обеих ветвях, т. е. внутренние сопротивления машин, мы считаем для простоты одинаковыми.

Характеристики обеих динамо-

машин мы также считаем одинаковыми. Уравнения, связывающие токи и напряжения в этой системе, напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} &= 0, \\ \psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (341)$$

Деля одно уравнение на другое, имеем:

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{L_1 \psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1}{L_2 \psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2}. \quad (342)$$

Состояния равновесия определяются уравнениями:

$$\psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1 = 0; \quad \psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2 = 0. \quad (343)$$

Прежде всего имеем состояние равновесия $i_1 = i_2 = 0$.

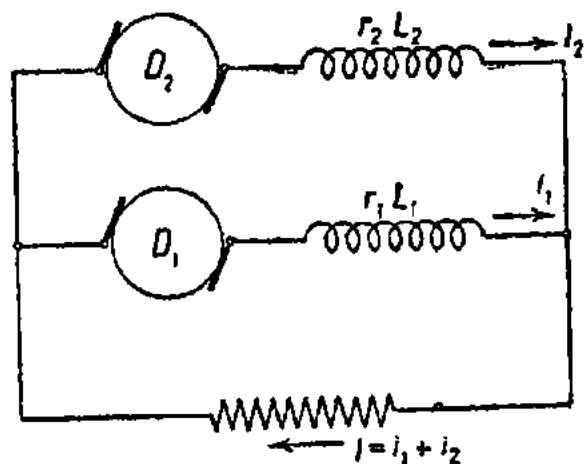


Рис. 238.

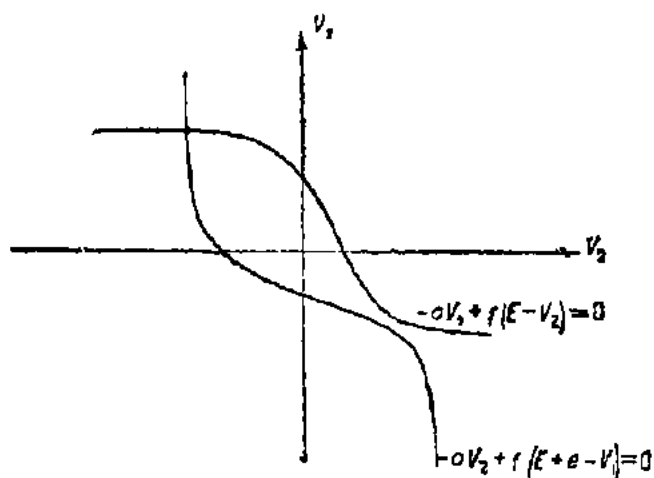


Рис. 237.

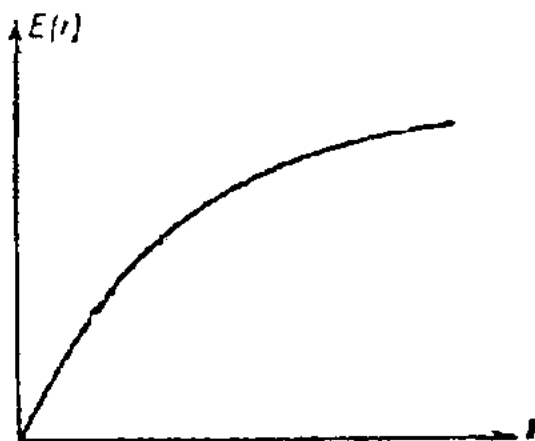


Рис. 239.

Число остальных состояний равновесия можно определить исследованием возможных точек пересечения кривых, изображенных на рис. 240.

Здесь могут встретиться четыре комбинации, изображенные на рис. 241 и занумерованные в той же последовательности:

1. Одна особая точка $i_1 = i_2$.
2. Три особые точки — одна $i_1 = i_2$ и две лежащие на прямой $i_1 = -i_2$.
3. Пять особых точек — одна $i_1 = i_2$, две лежащие на прямой $i_1 = -i_2$ и две лежащие на прямой $i_1 = i_2$.

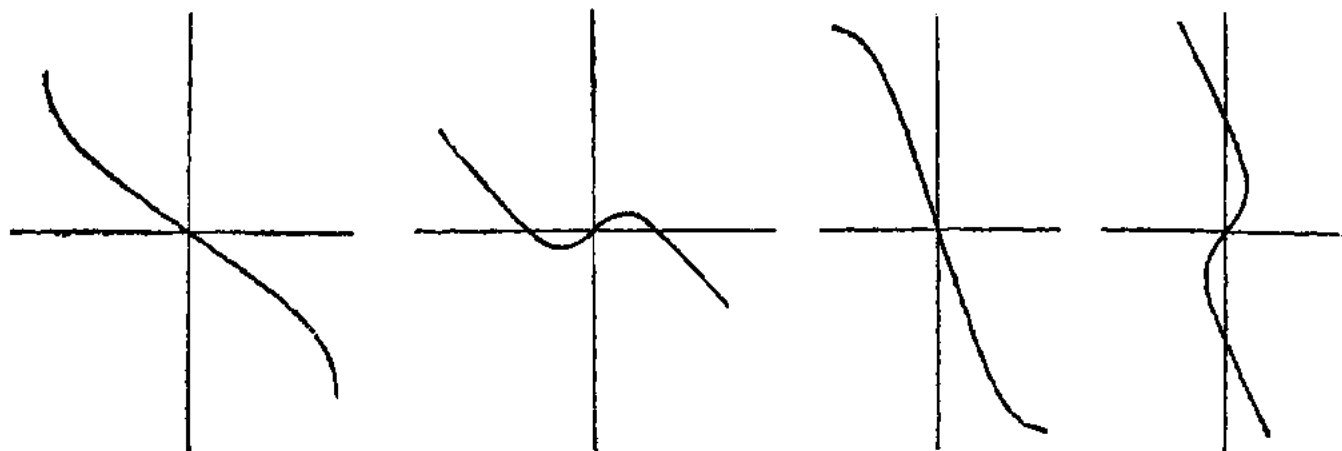


Рис. 240.

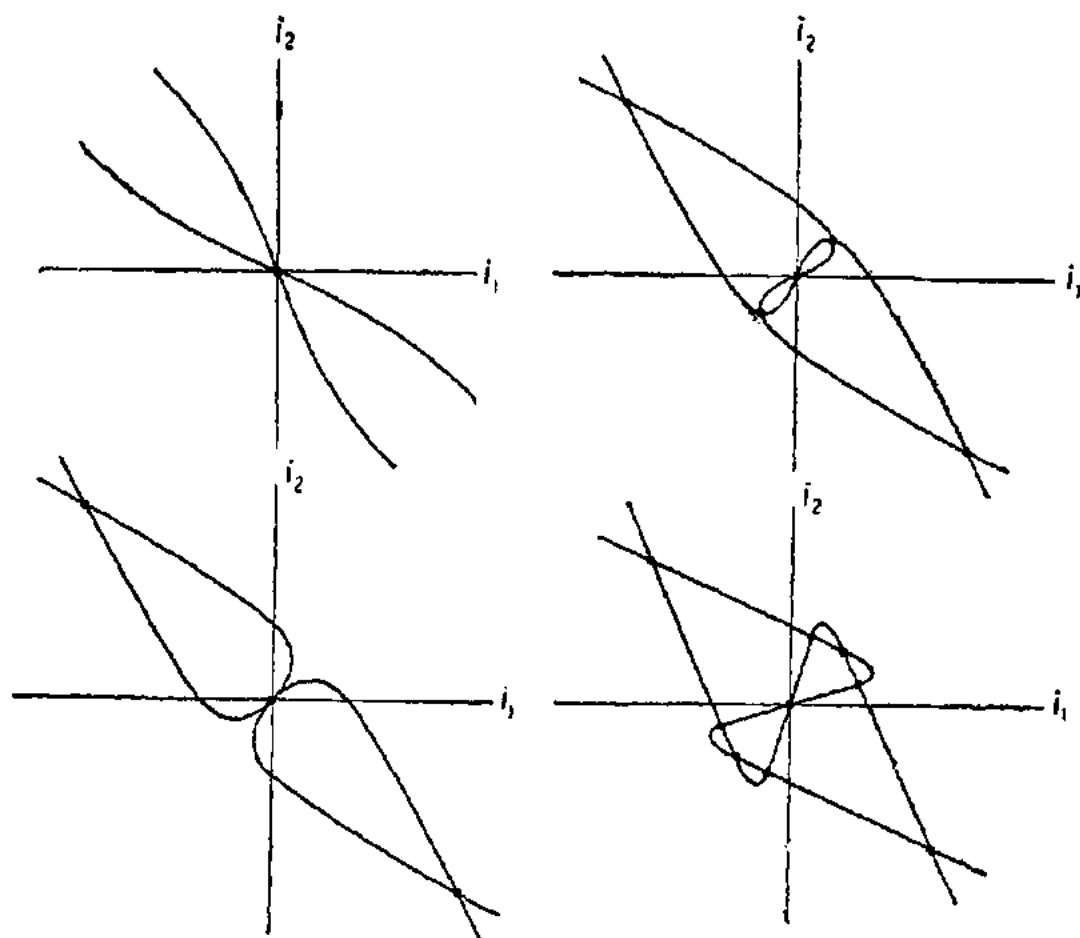


Рис. 241.

4. Девять особых точек — одна $i_1 = i_2$, две лежащие на прямой $i_1 = -i_2$, две лежащие на прямой $i_1 = i_2$ и еще четыре дополнительных, расположенных попарно по обе стороны от прямой $i_1 = i_2$.

Рассмотрим теперь особые точки, лежащие либо на прямой $i_1 = i_2$, либо на прямой $i_1 = -i_2$; на прямой $i_1 = i_2$ существуют две особые

точки (не считая $i_1 = i_2 = 0$), если $r + 2R < \rho$ или $r < \rho - 2R$. Эти точки определяются уравнением $\psi(i) = (r + 2R)i$ (рис. 242), т. е. пересечением кривой $y = \psi(i)$ и прямой $y = (r + 2R)i$. Это — как раз нужные состояния равновесия, так как при этом обе машины работают правильно, отдавая развиваемую мощность на сопротивление R . Если $r < \rho$, то существуют два состояния равновесия, соответствующие особым точкам, лежащим на интегральной кривой $i_1 = -i_2$ (рис. 241, № 2). Это — вредные состояния равновесия, так как при этом одна динамомашинка работает на другую и полезный ток во внешней нагрузке R есть $I = i_1 + i_2 = 0$.

Итак, если $r < \rho$, то существует одно состояние равновесия $i_1 = i_2 = 0$; если $\rho - 2R < r < \rho$, то существуют, кроме того, два состояния равновесия, лежащих на прямой $i_1 = -i_2$, определяемых уравнением $\psi(i) = ri$. Наконец, если $r < \rho - 2R$, то существуют, кроме того, еще два состояния равновесия, лежащих на интегральной кривой $i_1 = i_2$. Для того чтобы эти точки существовали, должно выполняться неравенство $\rho > 2R$. Могут существовать также особые точки, не лежащие на интегральных кривых $i_1 = i_2$ или $i_1 = -i_2$ (рис. 241, № 4).

Исследуем теперь устойчивость состояний равновесия.

1) Состояние равновесия $i_1 = i_2$. Уравнение первого приближения принимает вид:

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{L_1}{L_2} \frac{(\rho - r - R)i_2 - Ri_1}{-Ri_2 + (\rho - r - R)i_1}. \quad (344)$$

Уравнение, определяющее характеристические показатели, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \rho - r - R - \lambda & -R \\ -R & \rho - r - R - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda = \rho - r - R \pm R,$$

т. е.

$$\lambda_1 = \rho - r,$$

$$\lambda_2 = \rho - r - 2R.$$

Состояние равновесия устойчиво, если $r > \rho$ (устойчивый узел), и неустойчиво, если $r < \rho$, причем оно является седлом, если $\rho - 2R < r < \rho$, и неустойчивым узлом, если $r < \rho - 2R$.

2) $i_1 = -i_2 = i_0$. Уравнение первого приближения:

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{L_1}{L_2} \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)_{i=i_0} i_2 - (r + R)i_2 - Ri_1}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)_{i=i_0} i_1 - (r + R)i_1 - Ri_2}, \quad (345)$$

откуда

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)_{i=i_0} - r, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial i}\right)_{i=i_0} - r - 2R.$$

* λ_1 и λ_2 всегда отрицательны; вредные состояния равновесия всегда устойчивы.

3) $i_1 = +i_2 = i_0$. Попрежнему

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial i} \right)_{i=i_0}, -r, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial i} \right)_{i=i_0}, -r - 2R. \quad (846)$$

λ_2 всегда отрицательно, λ_1 может быть как отрицательно, так и положительно; в этом последнем случае все четыре рассматриваемые состояния равновесия, как вредные, так и полезные, устойчивы; но кроме этих состояний равновесия в этом случае появляется еще четыре добавочных особых точки (четыре седла). Общая картина интегральных кривых изображена на рис. 243, причем для отдельных положений сохранена та же нумерация, как и на рис. 241. Исследование характера четырех последних особых точек, не лежащих на прямой $i_1 = i_2$ или $i_1 = -i_2$, представляло бы довольно сложную задачу,

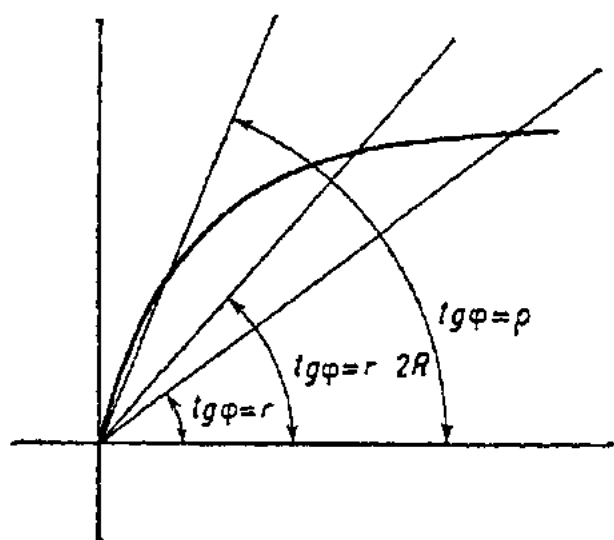


Рис. 242.

но на основании сформулированных нами выше теорем о совместном существовании особых точек очень легко заключить, что это — седла. Действительно, бесконечность абсолютно неустойчива, т. е. все интегральные кривые уходят из бесконечности, сумма индексов Пуанкаре должна, следовательно, равняться $+1$, но известные нам пять особых точек суть узлы, и сумма их индексов $+5$, следовательно, сумма индексов остальных четырех особых точек должна равняться -4 , но так как все точки простые, то это должны быть седла. Отсутствие замкнутых

траекторий следует хотя бы из того, что через все особые точки с индексом $+1$ проходят интегральные кривые, уходящие в бесконечность.

Итак, мы видим, что нормальное параллельное включение машин с последовательным возбуждением является неправильным, так как в этом случае одна машина будет работать на другую, во внешней же цепи ток будет отсутствовать. Правильным включением является скрещенное включение обмоток (рис. 244). В этом случае, как легко убедиться (что мы предоставляем читателям), устойчивыми состояниями равновесия будут являться только такие, при которых ток течет во внешней цепи, и неустойчивыми — такие, когда одна машина работает на другую.

§ 14. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости

При исследовании качественной картины фазовых траекторий в конкретных задачах весьма большую роль играет исследование поведения фазовых траекторий в достаточно удаленных частях фазовой

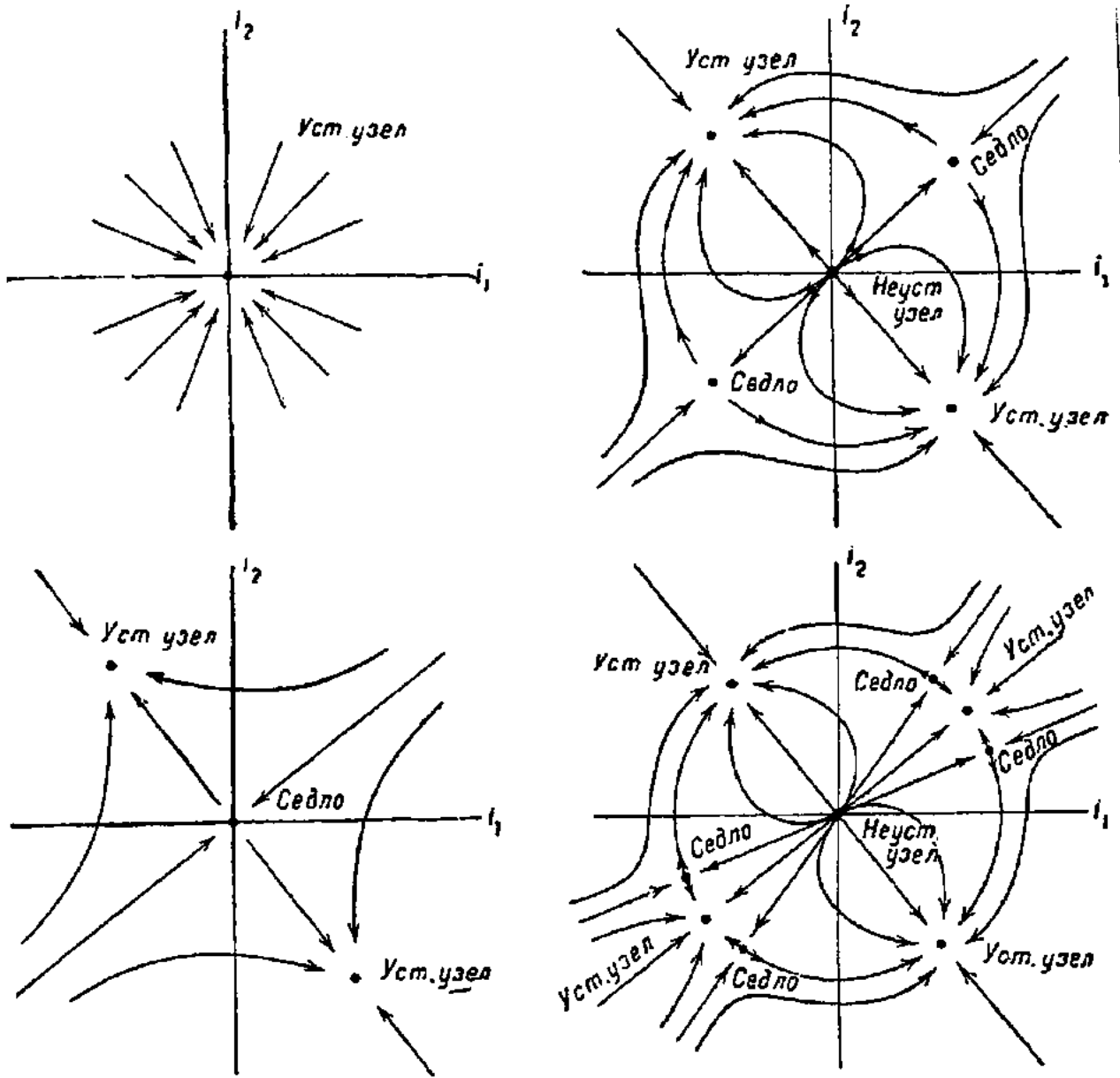


Рис. 243.

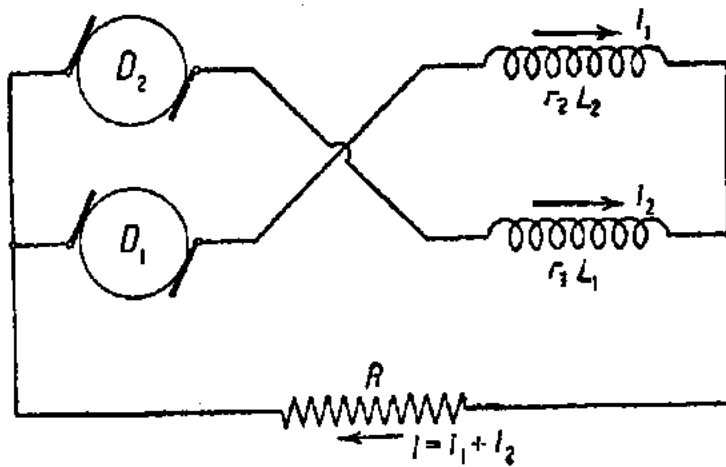


Рис. 244.

плоскости ¹⁾. Иногда этот вопрос решается весьма просто. Умножим первое уравнение системы (A) на x , второе на y и сложим. Мы получим тогда

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = P(x, y)x + Q(x, y)y = R(x, y).$$

Легко видеть, что если, начиная с некоторых значений x и y , $R(x, y)$ принимает определенный знак и сохраняет его, какие бы мы (достаточно большие по абсолютной величине) значения ни давали x и y , то ответ дается сразу. Именно, мы можем сразу сказать, что

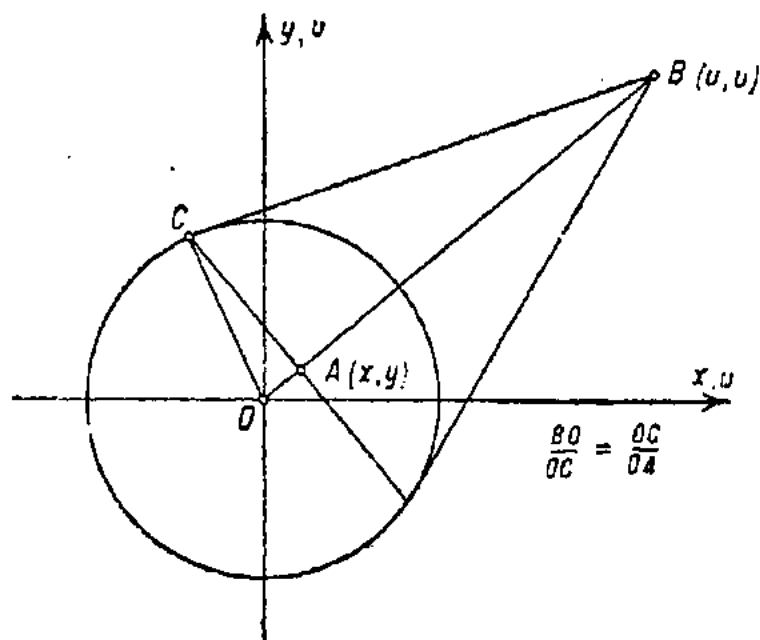


Рис. 245.

все достаточно большие круги с центром в начале координат служат циклами без прикосновения и что знак $R(x, y)$ (для достаточно больших x, y) определяет, будет ли бесконечность устойчива или неустойчива. Однако, вообще говоря, такой элементарный прием не дает ответа [$R(x, y)$ не сохраняет определенного знака], и вопрос требует специального исследования.

Таким образом возникает задача исследования хода фазовых траекторий в бесконечно удаленных частях плоскости. Кажется, что

можно просто решить задачу, совершив замену переменных, которая перевела бы бесконечно удаленную часть плоскости в конечную. Этого, например, можно достичь с помощью преобразования Бендиксона:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}; \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (347)$$

которое переводит бесконечно удаленные точки плоскости x, y в начало координат плоскости u, v . Геометрически это преобразование есть так называемое преобразование обратными радиусами (рис. 245).

Соблюсти верное направление по траекториям при этом нетрудно — достаточно провести преобразование не для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

но для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

¹⁾ Заметим, что здесь мы не коснемся ряда вопросов, представляющих интерес для общей теории, например вопроса о сожительстве особых точек различных типов на сфере Пуанкаре, вопроса об изображении траекторий на проективной плоскости и т. д.

Однако, несмотря на кажущуюся простоту, преобразование Бендиксона [1] приводит обычно к особой точке очень высокого порядка в начале координат плоскости x, y . В самом деле, каждая интегральная кривая плоскости x, y , уходящая в бесконечность (или выходящая из нее), преобразуется в интегральную кривую, входящую (выходящую) в начало координат плоскости x, y . Так как исследование особых точек высокого порядка обычно бывает весьма сложно, то способ Бендиксона применим лишь в очень редких случаях ¹⁾.

Поэтому вместо преобразования Бендиксона значительно удобнее пользоваться более сложным по идее, но приводящим к более простым выкладкам, преобразованием Пуанкаре [2]. Геометрическая основа

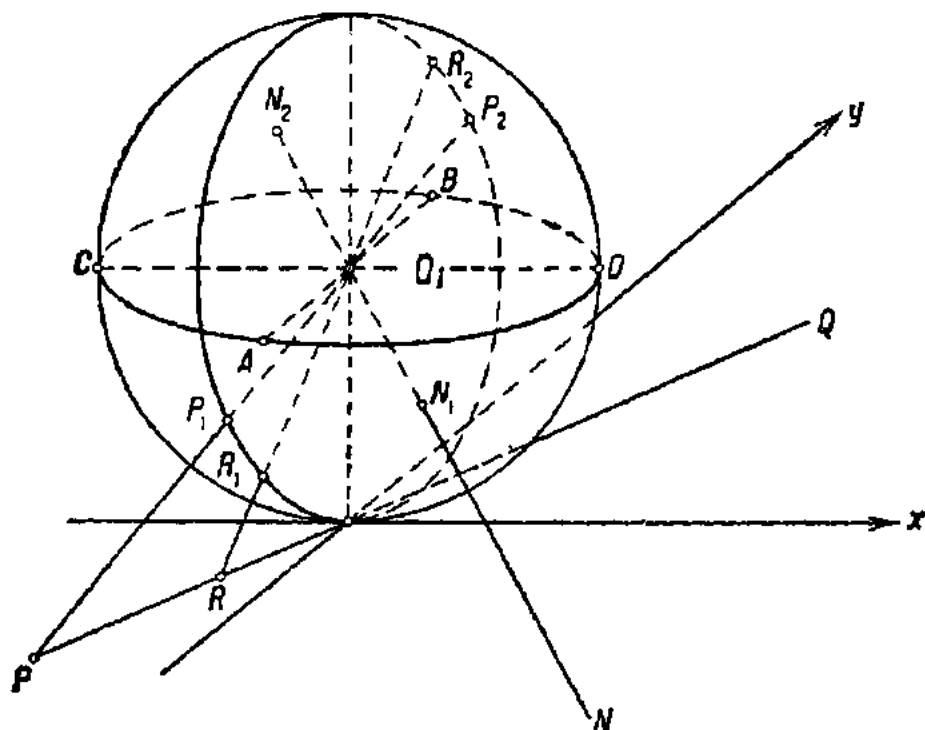


Рис. 246.

преобразования Пуанкаре заключается в отображении плоскости x, y на сферу радиуса 1, касающуюся плоскости x, y в начале координат (рис. 246). При этом точке N плоскости x, y ставятся в соответствие две точки сферы: N_1 и N_2 , лежащие на прямой O_1N , проходящей через центр сферы. Таким образом плоскость отображается дважды: на нижнее (южное) и верхнее (северное) полушария. На экватор (большой круг, параллельный плоскости x, y) отображаются бесконечно удаленные точки плоскости. По определению преобразования ясно, что прямые линии плоскости x, y перейдут в большие круги сферы, причем прямые, проходящие через начало координат, перейдут в большие круги, перпендикулярные экватору. Например, прямая PR преобразуется в большой круг, проходящий через точки P_1, R_1, P_2, R_2 на сфере. Интегральные кривые плоскости перейдут в соответственные кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид. Однако на сфере появятся новые особые точки, лежащие на экваторе.

¹⁾ Заметим, что, вообще говоря, и преобразование Бендиксона и приводящее к более простым выкладкам преобразование Пуанкаре целесообразно использовать лишь в тех случаях, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены по x, y .

Например, через точку C (и точку D) будут проходить все те интегральные кривые (точнее — их изображения), для которых $y' \rightarrow 0$ при неограниченном удалении от начала, а через точку A (и B) — те, для которых соответственно $y' \rightarrow \pm \infty$. Таким образом особые точки экватора могут не быть точками пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$, но определяются (и определяют собою) поведением интегральных кривых при неограниченном удалении от начала. Отсюда следует удобство этого изображения для определения хода кривых в бесконечности.

Остается выяснить вопрос об аналитическом аппарате, переводящем точки плоскости в точки сферы. Использование координат на сфере (долгот и широт) представляется неудобным, так как формулы перехода недостаточно просты и выражаются не алгебраически (благодаря чему можно излишне усложнить простое уравнение).

Поэтому Пуанкаре употребляет такие формулы преобразования:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{\tau}{z}. \quad (348)$$

Очевидно, что $\tau = \frac{y}{x}$ есть тангенс направления на исследуемую точку.

Координатные линии $z = \text{const.}$ и $\tau = \text{const.}$ суть на плоскости прямые, параллельные оси y , и прямые, проходящие через начало координат. На сфере же они являются большими кругами, проходящими через диаметр AB ($z = \text{const.}$) или OO' ($\tau = \text{const.}$). Очевидно, что эти круги не будут взаимно перпендикулярны. Только в окрестности экватора ($z = 0$), за исключением малых кусков вблизи точек A и B , можно считать, что они перпендикулярны. Можно построить плоскость, на которой z и τ будут служить прямоугольными декартовыми координатами: это будет касательная плоскость к сфере, проходящая через исследуемую точку на экваторе. Ось τ будет прямой, лежащей в плоскости экватора и направленной в сторону положительной оси y . Ось z пойдет вертикально вниз. Точки этой плоскости τ, z получим, проектируя точки сферы из ее центра O_1 . Очевидно, что на этой плоскости τ, z будет удобно изучать все бесконечные точки плоскости x, y , кроме «концов» оси y , изображаемых на сфере точками A и B , и их окрестностей. Для рассмотрения этих точек придется сделать другое преобразование:

$$y = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{\tau}{z}. \quad (349)$$

Все чертежи будут аналогичны, и ясно, что совокупность обоих преобразований даст поведение интегральных кривых вблизи экватора. Окончательно мы можем получить ясное представление о ходе интегральных кривых, рассматривая из точки O_1 нижнее (южное) полушарие сферы. Проектируя затем нижнее полушарие при помощи ортогональной проекции на касательную плоскость к нижнему (южному) полюсу, можем весь ход интегральных кривых очень удобно отобразить на внутренности круга. Преобразуем теперь исходное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

в координатах Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$ и $y = \frac{\tau}{z}$. Имеем:

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad dy = \frac{z d\tau - \tau dz}{z^2}$$

и

$$\frac{dz}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z^2, \quad \frac{d\tau}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)\tau z + Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z \quad (350)$$

и, наконец, деля одно на другое, исключаем время:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z}{\frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} - \tau} \quad (351)$$

Чтобы исследовать бесконечно удаленные точки, лежащие у «концов» оси y , нужно, как мы уже говорили, воспользоваться преобразованием (349). В этом случае уравнения (350) и (351) принимают соответственно вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z^2, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)\tau z + P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{-z}{\frac{P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)} - \tau} \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

Из (351) видно, что если не имеет места тождество $Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) = \tau P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)$, то экватор, определенный уравнением $z=0$, есть интегральная кривая. В случае, если $Q = \tau P$, решение будет $\tau = \text{const.}$, и, следовательно, все интегральные кривые пересекают под прямым углом экватор. Особые точки, лежащие на экваторе, определяются

соотношениями $z=0, \frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau$. Особые точки, лежащие у «кон-

цов» оси y , должны быть исследованы по уравнениям (352). Такая особая точка ($z=0, \tau=0$) существует, если одновременно выполнены условия

$$z=0, \quad \frac{P\left(0, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(0, \frac{1}{z}\right)} = 0. \quad (353)$$

Исследование характера и устойчивости найденных таким образом бесконечно удаленных особых точек производится обычным методом. Для примера рассмотрим случай простого линейного осциллятора с трением, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\frac{dy}{dt} = -hy - \omega^2 x = Q(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = y = P(x, y). \quad (354)$$

Бесконечно удаленные особые точки определяются соотношениями:

$$z = 0, \quad \frac{-h\tau - \omega^2}{\frac{\tau}{z}} = \tau \quad \text{или} \quad -h\tau - \omega^2 - \tau^2 = 0,$$

откуда

$$\tau = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega^2}. \quad (355)$$

Легко убедиться, что особых точек, лежащих на «бонцах» оси y , не существует. Действительно:

$$\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{h}{z}} = -\frac{1}{h} \neq 0.$$

Так как экватор есть интегральная кривая, то возможны два случая: либо экватор есть предельный цикл ($\frac{h^2}{4} < \omega^2$ и бесконечно удаленных особых точек нет), который, очевидно, будет устойчив, если $h < 0$, и неустойчив, если $h > 0$; либо, наконец, на экваторе существуют четыре особых точки, попарно диаметрально противоположно расположенных, угловые коэффициенты направления которых даются выражениями:

$$\tau_1 = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega^2} < 0; \quad \tau_2 = -\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega^2} < 0.$$

Этот случай будет иметь место, если

$$\frac{h^2}{4} > \omega^2.$$

Для определения устойчивости особых точек положим

$$z = \xi, \quad \tau = \tau_i + \eta.$$

Подставляя эти значения в уравнения (350), имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = -(\tau_i + \eta)\xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -(\tau_i + \eta)^2 - h(\tau_i + \eta) - \omega^2,$$

или, наконец, пренебрегая членами высших порядков:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\tau_i \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -2\tau_i \eta - h\eta. \quad (356)$$

Характеристические показатели λ определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\tau_i - \lambda & 0 \\ 0 & -2\tau_i - h - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (357)$$

откуда

$$\lambda_1 = -\tau_i, \quad \lambda_2 = -2\tau_i - h. \quad (358)$$

Итак, λ_1 всегда положительна, т. е. особые точки в бесконечности все неустойчивы

$$\lambda_2 \text{ для } \tau_1 \text{ равно } -2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega^2},$$

т. е. точка τ_1 есть седло.

$$\lambda_2 \text{ для } \tau_2 \text{ равно } +2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega^2},$$

т. е. τ_2 есть неустойчивый узел. На рис. 247 изображено поведение интегральных кривых в бесконечности для случая $\frac{h^2}{4} < \omega^2$. На рис. 248

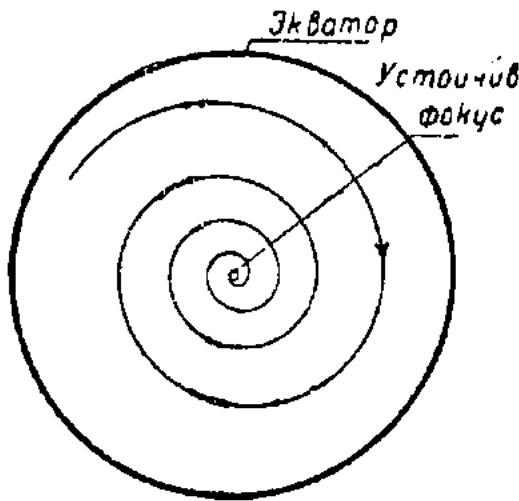


Рис. 247.

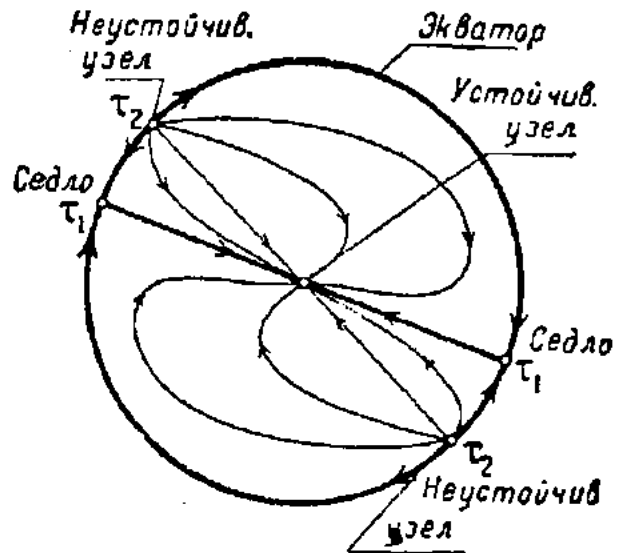


Рис. 248.

изображена та же ортогональная проекция сферы на плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, для случая $\frac{h^2}{4} > \omega^2$.

Исследование бесконечности иногда позволяет однозначно ответить на вопрос о существовании в рассматриваемой системе предельного цикла. Действительно, пусть мы знаем, что бесконечность абсолютно неустойчива. Тогда, если единственная особая точка на конечном расстоянии — неустойчивый узел и фокус, то на основании общей теории,

изложенной в § 9, у нас непременно должен быть по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Покажем применение этого приема в конкретном физическом случае, доказав существование предельного цикла для простейшей автоколебательной схемы с колебательным контуром в цепи сетки (см. подробнее гл. VII).

Уравнение Кирхгофа для тока в колебательном контуре (в обычных обозначениях) имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \int \frac{i dt}{C} = M \frac{dI_a}{dt}.$$

Аппроксимируем характеристику лампы функцией arctg :

$$I_a = I_0 + \frac{2I_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S_0 \pi}{2I_s} v_g,$$

где I_s — ток насыщения, S_0 — крутизна характеристики в средней точке, $v_g = \int \frac{i dt}{C}$ — сеточное напряжение. Тогда уравнения движения, записанные в обычной форме:

$$\frac{dv_g}{dt} = \frac{i}{C} = P(v_g, i); \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{v_g}{L} + \frac{MS_0 i}{LC \left[1 + \frac{S_0^2 \pi^2 v_g^2}{4I_s^2} \right]} = Q(v_g, i);$$

полагая $v_g = \frac{1}{z}$, $i = \tau$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\tau z}{C}; \quad \frac{d\tau}{dt} = \left(-\frac{M}{LC} z^2 \frac{S_0}{1 + \frac{S_0^2 \pi^2}{4I_s^2 z^2}} - \frac{R}{L} \right) \tau - \frac{1}{L} - \frac{\tau^2}{C}. \quad (359)$$

Легко видеть, что для системы (359) характер состояний равновесия, расположенных на оси $z=0$, такой же, как для системы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\tau z}{C}; \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{R\tau}{L} - \frac{1}{L} - \frac{\tau^2}{C}. \quad (360)$$

Уравнения (360) совершенно не зависят от характеристики, следовательно, поведение фазовых траекторий исходной системы в бесконечности должно быть совершенно такое же, как у гармонического осциллятора с частотой $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и затуханием $\frac{R}{L}$, а такой случай мы только что исследовали и знаем, что бесконечность в этом случае неустойчива. Следовательно, если единственная особая точка, находящаяся на конечном расстоянии, неустойчива, то уравнение лампового генератора обязательно имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Ориентировочный, с точностью до четного числа циклов (полуустойчивый цикл считается за два), вид проекции сферы Пуанкаре на

плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, изображен на нижеследующих рис. 249 и 250.

Итак, исследуя поведение интегральных кривых в удаленных частях плоскости, мы доказали, что уравнение лампового генератора имеет по крайней мере один предельный цикл. Прежде всего сам собой напрашивается вопрос: какой смысл этого доказательства, для чего оно нужно? Ведь известно, что в ламповом генераторе при рассматриваемых нами условиях происходят колебания, зачем же это доказывать? Но мы ведь вовсе не имели в виду доказывать, что в реальном ламповом генераторе происходят колебания. Мы доказали только, что та математическая модель, которая соответствует нашему идеализированному генератору, допускает устойчивый периодический процесс. Если бы оказалось, что наше уравнение не имеет предельного

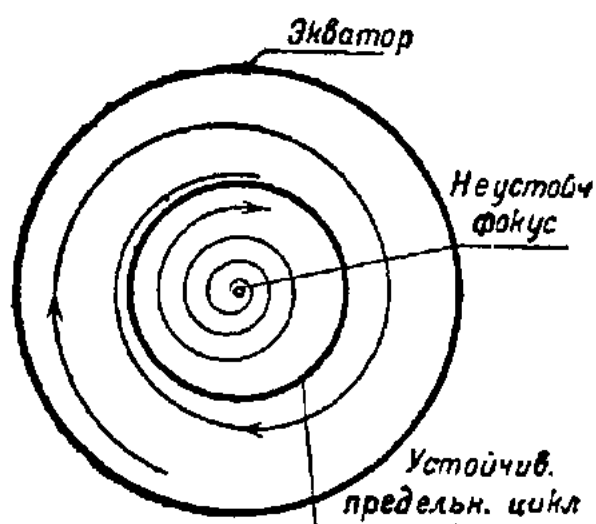


Рис. 249.

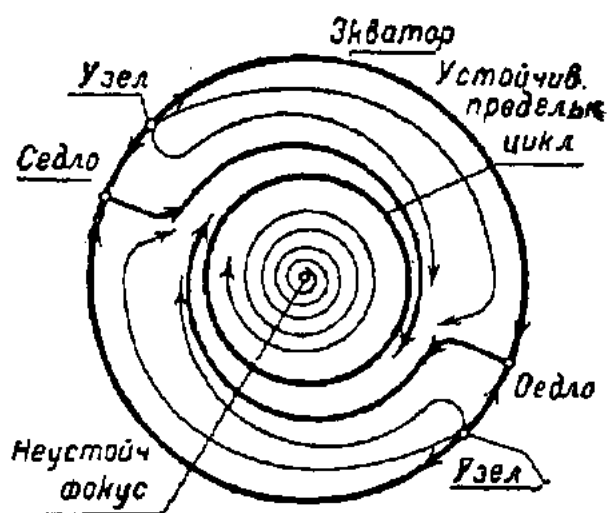


Рис. 250.

цикла, это значило бы, что мы не учли какого-нибудь существенного обстоятельства, обуславливающего возможность непрерывных автоколебаний в реальной системе, и наша идеализация, следовательно, не пригодна. Физическая ценность всякого строгого рассмотрения и в частности строгого решения вопроса о существовании предельных циклов именно в том и заключается, что сопоставление результатов этого рассмотрения с данными опыта позволяет судить, насколько целесообразна наша исходная идеализация, не упущены ли те или иные существенные для рассматриваемого вопроса моменты. При нестрогом же рассмотрении мы никогда не можем знать, что именно является причиной несоответствия между теорией и опытом — неправильная исходная идеализация или допущенные при рассмотрении нестрогости. Однако физическая ценность нашего рассмотрения, несмотря на его математическую безупречность, все же невелика. Действительно, ведь исследуемое нами уравнение имеет физический смысл, т. е. достаточно точно описывает поведение реальной системы, только если токи и напряжения в системе не слишком велики. Ведь когда мы, например, принимаем, что для достаточно больших значений имеет место насыщение, то нельзя это утверждение экстраполировать для значений сколь угодно больших, ибо при очень больших напряжениях появляются, например, большие

сеточные токи, которыми мы пренебрегли, и ряд других обстоятельств, не учтенных нами. Поэтому если мы строго убедились в существовании предельного цикла, то, чтобы определить физическую ценность этого утверждения, необходимо хотя бы приблизительно определить его место на фазовой плоскости, с тем чтобы убедиться, что он лежит в области, для которой наша идеализация еще справедлива.

§ 15. Оценка месторасположения предельных циклов

Общих методов для решения вопросов о существовании предельных циклов, определения числа и хотя бы приближенного места расположения предельных циклов до настоящего времени не существует; исключения представляют только так называемые случаи малого параметра, где все эти вопросы могут быть количественно исследованы методом возмущений; этот последний случай будет рассмотрен ниже. Поэтому при решении той или иной задачи приходится главным образом рассчитывать на опыт и интуицию исследователя. При этом для каждого типа задачи приходится изобретать специальные методы, а в крайнем случае прибегать к численному интегрированию или графическому интегрированию при помощи метода изоклин. Последние методы, конечно, обычно приводят к цели, однако их неудобства заключаются в том, что параметрам приходится давать численное значение. Между тем часто особенно интересным является зависимость характера движения от параметров системы, которых может быть несколько. В общих чертах современное состояние теории исследования предельных циклов можно, например, сравнить с теорией шахматной игры: не существует общей теории игры, пользуясь которой заведомо можно выиграть партию, однако существует много различных вариантов, пользуясь которыми опытный игрок может при определенном сложившемся положении довести партию до выигрыша.

В основном методы исследования предельных циклов заключаются в следующем: выбирают некоторое число особых точек системы, сумма индексов Пуанкаре которых равна $+1$ (только такая совокупность особых точек может находиться внутри предельного цикла), и окружают их двумя замкнутыми кривыми, из которых одна охватывает другую так, что в кольцеобразной области между ними нет особых точек. Тогда, если вектор скорости изображающей точки на фазовой плоскости на этих кривых направлен внутрь кольцеобразной области, заключенной между ними, точнее, нигде не направлен наружу, то можно сказать, что существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, заключенный в этой кольцеобразной области¹¹. Если вектор скорости на обеих кривых везде направлен наружу (или, точнее говоря, нигде не направлен внутрь), то существует по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, заключенный в этой кольцеобразной области. Если удалось найти n таких кольцеобразных областей, то можно утверждать, что существует по крайней мере n предельных циклов. Если на какой-нибудь замкнутой кривой вектор скорости направлен либо везде наружу, либо везде внутрь, то ясно, что он не может касаться замкнутой кривой; следовательно, такие кривые являются циклами без

прикосновений. Если на какой-нибудь кривой вектор скорости везде направлен по одну сторону кривой кроме некоторого числа точек, где он касается, то, очевидно, мы имеем дело с соприкосновением точного четного порядка (рис. 251), при котором интегральная кривая пересекает замкнутую кривую. С интересующей нас точки зрения такая кривая принципиально ничем не отличается от цикла без прикосновения, поэтому такие кривые с соприкосновением точного четного порядка мы также включим в класс циклов без прикосновения. Если внутри такого цикла без прикосновения нет устойчивых особых точек и вектор скорости на нем везде направлен внутрь, то мы можем сказать, что существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, заключенный внутри нашего цикла без прикосновения. Точно так же, если бесконечность неустойчива и существует цикл без прикосновений, на котором вектор скорости направлен везде наружу и вне которого нет устойчивых особых точек, то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, расположенный в области, лежащей вне цикла без прикосновений. Аналогичные рассуждения можно привести для исследования неустойчивых предельных циклов, только в этом случае нужно рассматривать противоположное направление вектора скорости. Как мы уже говорили, общих методов для отыскания таких циклов без прикосновений не существует. Однако для некоторых задач приносит пользу метод, принадлежащий Пуанкаре^[2], так называемый *метод контактной кривой*. К изложению этого метода мы сейчас и перейдем.



Рис. 251.

Рассмотрим систему замкнутых непересекающихся кривых, сплошь заполняющих плоскость

$$F(x, y) = C. \quad (361)$$

Назовем эту систему кривых топографической системой; найдем кривую, являющуюся геометрическим местом точек прикосновения кривых топографической системы с интегральными кривыми; эту кривую назовем кривой контактов. Предположим, что топографическая система выбрана так, что кривая контактов замкнута; проведем наибольшую и наименьшую кривые топографической системы, касающиеся кривой контактов. Все кривые топографической системы, лежащие вне такой наибольшей кривой и внутри наименьшей кривой, будут, очевидно, циклами без прикосновений. Следовательно, если предельные циклы существуют, то они расположены в кольцеобразной области, ограниченной двумя кривыми. Достаточным условием существования по крайней мере одного цикла будет условие, чтобы вектор фазовой скорости на обеих кривых был направлен или везде наружу, или везде внутрь соответствующей кольцеобразной области.

Если динамическая система описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (362)$$

то уравнение кривой контактов будет:

$$\frac{P}{Q} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}. \quad (363)$$

В частном случае, если топографическая система есть семейство концентрических кругов с центром в начале координат, т. е. $F(x, y) = x^2 + y^2 = C$, то уравнение кривой контактов принимает вид:

$$\frac{P}{Q} = - \frac{y}{x}.$$

Если динамическая система описывается уравнениями в полярных координатах:

$$\frac{dr}{dt} = R(r, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(r, \varphi), \quad (364)$$

а кривые топографической системы определяются уравнением:

$$\frac{dr}{d\varphi} = F(r, \varphi), \quad (365)$$

то уравнение кривой контактов будет:

$$\frac{R(r, \varphi)}{\Phi(r, \varphi)} = F(r, \varphi). \quad (366)$$

В частном случае, если топографическая система есть система концентрических кругов с центром в начале координат, то уравнение кривой контактов имеет вид:

$$R(r, \varphi) = 0.$$

Следовательно, радиусы кругов топографической системы, касающиеся кривой контактов, в этом случае находятся из уравнений:

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0, \quad R(r, \varphi) = 0.$$

Ясно, что если кривая контактов не имеет действительных ветвей, то предельных циклов заведомо не существует.

Все сказанное можно применить к исследованию уравнения, описывающего обыкновенный ламповый генератор в случае мягкого режима. На выводе так называемого «приведенного» уравнения лампового генератора или уравнения ван-дер-Поля мы сейчас останавливаться не будем, так как этот вопрос будет рассмотрен нами дальше (в гл. VII). Сейчас же мы прямо приведем это уравнение ван-дер-Поля, к которому может быть сведено при некоторых ограничивающих предположениях уравне-

ние лампового генератора в случае кубической характеристики. Это уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} = -x + \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

или

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -x + \epsilon(1 - x^2)y.$$

За семейство топографических кривых выберем систему концентрических окружностей с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Тогда уравнение контактной кривой имеет вид:

$$y[-x + \epsilon(1 - x^2)y] = -xy$$

или

$$y^2(1 - x^2) = 0.$$

Так как корень $y = 0$ есть двойной, то, следовательно, ось абсцисс есть, вообще говоря (за исключением $x = \pm 1$), геометрическое место двойных прикосновений (точных четных контактов), и, следовательно, эта ветвь контактной кривой нас не интересует¹⁾. Итак, мы имеем две ветви контактной кривой $x = +1$ и $x = -1$ (рис. 252).

Наименьшая кривая топографической системы, касающаяся кривой контактов, есть круг радиуса 1; наибольшая — бесконечно удаленная окружность. Следовательно, предельный цикл, если он существует, заключен в области между бесконечностью и окружностью радиуса 1. Таким образом метод кривой контактов позволит оценить, хотя и весьма неполно, месторасположение предельного цикла. Этот результат в дальнейшем, при рассмотрении физической стороны вопроса, станет совершенно очевидным, так как $x < 1$ соответствует «отрицательному трению», а $x > 1$ — положительному.

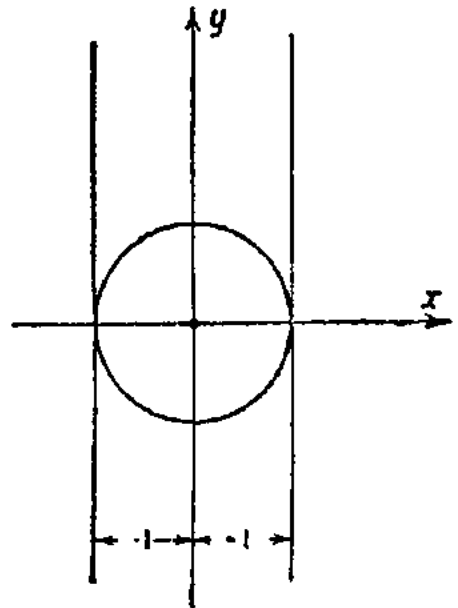


Рис. 252.

Рассмотрим еще пример, относящийся к случаю, когда фазовая поверхность есть цилиндр, а именно, рассмотрим колебания маятника с трением, находящегося под действием постоянного момента

$$I\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + h\dot{\varphi} = P.$$

¹⁾ Эти утверждения легко проверить простым дифференцированием, отыскивая $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ для интегральной кривой и для окружности в точках оси x .

Совершенно в такому же уравнению приводят исследования работы синхронного двигателя. За топографическую систему выберем семейство параллелей на цилиндре $\dot{\varphi} = \text{const}$. Тогда кривая контактов имеет вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{P - mgl \sin \varphi}{h};$$

верхние и нижние из параллелей, касающиеся кривой контактов, суть

$$\frac{P + mgl}{h} \quad \text{и} \quad \frac{P - mgl}{h}$$

(P предполагается положительным). Следовательно, предельный цикл, если он существует, заключен в пределах:

$$\frac{P - mgl}{h} < \dot{\varphi} < \frac{P + mgl}{h}.$$

Нам не известны реальные физические примеры автономных систем, описываемых двумя уравнениями первого порядка, где при помощи кривой контактов можно было бы сколько-нибудь удовлетворительно решить вопрос о месторасположении предельных циклов. Во второй части этой книги, где будет идти речь о действии внешней силы на автоколебательные системы, мы дадим несколько примеров применения контактной кривой в реальных задачах (см. [31]). Однако там вопрос будет идти не о качественном интегрировании самих уравнений движения, которые, конечно, неавтономны, а об интегрировании некоторой автономной вспомогательной системы уравнений.

Заметим еще следующее. Для частных видов дифференциальных уравнений типа (А) иногда удается доказать наличие или отсутствие предельных циклов при помощи соображений, специфичных для данного уравнения, не опираясь на общую теорию. Такой анализ, представляющий большой физический интерес, был дан Льенаром [30] для уравнения катодного генератора при некоторых упрощающих соображениях о симметрии характеристики.

§ 16. Приближенные методы интегрирования

Как мы уже неоднократно указывали, до сего времени не существует регулярных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в общем виде, а вместе с тем и строгих методов построения фазового портрета исследуемой нелинейной динамической системы. Поэтому для исследования конкретной динамической системы часто наиболее простым (а иногда и единственным) является метод приближенного графического интегрирования, т. е. метод построения приближенного фазового портрета данной динамической системы. Конечно, метод графического интегрирования, как и другие подобные методы, требует задания определенных численных значений для всех параметров системы или в лучшем случае заданий численных значений комбинаций из этих параметров. Это — существенный недостаток всяких методов численного инте-

рирования, ограничивающий общность результатов и затрудняющий обзорение всей проблемы в целом. Поэтому там, где возможно применение аналитических методов, может быть, даже и сложных, их всегда следует предпочесть методам численного интегрирования. Однако к рассматриваемым нами проблемам аналитические методы исследования могут быть применены только при известных ограничивающих условиях (именно при условии малости характеризующего «неконсервативность» параметра μ), которые не могут быть соблюдены в целом ряде автоколебательных устройств, в частности в таких устройствах, которые не содержат обычных колебательных контуров. Это и есть один из тех случаев, когда метод приближенного графического интегрирования оказывается единственно возможным. Наиболее подходящим для наших целей приемом приближенного графического интегрирования является метод изоклин. Суть этого метода заключается в следующем¹⁾. Поведение рассматриваемых нами систем после исключения времени описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R(x, y)}{P(x, y)} = f(x, y). \quad (367)$$

Кривые $f(x, y) = C$ на фазовой плоскости представляют собой геометрическое место таких точек, через которые все отыскиваемые нами интегральные кривые проходят под одним и тем же углом к оси абсцисс, именно под углом, тангенс которого равен C . Поэтому кривые $f(x, y) = C$ и носят название изоклин (кривых равного наклона). Придавая C различные численные значения [значения параметров системы, входящих в уравнение (367), также должны быть численно заданы], мы можем построить на фазовой плоскости семейство изоклин разыскиваемых интегральных кривых (рис. 253). Для каждой из изоклин известен тот наклон, который имеют все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, и поэтому мы можем на каждую изоклину нанести отрезки касательных к интегральным кривым, проходящим через эту изоклину. Ясно, что точки пересечения двух или нескольких изоклин суть особые точки, так как в них направление интегральных кривых становится неопределенным.

Построив достаточно густое поле изоклин, можно приступить к построению приближенного фазового портрета. Начнем построение с интегральной кривой, проходящей через какую-либо точку P фазовой плоскости. Проводим из точки P два отрезка: один в направлении касательной, соответствующей изоклине $C = 0$, на которой лежит точка P , а другой в направлении касательной, соответствующей соседней изоклине $C = -0,2$ до пересечения их с этой соседней изоклиной. Получаем две точки: a и b , и лежащую между ними точку P_1 принимаем за точку нашей интегральной кривой. Из точки P_1 проводим две прямых под углами, соответствующими изоклинам $C = -0,2$ и $C = -0,4$

1) Мы ограничиваемся очень кратким изложением метода изоклин, так как метод этот достаточно широко распространен и описание его легко найти в литературе. См., например, К. Рунге, Графические методы математических вычислений, ГТТИ, 1932.

до пересечения с изоклиной $C = -0,4$. Точка P_2 , лежащая посередине между C и d , будет третьей точкой отыскиваемой интегральной кривой. Продолжая дальше подобное построение, мы получим последовательность точек $P, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, через которые и проведем интегральную кривую, проходящую через точку P . Подобным образом мы можем продолжать построение этой интегральной кривой и нанести на фазо-

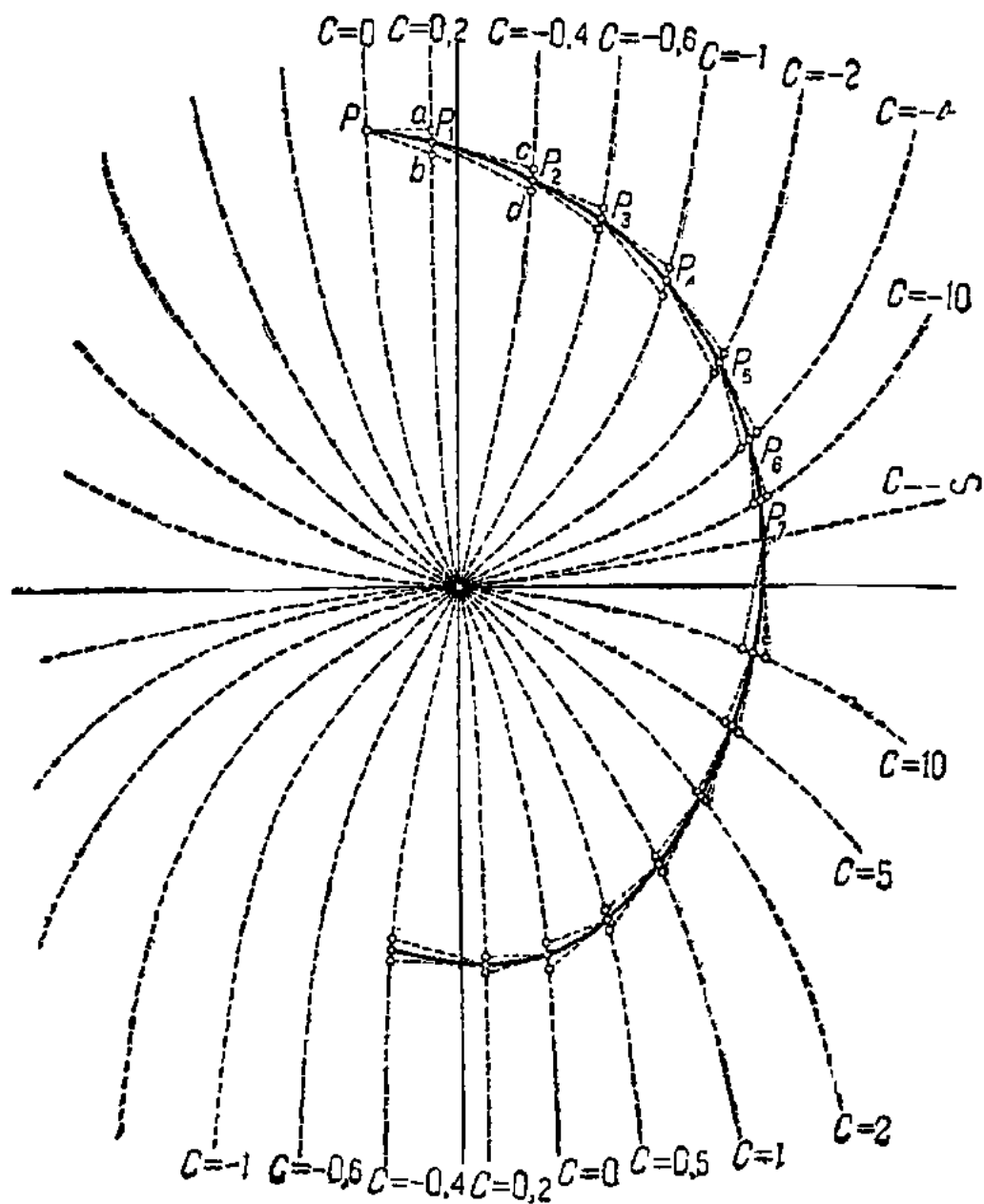


Рис. 253.

вую плоскость ряд других интегральных кривых. В результате мы получим, правда, приближенный, но достаточно подробный фазовый портрет исследуемой конкретной системы (имеющей определенные значения параметров). По этому портрету мы сможем судить, устанавливаются ли при данных значениях параметров автоколебания в системе, каких наибольших значений достигают x и y при этих колебаниях и т. д. Однако по этому портрету, построенному для определенных значений параметров системы, мы не можем судить о том, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Для ответа на этот вопрос нужно построить

целую «галерею» фазовых портретов, соответствующих различным значениям того параметра, влияние изменений которого мы хотим проследить. В качестве типичного примера, иллюстрирующего применение метода изоклин, может служить произведенное ван-дер-Полем (16) исследование фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{v} - \epsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0,$$

которое, как мы уже знаем, носит название уравнения ван-дер-Поля.

Это уравнение характерно (конечно, при соответствующей идеализации) для целого ряда автоколебательных задач. Например, к этому уравнению может быть приведено уравнение движения лампового генератора в случае кубической характеристики; сам ван-дер-Поль интересовался этим уравнением в связи с теорией релаксационных колебаний симметричного мультивибратора, в цепи которого введены самоиндукции (рис. 254).

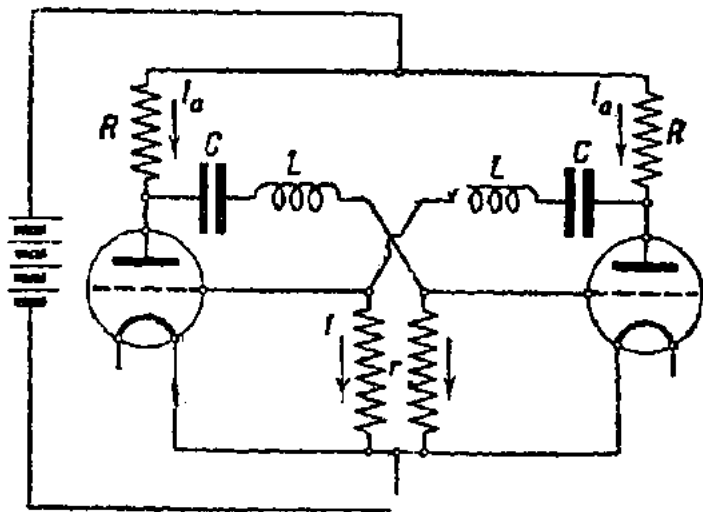


Рис. 254.

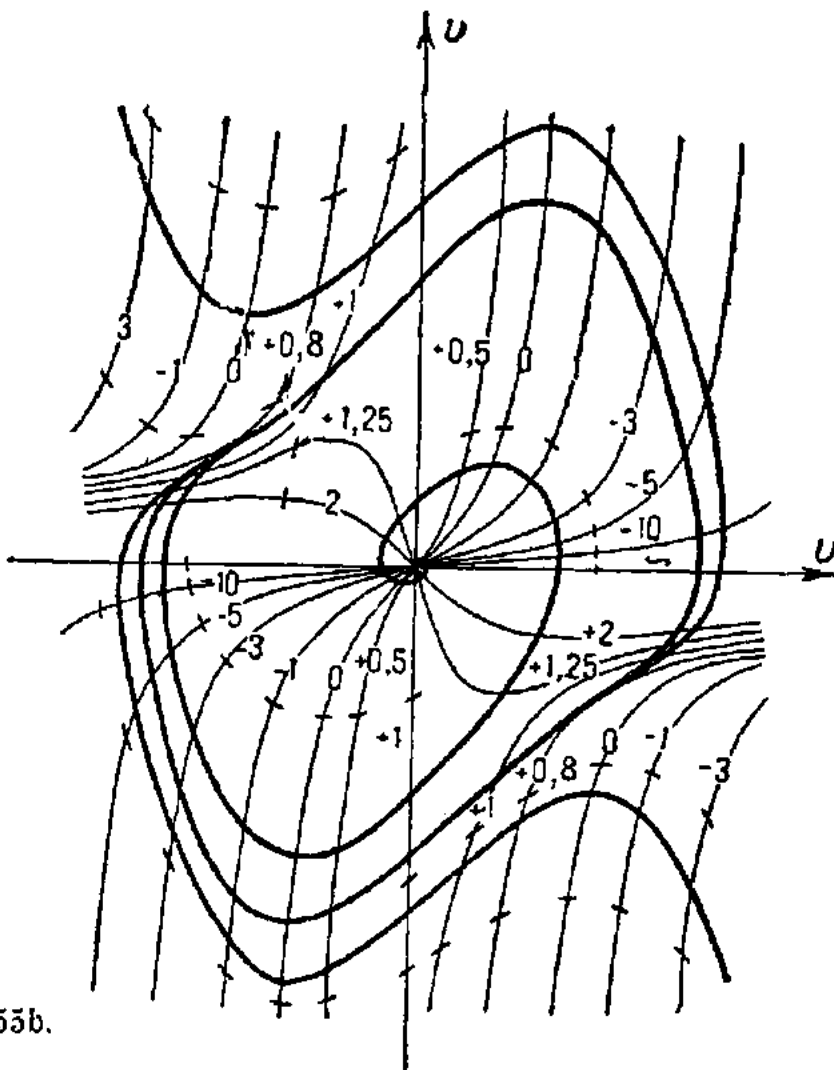
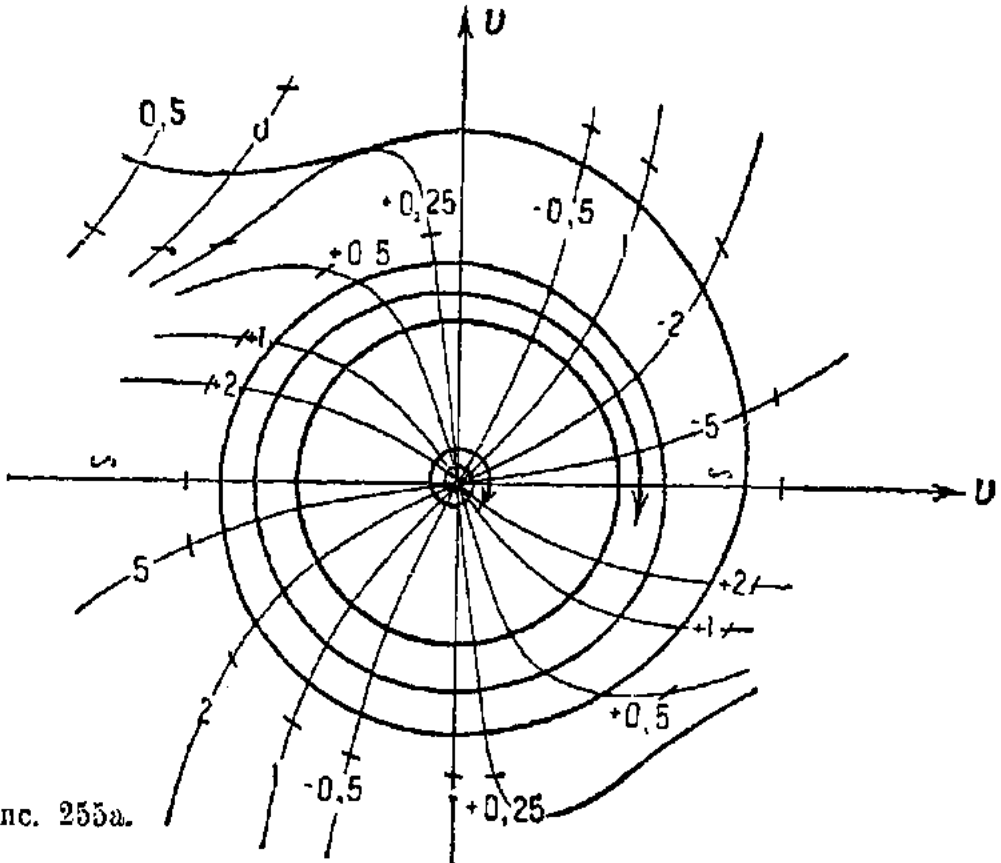
Записав уравнение второго порядка в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -v + \epsilon(1 - v^2)y$$

и деля одно уравнение на другое, получим уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dv} = +\epsilon(1 - v^2) - \frac{v}{y}.$$

Придавая параметру ϵ определенные числовые значения и применяя метод изоклин, ван-дер-Поль получает «фазовую портретную галерею», изображенную на рис. 255. При помощи этой галереи можно судить о том, как изменяется характер движений в системе при изменении параметра ϵ . Все портреты содержат устойчивый предельный цикл, следовательно, при всех значениях ϵ в системе происходят автоколебания. Но размахи и форма этих автоколебаний и характер их установления в разных случаях различные. При возрастании ϵ увеличиваются размахи величины $\frac{di}{dt}$, форма колебаний становится все более и более отличной от синусоидальной (предельный цикл имеет форму, все более и более отличную от круга) и, наконец, начальное нарастание колебаний, осцилляторное при малых ϵ (особая точка — неустойчивый фокус), становится аperiодическим (особая точка — неустойчивый узел) при больших ϵ .



Графическое интегрирование позволяет, таким образом, не только получить ответы на вопрос о поведении системы при данных значениях ее параметров, но и проследить, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Правда, для этого нужно выполнить значительное число построений. Однако в некоторых случаях такого общего обзора поведения системы не требуется, и возникает лишь вопрос о поведении системы при данных начальных условиях, что можно приближенно описать при помощи тех значений, которые будут получать координата и скорость системы через определенные промежутки времени после начального момента t_0 . Например, если мы изучаем какой-либо периодический процесс и знаем одно из состояний, соответствующих этому периодическому процессу, а также хотя бы приблизительно период этого процесса τ , то достаточно вычислить значения координаты и скорости, разделенные промежутками времени, допустим, в $\frac{\tau}{10}$, чтобы получить представление о ходе всего процесса. Такие задачи — вычисление значений функций, определяемых данными дифференциальными уравнениями (и данными начальными условиями), — можно производить при помощи одного из методов приближенного численного интегрирования, например метода Адамса или метода Рунге. Этот последний метод наиболее прост и для рассматриваемых нами вопросов, пожалуй, наиболее пригоден; поэтому мы и изложим вкратце его применение к интересующим нас задачам¹⁾. Мы имеем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (368)$$

и начальные значения при $t = t_0$: $x = x_0, y = y_0$. Нужно вычислить приращения значений x и y за малый промежуток времени Δt . Для этого составляют выражения:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= P(x_0, y_0) \Delta t; & \Delta y_1 &= Q(x_0, y_0) \Delta t, \\ \Delta x_2 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_2 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_3 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_3 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_4 &= P(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t; & \Delta y_4 &= Q(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t. \end{aligned}$$

¹⁾ Более подробные сведения о методе Рунге, а также и изложение других методов численного интегрирования можно найти в уже упоминавшейся книге

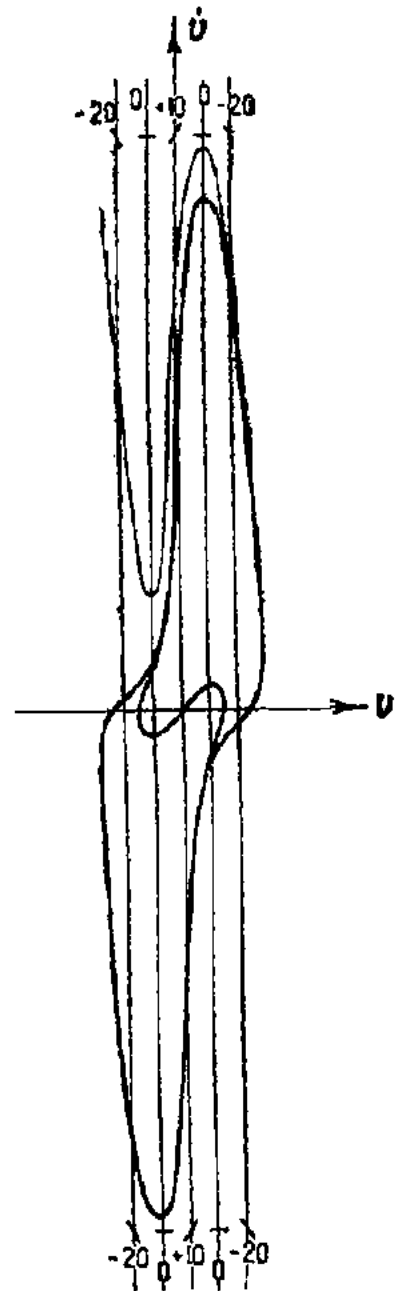


Рис. 255с.

Тогда приращения функции x и y за малый промежуток времени Δt могут быть с большой степенью точности выражены следующим образом:

$$\Delta x = \frac{1}{3} \left[\Delta x_2 + \Delta x_1 + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} \right]; \quad \Delta y = \frac{1}{3} \left[\Delta y_2 + \Delta y_1 + \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{2} \right]. \quad (369)$$

Мы получаем значения функции x и y в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$: $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$. Принимая x_1 и y_1 за новые начальные значения, мы можем вычислить значения x и y для момента $t_0 + 2\Delta t$ и, продолжая таким образом дальше, получить ряд последовательных значений x и y , разделенных промежутками времени Δt . Для определения каждой пары значений x и y , как видим, требуется вычисление четырех значений функции P и четырех значений функции Q . Если функции P и Q сложные, то это вычисление становится весьма громоздким. В этом случае более удобным может оказаться метод Адамса.

§ 17. «Разрывные» колебания в системах с одной степенью свободы, описываемых двумя уравнениями первого порядка

Мы уже видели, что задача рассмотрения автоколебательной системы значительно упрощается, если один из колебательных параметров системы играет второстепенную роль и влиянием его на происходящие процессы можно пренебречь. Пренебрежение одним из колебательных параметров в рассмотренных нами задачах приводило одновременно и к понижению порядка уравнения и к возможности существования разрывных колебаний. Однако совпадение этих двух благоприятных обстоятельств является в известной мере случайным. Вполне возможно, что в результате пренебрежения теми или иными параметрами в системе окажутся возможными разрывные решения, но порядок уравнения при этом не понизится — мы будем иметь систему, в которой присутствуют оба колебательных параметра, но в которой вместе с тем возможны разрывные колебания.

Так, например, схема, изображенная на рис. 256, в том случае, когда все три самоиндукции L , L_1 и L_2 малы, превращается в знакомую нам схему (рис. 257), описываемую одним дифференциальным уравнением первого порядка и допускающую разрывные решения. Если же в этой схеме малы L_1 и L_2 , а самоиндукция L , наоборот, велика и должна быть учтена, но зато мало сопротивление R , то мы получим схему (рис. 258), которая уже была нами рассмотрена (гл. I, § 7) и которая описывается дифференциальным уравнением не первого, а второго порядка. Между тем, несмотря на присутствие самоиндукции L в схеме рис. 258, возможны скачкообразные изменения силы тока в цепи конденсатора C и сопротивления r , если они происходят так, что при этом не изменяется сила тока I в цепи самоиндукции L и не меняется напряжение на обкладках конденсатора V . Мы увидим сейчас, что эти условия могут быть выполнены и что в схеме возможны, следовательно,

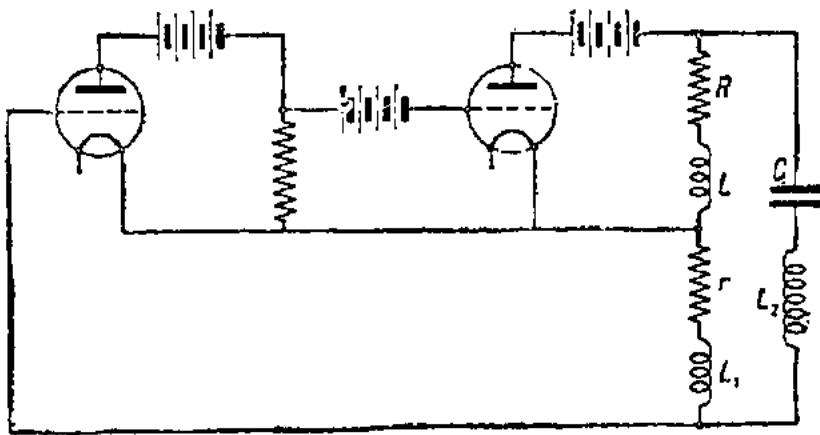


Рис. 256.

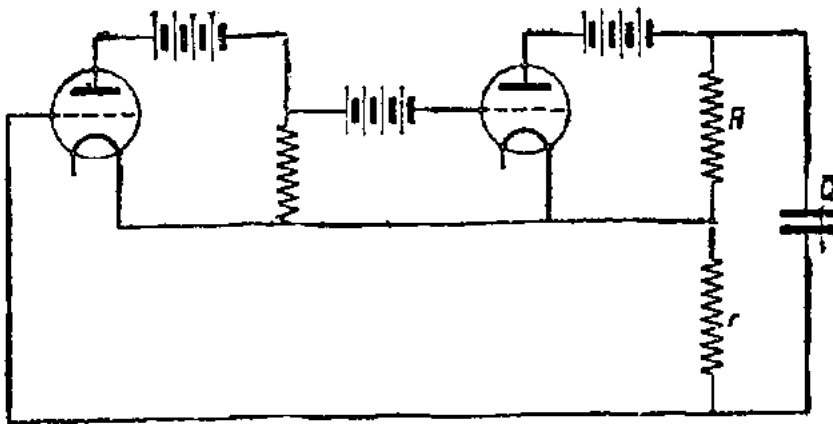


Рис. 257.

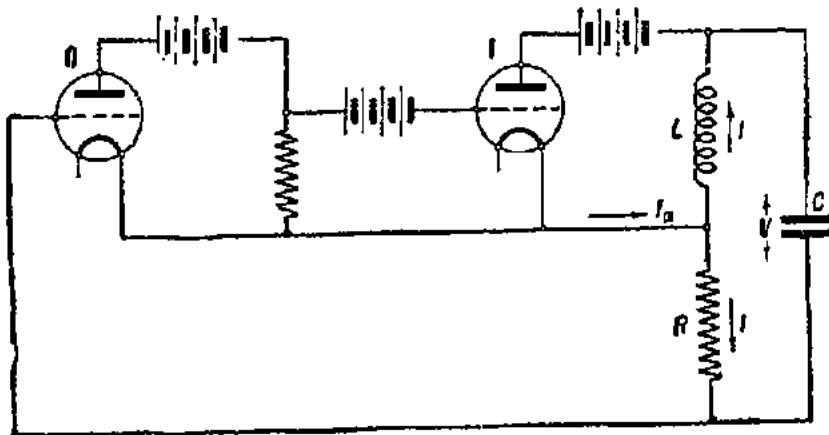


Рис. 258.

разрывные колебания. Таким образом хотя пренебрежение, например, самоиндукцией L и не понижает порядка уравнения, но оно позволяет применить к исследованию системы разрывную трактовку и тем самым весьма упростить рассмотрение. Пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией, мы получим для рассматриваемой схемы (гл. I, § VII) уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & I = \varphi(kri) - i; \\ 2) \quad & L \frac{dI}{dt} - ri - \frac{1}{C} \int i dt = 0, \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

где φ есть характеристика лампы I, а k — коэффициент усиления, даваемый лампой II (мы попрежнему считаем, что лампа II работает на прямолинейном участке характеристики). Введем обозначения

$$kri = x; \quad \frac{dI}{dt} = y. \quad (371)$$

(Очевидно, x есть просто напряжение на сетке лампы I.) Тогда уравнения (370) могут быть записаны следующим образом:

$$Ly - \frac{1}{k} x - \frac{1}{krC} \int x dt = 0; \quad \varphi(x) - \frac{x}{kr} - \int y dt = 0. \quad (372)$$

Продифференцировав оба уравнения, после простых преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{y}{\left[\varphi'(x) - \frac{1}{kr} \right]}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x}{krLC} + \frac{1}{kL} \frac{y}{\left[\varphi'(x) - \frac{1}{kr} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда характеристика симметрична и рабочая точка лежит в середине характеристики. Следовательно, $\varphi(x)$ есть монотонная функция с насыщением. $\varphi'_x(x)$ имеет максимум при $x=0$, и при возрастании абсолютных значений x убывает в обе стороны до нуля. Поэтому, если $\varphi'(0) > \frac{1}{kr}$, то существуют такие два значения $+x_1$ и $-x_1$, что

$$\varphi'(x_1) = \frac{1}{kr} \quad \text{и} \quad \varphi'(-x_1) = \frac{1}{kr}.$$

Но при $\varphi'(x) = kr$ обе производных обращаются в бесконечность, и, следовательно, в этот момент могут скачком измениться значения как x , так и y . Однако при этом должны быть соблюдены условия скачка, которые заключаются в том, что энергия в отдельных цепях системы при скачке должна остаться неизменной. Следовательно, должны остаться неизменными, во-первых, напряжение на обкладках конденсатора, которое согласно первому из уравнений (372) выражается так:

$$V = \frac{1}{C} \int \frac{x}{kr} dt = Ly - \frac{x}{k}, \quad (374)$$

и, во-вторых, сила тока в цепи самоиндукции, которая по второму из уравнений (372) выражается так:

$$I = \int y \, dt = \varphi(x) - \frac{x}{kr}. \quad (375)$$

Поэтому условия скачка должны быть сформулированы следующим образом. Если x_1 и y_1 — значения x и y до скачка, а x_2 и y_2 — их значения после скачка, то мы должны потребовать, чтобы соблюдались равенства:

$$\varphi(x_1) - \frac{x_1}{kr} = \varphi(x_2) - \frac{x_2}{kr}, \quad (376)$$

$$Ly_1 - \frac{x_1}{k} = Ly_2 - \frac{x_2}{k}. \quad (377)$$

При соблюдении этих условий скачок происходит следующим образом. Сила тока i меняется скачком, вследствие этого меняется скачком и напряжение на сетке I и II ламп, а значит, и сила анодного тока. Но по первому условию (376) скачок в силе анодного тока I_a должен быть как раз равен скачку в силе тока i , в результате чего сила тока I остается неизменной. С другой стороны, при скачке силы тока i изменяется напряжение на сопротивлении r , но при этом изменяется скачком и ЭДС самоиндукции, причем по второму условию скачок напряжения на r должен быть как раз равен скачку ЭДС самоиндукции, в результате чего напряжение на конденсаторе остается неизменным.

Итак, мы имеем два уравнения первого порядка (373), которые описывают поведение системы во всей области, кроме тех мест, где $\varphi'(x) = \frac{1}{kr}$, и два условия скачка, которые указывают, куда придет в конце концов система, если она попала в точку x_1, y_1 , для которой $\varphi'(x) = \frac{1}{kr}$. При помощи этих уравнений и условий скачка мы можем определить поведение системы на всей фазовой плоскости x, y .

Разделив уравнения (373) одно на другое, мы исключим из них время и получим одно уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \left[\varphi'(x) - \frac{1}{kr} \right]}{krLy} + \frac{1}{kL} \quad (378)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \left[\varphi'(x) - \frac{1}{kr} \right] + rCy}{krLy} \quad (379)$$

Особые точки этого уравнения: 1) $x=0, y=0$ и 2) $x=x_1, y=0$, где x_1 определяется из условия $\varphi'(x_1) = \frac{1}{kr}$. Из этих особых точек только первая соответствует состоянию равновесия, а две других не соответствуют состояниям равновесия, так как в них $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ обращаются не в нуль, а в выражение вида $\frac{0}{0}$.

Для малых отклонений от положения равновесия $x = 0$, $y = 0$; обозначая $\varphi'(0) = S$, получим:

$$\frac{d_i}{dx} = \frac{x \left[S - \frac{1}{kr} \right] + rCy}{krLy}. \quad (380)$$

Для определения характера особой точки составляем уравнение:

$$\begin{vmatrix} rC - \lambda & \left[S - \frac{1}{kr} \right] \\ LCkr & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (381)$$

или

$$\lambda^2 - rC\lambda - LC[krS - 1] = 0, \quad (382)$$

откуда

$$\lambda = \frac{rC}{2} \pm \sqrt{\frac{(rC)^2}{4} + LC[krS - 1]}. \quad (383)$$

Если $krS > 1$, то особая точка — седло (так как корни разных знаков). Если $krS < 1$, то особая точка — либо устойчивый узел (при L малом),

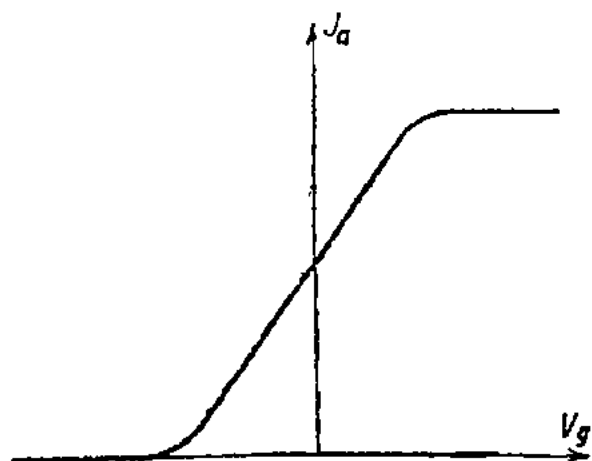


Рис. 259.

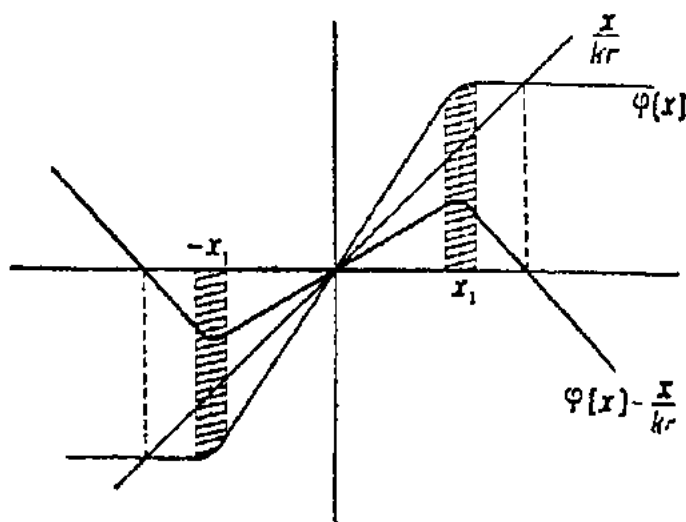


Рис. 260.

либо устойчивый фокус при L большом. Но при $krS < 1$ выражение $\varphi'(x) - \frac{1}{kr}$ никогда не обращается в нуль. Следовательно, одновременно с появлением неустойчивости (превращением особой точки в седло) становятся возможными скачки в системе. С другой стороны, в области, где движения системы непрерывны, т. е. в области, где $\left[\varphi'(x) - \frac{1}{kr} \right]$ не обращается в нуль, предельных циклов в рассматриваемом случае быть не может, так как предельный цикл не может охватывать только одну особую точку типа седла (а в области непрерывных движений существует только одна особая точка — седло).

Для того чтобы упростить построение фазового портрета, будем считать, что характеристика лампы прямолинейна почти на всем участке от нуля до насыщения (рис. 259). При такой форме характеристики

мы можем считать, что внутри области, лежащей между $(-x_1)$ и x_1 (рис. 260), почти везде

$$\psi'(x) = \text{const.} = S$$

и вне этой области $\psi'(x) = 0$. Только в небольших участках «шириной» $2\Delta x$, содержащих значения $x = x_1$ и $x = -x_1$ и заштрихованных на рис. 260, характеристика лампы криволинейна. Соответственно мы

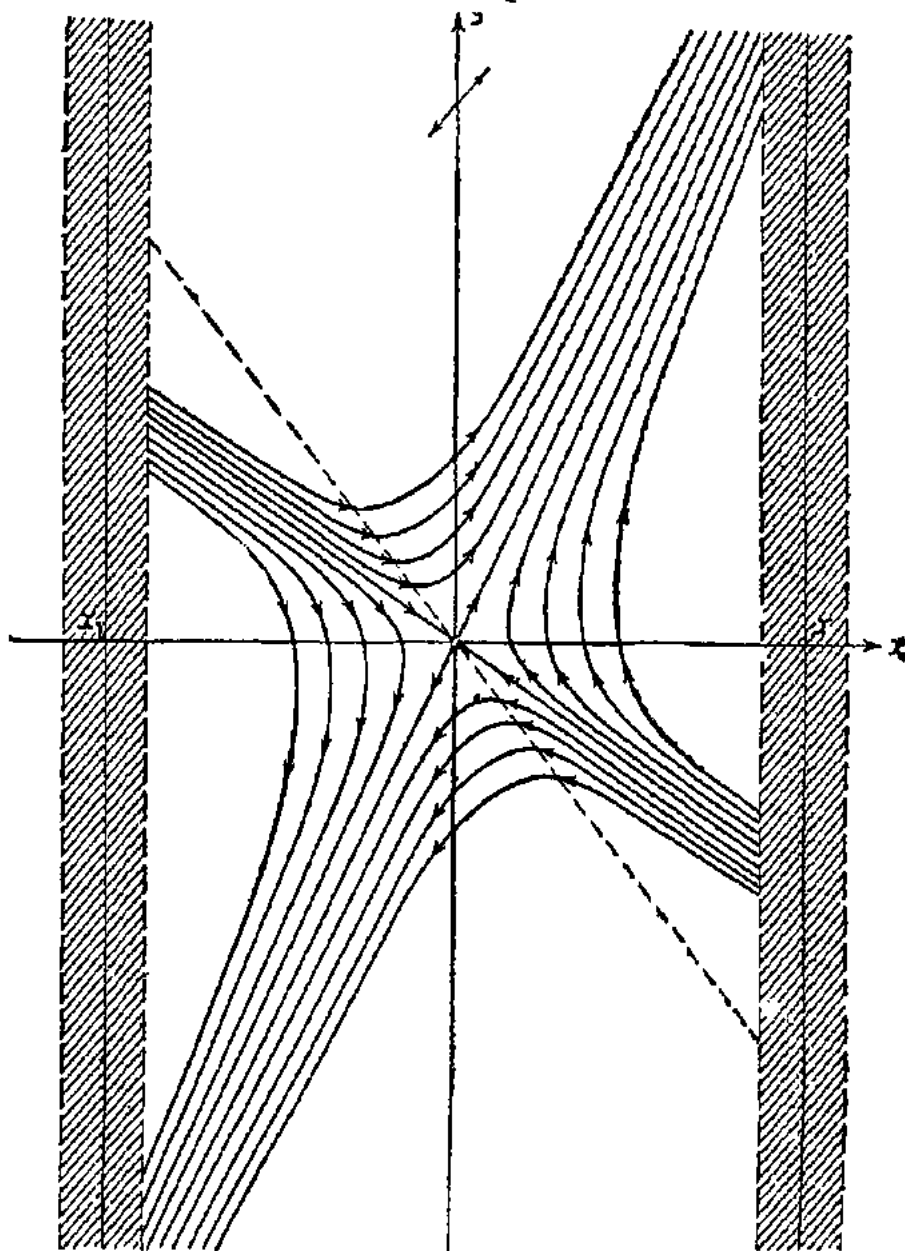


Рис. 261.

можем и фазовую плоскость разделить на отдельные области — вертикальные полосы (рис. 261). В середине от $-(x_1 - \Delta x)$ до $+(x_1 - \Delta x)$ лежит область, где система ведет себя, как линейная, описываемая уравнением (380). В этой области существует одна особая точка — седло с асимптотами, имеющими тангенс угла наклона:

$$q_1 = \frac{1}{krLC} \left[\frac{rC}{2} + \sqrt{\frac{(rC)^2}{4} + LC(krS - 1)} \right],$$

$$q_2 = \frac{1}{krLC} \left[\frac{rC}{2} - \sqrt{\frac{(rC)^2}{4} + LC(krS - 1)} \right].$$

В этой области изоклина нуль есть прямая: $rCy = -\left[S - \frac{1}{kr}\right]x$, а изоклина бесконечность — прямая $y=0$, т. е. ось абсцисс. Через ось ординат ($x=0$) все интегральные кривые проходят под одинаковым углом, тангенс которого есть $\frac{1}{kL}$, т. е. ось ординат есть изоклина $\frac{1}{kL}$. Направление движения представляющей точки по интегральным кривым в этой области можно определить при помощи уравнений (373). Так, например, из второго уравнения сразу видно, что на оси абсцисс

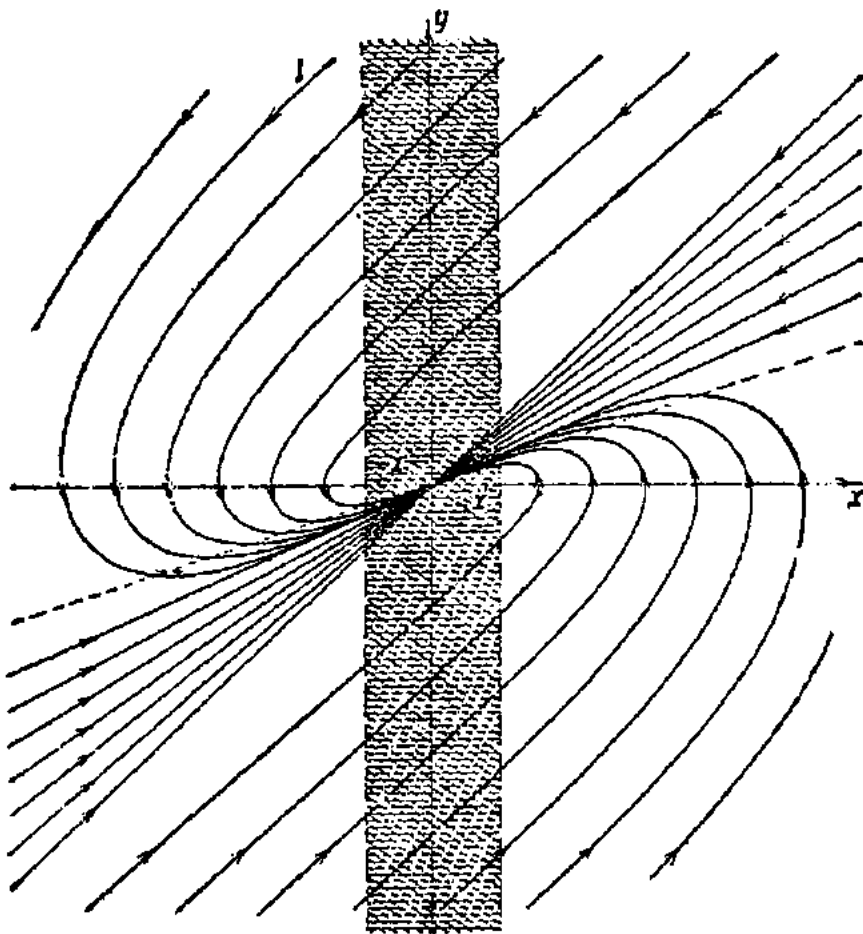


Рис. 262.

($y=0$) знак $\frac{dy}{dt}$ совпадает со знаком x . Определенные таким образом направления движения представляющей точки указаны на рис. 261 стрелками. По обе стороны от прямых — $(x_1 + \Delta x)$ и $(x_1 - \Delta x)$ лежат области, в которых $S=0$, и, следовательно, система ведет себя, как линейная, описываемая уравнением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{kr^2LC} \frac{x}{y} + \frac{1}{kL}. \quad (384)$$

Таким образом в далеких областях поведение системы зависит только от соотношения между r , L и C . Именно, если $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то система будет вести себя, как аperiodическая, и ее интегральные кривые в далеких областях, вне заштрихованной полосы, для которой уравнение (384) не справедливо, будут иметь вид такой же, как в случае

линейной системы, особая точка которой является устойчивым узлом (рис. 262). Если же $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то система будет вести себя вдаль от особой точки как линейная колебательная система, с особой точкой — устойчивым фокусом, и интегральные кривые вне заштрихованной полосы будут иметь вид спиралей (рис. 263). Но и в том и в другом случае изоклиной с наклоном нуль будет служить прямая

$$rCy = \frac{x}{kr},$$

а изоклиной с наклоном бесконечность — прямая $y=0$, т. е. ось абсцисс. Таким образом, рассматривая систему как линейную, мы можем достаточно точно описать поведение системы на всей фазовой плоскости, кроме узких полос (шириной $2\Delta x$), охватывающих вертикальные прямые $x = -x_1$ и $x = x_1$, внутри которых система будет вести себя как нелинейная. В этих областях направление интегральных кривых может существенно изменяться. Однако из уравнения (379)

видно, что прямую $x = x_1$ (или $x = -x_1$) все интегральные кривые пересекают под одинаковым углом, тангенс которого есть также $\frac{1}{kL}$ (так как на этих прямых $[\varphi'(x) - \frac{1}{kr}] = 0$). Следовательно, прямые $x = x_1$ и $x = -x_1$ суть изоклины, соответствующие наклону $\frac{1}{kL}$. Мы могли бы при помощи уравнения (379) проследить поведение интегральных кривых и в областях, где система ведет себя как нелинейная. Однако мы не будем проводить этого рассмотрения, так как и без него нам удастся до конца проследить за поведением системы в некоторых простейших случаях.

Стрелками на фазовых траекториях (рис. 261, 262 и 263) указано направление движения представляющей точки, определенное по тому, каков знак $\frac{dx}{dt}$ или $\frac{dy}{dt}$ в данной области¹⁾.

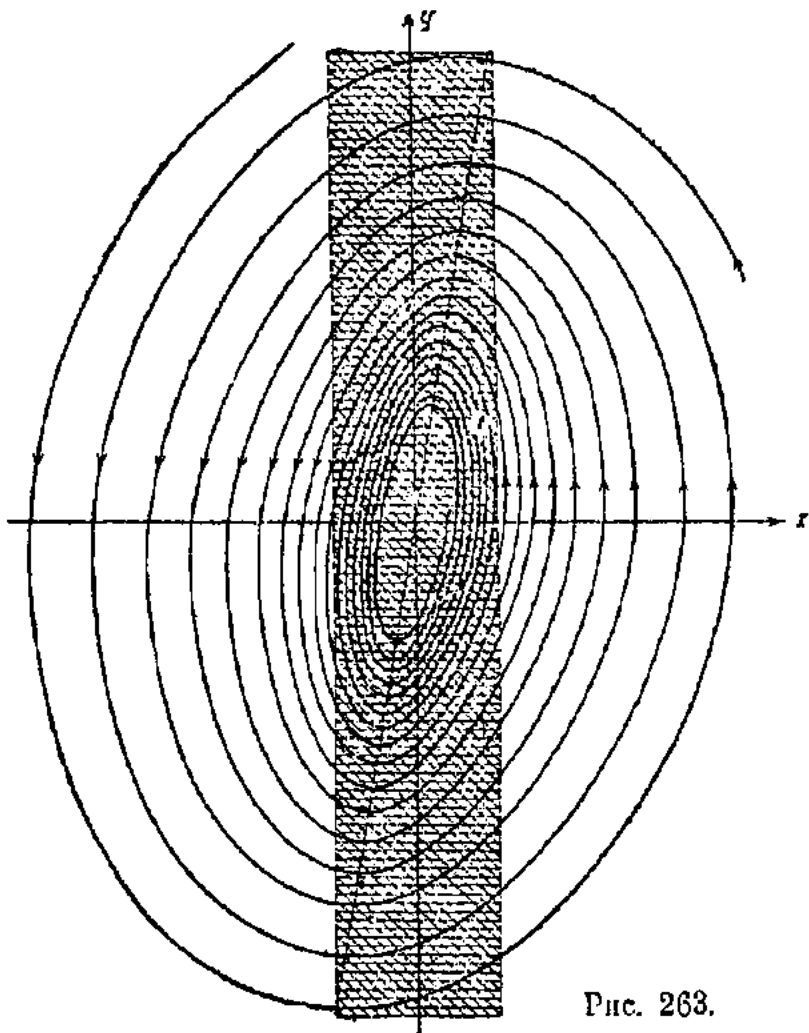


Рис. 263.

¹⁾ Представляющая точка в далеких областях движется по интегральным кривым не по часовой стрелке, как обычно, а против часовой стрелки, потому что у не

Принимая во внимание направление движения представляющей точки по интегральным кривым, легко убедиться, что из любой точки пространства система приходит в конце концов либо на прямую $x = x_1$, либо на прямую $x = -x_1$. На этих прямых $\varphi'(x) - \frac{1}{kr} = 0$, и поэтому $\frac{dx}{dt} = \infty$ и $\frac{dy}{dt} = \infty$. С другой стороны, представляющая точка не может уйти с этой прямой «обычным способом», т. е. по какой-либо

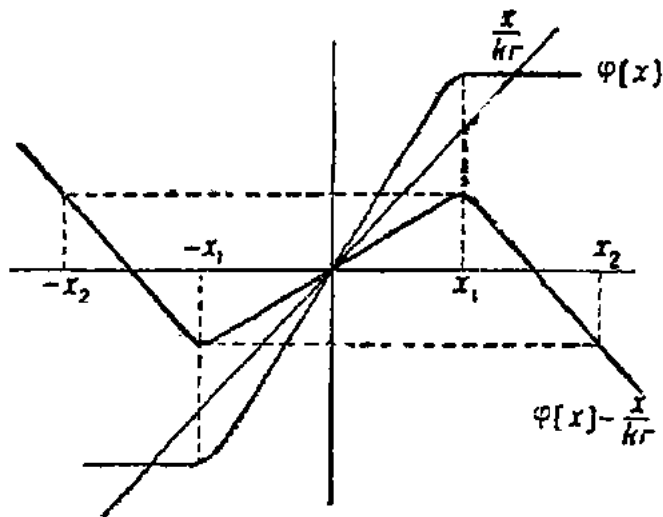


Рис. 264.

интегральной кривой. Следовательно, после того как представляющая точка попала на прямую $x = x_1$ (или $x = -x_1$), скачок не только возможен, но и неизбежен. Место, куда перескочит представляющая точка, определяется условиями скачка. Первое из этих условий (376) не содержит y , и, значит, поскольку известно значение x_1 , с которого скачет система, значение x_2 , на которое происходит скачок, определяется из уравнения (376) и, как легко видеть, определяется однозначно. Для того чтобы определить это значение x_2 , можно воспользо-

ваться уже знакомым нам построением (рис. 264). Жирно начерченная кривая есть $z = \varphi(x) - \frac{x}{kr}$, и по условию (376) скачок должен происходить так, чтобы значению $z(x_1) = \varphi(x_1) - \frac{x_1}{kr}$ было равно значению $z(x_2) = \varphi(x_2) - \frac{x_2}{kr}$. Таким образом из условия $z(x_1) = z(x_2)$ определяется значение x_2 и при выбранном нами типе характеристики определяется однозначно (рис. 264). Следовательно, с прямой $x = x_1$ точка скачет на прямую $x = -x_2$ и, наоборот, с прямой $x = -x_1$ на прямую $x = x_2$. При этом второе условие скачка (377) определяет связь между значениями y до скачка и после скачка. Из этого условия вытекает, что $y_2 - y_1 = \frac{1}{kL}(x_2 - x_1)$. Это есть уравнение прямой, проходящей через точку x_1, y_1 и образующей с осью x угол, тангенс которого равен $\frac{1}{kL}$. Скачок происходит в «направлении» этой прямой. Так как $(x_2 - x_1)$ по абсолютной величине при скачке всегда одно и то же, то и y изменяется при скачке на одну и ту же величину. Но величина изменений y при скачке существенно зависит от величины самоиндукции L . С другой стороны, и поведение системы в далеких обла-

есть просто $\frac{dx}{dt}$, а связано со скоростью изменения x уравнением (373), которое при $\varphi'(x) = 0$ дает $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{kr}$.

стях также будет различным при малых и больших L . Поэтому для дальнейшего рассмотрения необходимо разделить случаи большого и малого L и рассматривать их отдельно¹⁾. Кроме того, для упрощения дальнейшего рассмотрения мы еще более идеализируем характеристику лампы, именно предположим, что она состоит только из прямолинейных отрезков (рис. 265).

В таком случае прежде всего легко может быть установлена связь между параметрами лампы и значениями x_1 и x_2 . Действительно, как видно из рис. 265,

$$\frac{x'}{kr} = i' = \frac{I_s}{2}.$$

$$\frac{x_1}{kr} = \frac{V_s}{2} \frac{1}{kr} = i_1, \text{ причем } V_s \text{ есть}$$

так называемое напряжение насыщения лампы I , т. е. то напряжение, которое нужно приложить к сетке лампы, чтобы анодный ток возрос от нуля до насыщения (рис. 265). Далее:

$$\frac{x_2}{kr} = i_2 = i_1 + 2(i' - i_1)$$

или

$$x_2 = \frac{V_s}{2} + 2kr \left[\frac{I_s}{2} - \frac{V_s}{2kr} \right].$$

Следовательно:

$$x_1 = \frac{V_s}{2},$$

а

$$x_2 = \frac{V_s}{2} - V_s + krI_s = V_s \left[\frac{krI_s}{V_s} - \frac{1}{2} \right],$$

и, наконец:

$$X = |x_2| + |x_1| = krI_s. \quad (385)$$

Наиболее же существенное упрощение, которое вносит наше предположение о характеристике, состоящей из прямолинейных отрезков, заключается в том, что при такой характеристике система ведет себя как линейная все время до того момента, как она попадает на прямую $x = x_1$ или $x = -x_1$. Мы можем, следовательно, рассматривать картину на фазовой плоскости для обычной линейной системы, описываемой уравнением (384), но только иметь в виду, во-первых, что в области, лежащей между прямыми $x = -x_1$ и $x = x_1$, эта картина не передает поведения изучаемой нами системы и, во-вторых, что

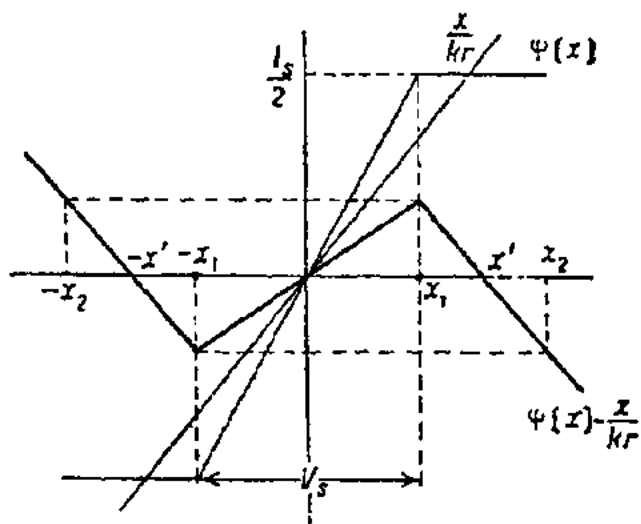


Рис. 265.

1) «Малое» L соответствует, как уже указывалось, условию $\tau \gg 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,

наоборот, «большое» L соответствует условию $\tau \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Когда представляющая точка попадает на одну из этих прямых, то дальнейшее ее поведение определяется условиями скачка. Но, кроме того, мы уже знаем, что из любой точки области, лежащей между $x = -x_1$ и $x = x_1$, система приходит на одну из прямых $x = x_1$ или $x = -x_1$ и после этого уже больше не может попасть внутрь этой области (так как скачок происходит на прямые $x = x_2$ и $x = -x_2$, лежащие вне этой области).

Мы начнем наше рассмотрение со случая большого L . Для этого случая мы должны получить картину, подобную той, которая изображена на рис. 263, и приведенную на рис. 266. После того как предста-

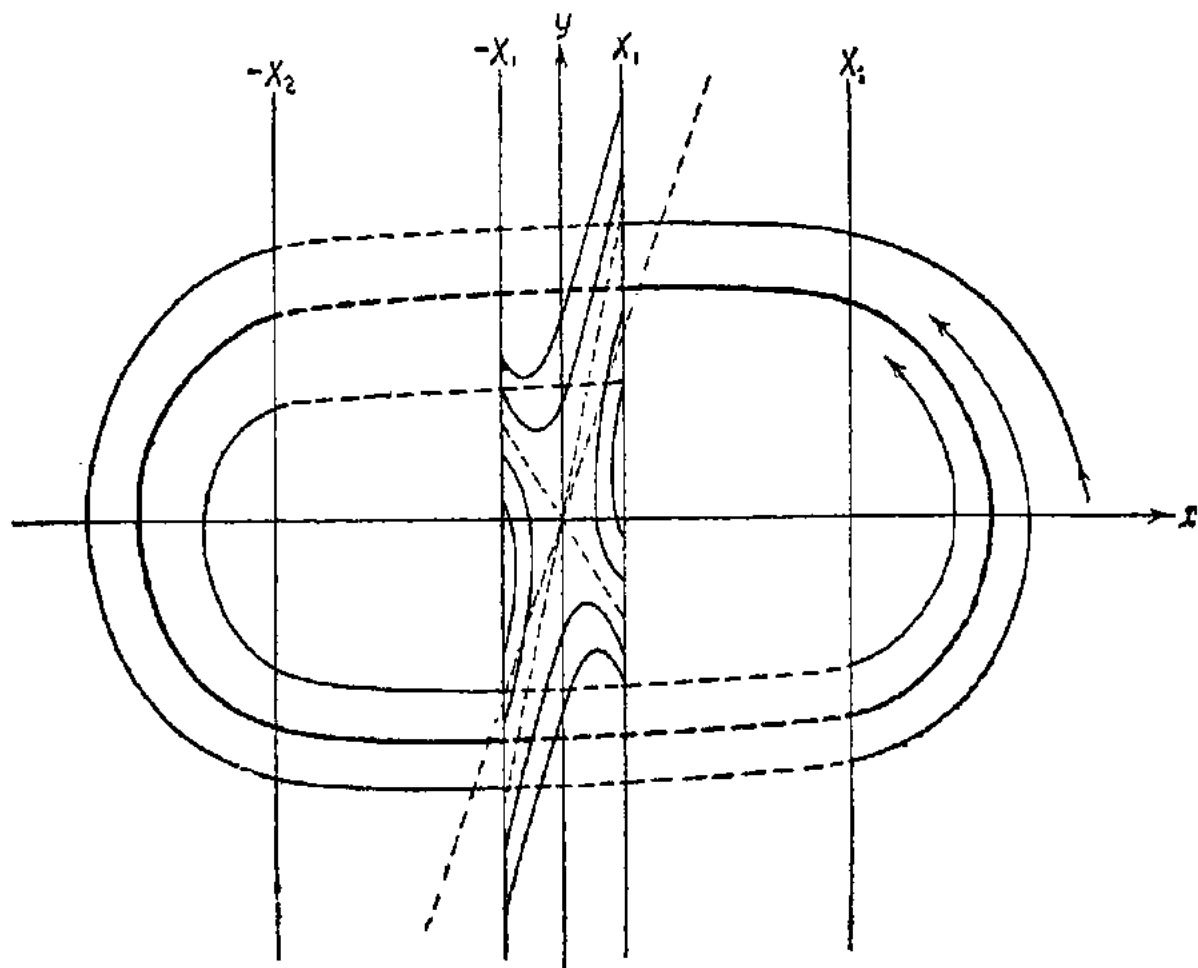


Рис. 266.

вляющая точка попала на прямую $x = x_1$ (или $x = -x_1$) (в точке, для которой $y = y_1$), она переходит скачком в точку, для которой $y = y_2$ на прямой $x = -x_2$ (или $x = x_2$). При этом соблюдается условие (377): $y_2 = y_1 + \frac{1}{kL}(x_2 - x_1)$. Из этого условия следует, что при большом L (а этот именно случай мы сейчас рассматриваем) y_2 и y_1 мало отличаются друг от друга. Следовательно, при большом L происходит сравнительно «пологий» скачок. Величина же скачка всегда одна и та же и не зависит от координат той точки, из которой происходит скачок. Поэтому наклон пунктирной прямой, условно изображающей направление скачка, остается везде одним и тем же. Между тем с приближением к началу координат шаг спирали монотонно убывает. Из соображений непрерывности очевидно, что должна существовать такая пара кусков спиралей, концы которых смыкаются при по-

мощи скачков. Этот «замкнутый» путь, указанный на рисунке жирными линиями и жирным пунктиром, соответствует периодическому движению (рис. 266). Рассматривая движения вне и внутри этого «цикла», можно убедиться в том, что найденное периодическое движение устойчиво. Действительно, если представляющая точка движется по одной из внутренних витков спирали, то при скачке она «выпрыгивает» далеко наружу, в результате чего происходит нарастание колебаний. Наоборот, в далеких областях система не «выпрыгивает» и после скачка остается внутри той спирали, на которой она находилась до скачка, и в результате происходит затухание колебаний. Таким образом мы убеждаемся, что в рассмотренной системе установятся и будут происходить разрывные колебания. Форма этих колебаний, вообще говоря, будет заметно отличаться от синусоидальной, так как x и y , т. е. напряжения на зажимах сопротивления r и катушки L , будут в некоторых областях изменяться скачкообразно. Можно приблизительно определить «амплитуду» автоколебаний при условии, что они не очень сильно отличаются от синусоидальных. После одного «полу-

оборота» значение y уменьшится на величину $\Delta y_1 = y \left(1 - e^{-\frac{\delta}{2}}\right)$, где δ есть логарифмический декремент затухания линейной системы. Но, с другой стороны, приблизительно можно считать (если характеристика достаточно крутая и величины x_1 и x_2 малы), что для периодического процесса должно соблюдаться равенство $\Delta y_2 = \Delta y_1$, где Δy_2 — возрастание y при скачке, т. е. величина, определяемая вторым условием скачка:

$$\Delta y_2 = \frac{1}{kL} [|x_2| + |x_1|] = \frac{X}{kL},$$

и, следовательно, для стационарной «амплитуды» ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c на катушке получим:

$$\mathcal{E}_c = Ly_0 = \frac{X}{k \left[1 - e^{-\frac{\delta}{2}}\right]}. \quad (386)$$

Подставляя значение X из формулы (385), получаем следующее приближенное выражение «амплитуды» ЭДС самоиндукции при стационарном режиме:

$$\mathcal{E}_c = \frac{rI_s}{\left[1 - e^{-\frac{\delta}{2}}\right]}.$$

Наконец, если $kr \frac{I_s}{V_s} \gg 1$ и $\delta \ll 1$, эта приближенная формула может быть еще более упрощена:

$$\mathcal{E}_c = \frac{2rI_s}{\delta} = \frac{2I_s}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Интересно, что для y_0 при малых δ получается выражение: $y_0 = \frac{2I_s}{\pi \sqrt{LC}}$, т. е. «амплитуда» y_0 при возрастании L убывает.

Можно приближенно подсчитать и период автоколебаний в рассмотренном случае. По спиралам движение происходит с такой скоростью, что один оборот без всяких скачков от значения y_0 до y'_0 представляющая точка делала бы за время

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}},$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\delta = \frac{r}{2L}$. По вследствие скачков представляющая точка делает оборот быстрее, так как скачок происходит «мгновенно» (практически очень быстро). Получающаяся при этом «экономия» во времени может быть приближенно подсчитана следующим образом. Тот участок, через который рассматриваемая система перескакивает, линейная система проходила бы с некоторой конечной и притом почти постоянной скоростью, которая из уравнения (373) может быть приближенно определена следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -kry_0.$$

Следовательно, время, потребное на изменение x от x_1 до $-x_2$, т. е. на величину X , определится так ¹⁾: $\tau = \frac{X}{kry_0}$.

Подставляя величину y_0 из выражения (386), получим полную поправку на период:

$$2\tau = \frac{2L}{r} \left[1 - e^{-\frac{\delta}{2}} \right].$$

Таким образом поправка на период уже не является величиной второго порядка малости относительно δ , как в обычном ламповом генераторе. Замечательно, что при уменьшении затухания, т. е. уменьшении δ и возрастании $\frac{L}{r}$, поправка на период стремится не к нулю, а к некоторому конечному значению, которое легко может быть определено. Именно при малом затухании, т. е. при $\delta \ll 1$, мы получим:

$$2\tau = \frac{2L}{r} \frac{\delta}{2} = \frac{L}{r} \frac{rT_0}{2L} = \frac{T_0}{2},$$

где T_0 — период колебаний в линейной системе без трения. Так как при большом L , т. е. при малом затухании, $T_0 \approx T$ (T — длительность «периода» затухающих колебаний), то при большом L приближенно период автоколебаний $T_1 = \frac{T_0}{2}$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая малых L или, иначе, случая, когда $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. В этом случае вне области, ограниченной пря-

¹⁾ Строго говоря, мы должны были бы брать скорость движения представляющей точки по фазовой плоскости и определять время, потребное на прохождение соответствующих участков спиралы. Вместо этого мы берем для приближенного подсчета скорость изменения координаты x и вычисляем время, потребное на изменение ее на величину X в предположении, что скорость изменения постоянна.

мыми $x = x_1$ и $x = -x_1$, система ведет себя как линейная, имеющая в начале координат особую точку типа узла (рис. 262). Уравнение этих интегральных кривых нами уже было найдено в гл. I, § 6. Именно, мы получили:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2},$$

где

$$q_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad \text{и} \quad q_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2},$$

причем

$$h = -\frac{1}{2kL} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{k^2 r^2 L C}.$$

И если h^2 значительно больше ω_0^2 , то приблизительно $q_1 \approx \frac{\omega_0^2}{2h} = \frac{1}{krC}$ и $q_2 \approx 2h = \frac{1}{kL}$.

q_1 и q_2 — это угловые коэффициенты двух «интегральных прямых», соответствующих двум предельным значениям константы — именно $C = 0$ и $C = \infty$. Внутри области,

ограниченной прямыми $x = x_1$ и $x = -x_1$ (рис. 267), система ведет себя так же, как линейная, но имеющая особую точку типа седла. Из рассмотрения направления движения представляющей точки по интегральным кривым видно, что из любой области фазовой плоскости система в конце концов приходит на одну из прямых $x = x_1$ или $x = -x_1$, откуда она может уйти дальше только при помощи скачка. При этом так как в рассматриваемом случае L мало, то из условия скачка

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{kL} (x_2 - x_1) \quad \text{видно,}$$

что y_2 и y_1 в этом случае очень различны по величине и при достаточно малых L будут непременно разных знаков. Это значит, что скачок происходит круто и что представляющая точка перескакивает через ось x . Направление скачка, т. е. направление прямой

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{kL} (x_2 - x_1)$$

приблизительно совпадает с направлением интегральной кривой, для которой $C = \infty$, т. е. прямой $y = q_2 x$.

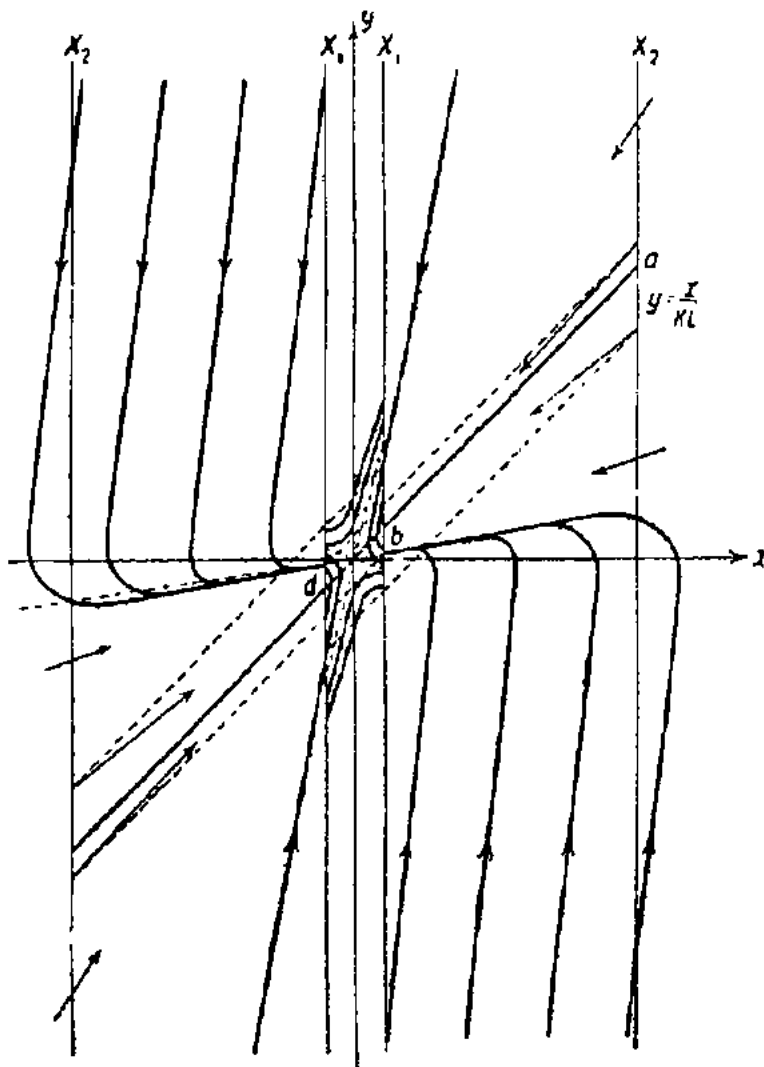


Рис. 267.

Подробное построение показывает, что и в этом случае должно существовать устойчивое периодическое движение, состоящее из двух движений с конечной скоростью и двух скачков. Эти движения представляющей точки отображают разрывные колебания в системе. «Амплитуда» этих колебаний может быть определена сразу — именно, изменения x происходят в пределах от x_2 до $-x_1$ (пределы же изменений y могут быть определены из условия скачка). Что же касается периода автоколебаний, то его можно определить и в общем случае, для чего нужно взять интеграл по dt вдоль тех участков интегральных кривых, по которым происходит движение, и подставить пределы, определяемые из условий скачка.

Однако задача определения периода весьма упрощается в том случае, когда L очень велико, т. е. когда $h^2 \gg \omega_0^2$. В этом случае «направление» скачка и направление интегральной кривой $y = q_2 x$ практически совпадают (рис. 267), и можно считать, что движение с конечной скоростью происходит по интегральной прямой $y = 2hx = \frac{x}{kL}$ от точки a до точки b и от точки c до точки d (скачки происходят из b в c и из d в a).

Так как это движение подчиняется уравнению (373), в котором $\varphi'(x) = 0$, т. е. уравнению линейной системы, то

$$\frac{dx}{dt} = -kry,$$

но, с другой стороны, на той прямой, по которой происходит движение, $y = \frac{x}{kL}$ и, следовательно, $dt = -\frac{L}{r} \frac{dx}{x}$. Интегрируя правую часть этого уравнения в пределах от x_2 до x_1 , мы получим длительность полупериода колебаний:

$$\frac{T}{2} = -\int_{x_2}^{x_1} \frac{L dx}{rx} = \frac{L}{r} \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Подставляя в это выражение значения x_1 и x_2 , выведенные нами ранее для случая характеристики, состоящей из прямолинейных отрезков, получим:

$$\frac{T}{2} = \frac{2L}{r} \ln \left[kr \frac{I_s}{V_s} - \frac{1}{2} \right].$$

Интересно, что в этом случае емкость C не влияет заметно на период; мы получили это, предположив, что $h^2 \gg \omega_0^2$, т. е. что $C \gg \frac{4L}{r^2}$; значит, достаточно большая емкость на период автоколебаний уже не влияет.

Мы рассмотрели два предельных случая большого и малого L и получили ответ на все основные вопросы, которые обычно возникают при исследовании автоколебательных процессов. Именно, мы

в состоянии ответить на вопросы об «амплитуде», периоде и форме автоколебаний и характере их установления. Однако случаями большого и малого L мы ограничились только ради простоты, вообще же

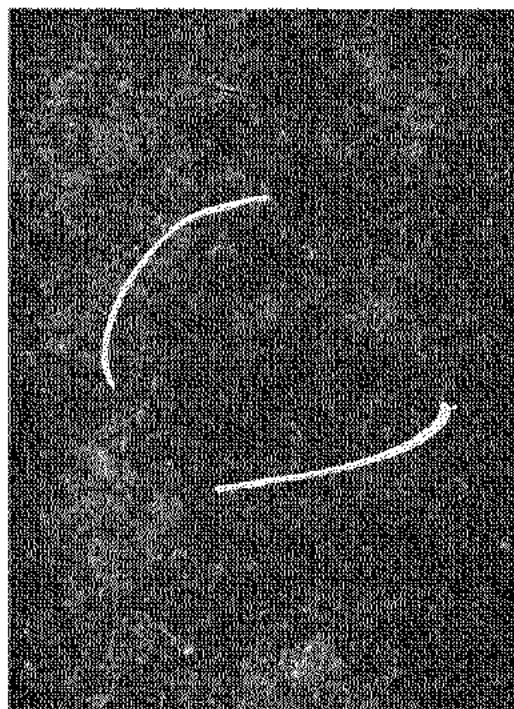


Рис. 268a.



Рис. 268b.

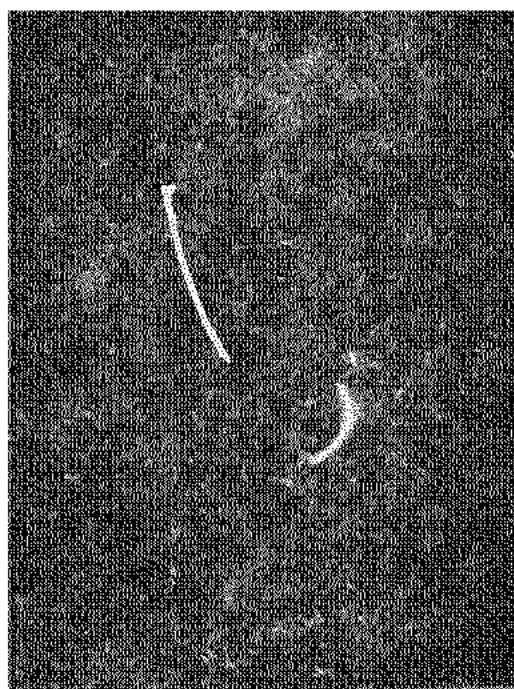


Рис. 268c.

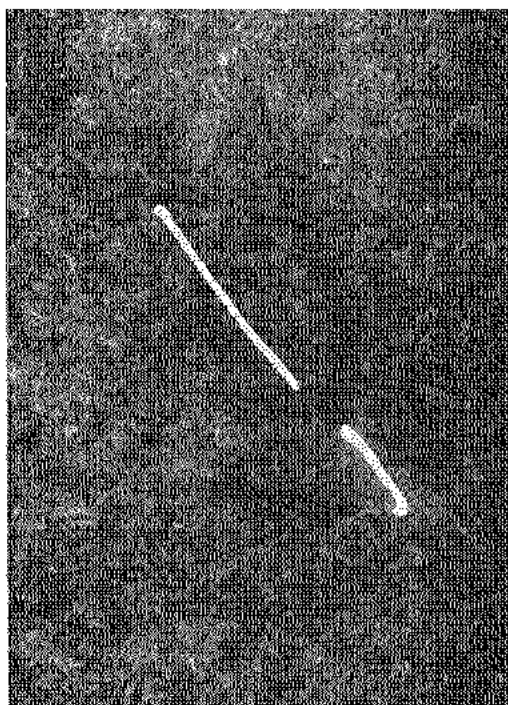


Рис. 268d.

мы могли бы исследовать все эти вопросы и при других, промежуточных значениях L . Мы можем определить те участки фазовых кривых, по которым движется система при автоколебаниях, и затем разложить это движение в ряд Фурье и определить амплитуды и фазы

отдельных членов ряда, т. е. найти все характеристики периодического процесса. Таким образом, применяя разрывную трактовку, мы можем исследовать некоторые автоколебательные процессы, существенно отличные от синусоидальных и поэтому не поддающиеся исследованию элементарными аналитическими методами. Само собой разумеется, что разрывная трактовка и в этом случае становится возможной только благодаря пренебрежению некоторыми паразитными параметрами.

На рис. 268а, б, с и д приведены фотографии картины на фазовой плоскости x, y , полученные для рассматриваемой схемы при помощи трубки Брауна¹⁾. Фотографии расположены в порядке уменьшения L . Характер периодического процесса, изображенного на этих фотографиях, в общем совпадает с той картиной, которую мы получили при теоретическом рассмотрении (несимметрия на фотографиях объясняется трудно устранимой несимметрией в самой схеме).

§ 18. Системы с двумя степенями свободы, описываемые двумя уравнениями первого порядка

Мы ограничились своей задачей рассмотрением систем с одной степенью свободы, и поэтому рассмотрение систем с двумя степенями свободы, вообще говоря, выходит за рамки нашей книги. Однако в некоторых частных случаях системы с двумя степенями свободы приводят к таким задачам, которые могут быть разрешены при помощи изложенных нами выше методов исследования систем с одной степенью свободы.

Действительно, если, например, в электрической системе с двумя степенями свободы, т. е. состоящей из двух замкнутых цепей, можно пренебречь какими-либо колебательными параметрами (емкостями или самоиндукциями), то в результате этого система вырождается и порядок описывающих ее уравнений понизится. Каждое пренебрежение колебательным параметром в одной из цепей приводит к однократному вырождению системы и понижению порядка соответствующего уравнения на единицу. Поэтому при соответствующем вырождении система со многими степенями свободы может быть описана двумя или даже одним дифференциальным уравнением первого порядка и поведение ее может быть рассмотрено при помощи тех методов, которые были развиты выше.

В частности, система с двумя степенями свободы приводит к двум дифференциальным уравнениям первого порядка, если она «дважды вырождена», и к одному уравнению первого порядка, если она «трижды вырождена». Но и в этом последнем случае иногда бывает удобнее описывать поведение системы при помощи двух (а не одного) уравнений первого порядка и рассматривать движение представляющей точки на фазовой плоскости, а не на фазовой кривой. (При этом

¹⁾ О получении картины на фазовой плоскости при помощи трубки Брауна см. § 2. Продолжения.

конечно, представляющая точка будет двигаться только по одной фазовой кривой, так как состояние системы определяется заданием только одной переменной.)

Мы рассмотрим сейчас несколько примеров вырожденных систем с двумя степенями свободы. В качестве первого примера мы рассмотрим схему, предложенную Фрюхгауфом и применяемую для получения «пилообразной формы» кривой напряжения.

1. **Схема Фрюхгауфа** ^[64, 112]. В этой схеме (рис. 269) существенную роль играет то обстоятельство, что сами лампы образуют участки рассматриваемых нами замкнутых цепей и что поэтому нужно принимать во внимание распределение напряжений между лампой и внеш-

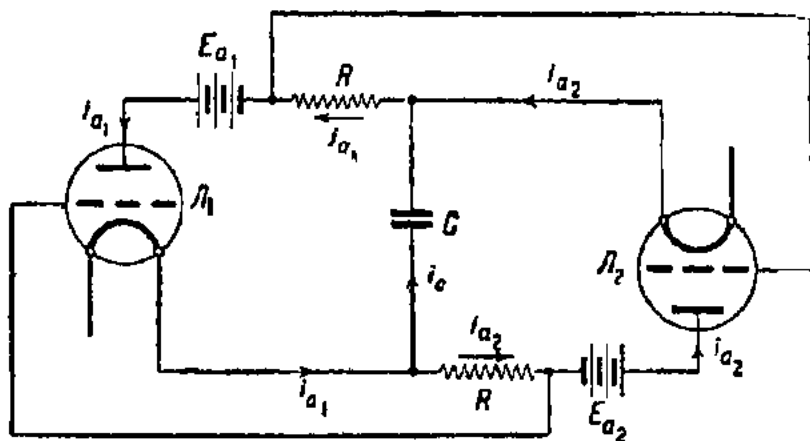


Рис. 269.

ним сопротивлением. Это сведется к тому, что мы должны будем считать напряжение на аноде лампы зависящим от силы анодного тока, т. е. в конечном счете учитывать анодную реакцию, которая в этой схеме играет принципиальную роль. Поэтому в отличие от других схем мы при рассмотрении этой схемы будем считать, что анодный ток есть функция не только сеточного, но и анодного напряжения.

Пользуясь обозначениями токов и напряжений, указанными на рис. 269, пренебрегая сеточными токами и считая лампы идентичными, можно написать следующую систему уравнений, описывающих схему:

$$\begin{aligned}
 i_{a_1} &= f(e_{g_1} + De_a), \\
 e_{g_1} &= E_{g_1} - Ri_{a_1}, \\
 i_{a_2} &= f(e_{g_2} + De_a), \\
 e_{g_2} &= E_{g_2} - Ri_{a_2}, \\
 e_{a_1} &= E_1 - Ri_{a_1} - \frac{1}{C} \int_0^t (i_{a_1} - i_{a_2}) dt, \\
 e_{a_2} &= E_2 - Ri_{a_2} + \frac{1}{C} \int_0^t (i_{a_1} - i_{a_2}) dt,
 \end{aligned}$$

где e_{g_1} и e_{g_2} , e_{a_1} и e_{a_2} — соответственно сеточные и анодные напряжения I и II ламп. Мы предположим, что характеристика лам-

пы $i_a = f(e_{st}) = f(e_g + De_a)$ такова, что $e_{st} = \varphi(i_a)$ есть однозначная функция ¹⁾.

Введя обозначения:

$$i_{a_1} R = x, \quad i_{a_2} R = y,$$

можем написать уравнение (1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{g_1} + DE_1 - y - Dx - \frac{D}{CR} \int_0^t (x - y) dt &= \psi(x), \\ E_{g_2} + DE_2 - x - Dy + \frac{D}{CR} \int_0^t (x - y) dt &= \psi(y). \end{aligned} \right\} \quad (387)$$

Мы могли бы систему (387) заменить системой:

$$E_{g_1} + DE_1 - y - Dx - \frac{D}{CR} \int_0^t (x - y) dt = \psi(x), \quad (387a)$$

$$E_{g_1} + E_{g_2} + D(E_1 + E_2) - (y + x)(D + 1) = \psi(x) + \psi(y). \quad (387b)$$

Из этих уравнений видно, что здесь мы имеем дело с трижды вырожденной системой с двумя степенями свободы, так как после исключения y и дифференцирования мы можем получить вместо четырех дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих «полную» систему с двумя степенями свободы, одно уравнение первого порядка.

Однако в силу трудности исключения y и равноправности x и y мы будем рассматривать движение на плоскости x, y . Дифференцируя систему (387), получаем²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - \frac{D}{CR} \frac{x - y}{\Delta(x, y)} \left\{ D + 1 + \psi'(y) \right\}, \\ \frac{dy}{dt} &= + \frac{D}{CR} \frac{x - y}{\Delta(x, y)} \left\{ D + 1 + \psi'(x) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (387c)$$

где

$$\Delta(x, y) = [D + \psi'(x)] [D + \psi'(y)] - 1. \quad (387d)$$

¹⁾ e_{st} есть так называемое управляющее напряжение. Подробнее об этом см. в дополнительной главе «Электронная лампа».

²⁾ При этом следует иметь в виду, что различным начальным условиям (не противоречащим нашей идеализации) соответствует единственная кривая на плоскости x, y .

В этом отношении рассматриваемый случай трижды вырожденной системы существенно отличается, например, от случая мультивибратора Абрагама-Блоха, который, как мы увидим ниже, при обычной идеализации является дважды вырожденной системой с двумя степенями свободы и для которого любая точка на всей фазовой плоскости может соответствовать начальному состоянию системы (не противоречащему прямой идеализации).

Деля второе уравнение на первое, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D+1+\psi'(x)}{D+1+\psi'(y)} \quad (388)$$

Интеграл этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\phi(x) + \phi(y) + (y+x)(D+1) = C_1. \quad (389)$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с соотношением (387b), причем

$$C_1 = E_{\sigma_1} + E_{\sigma_2} + D(E_1 + E_2). \quad (389a)$$

Применяя критерий Бендиксона к уравнению (388), сразу убеждаемся, что на фазовой плоскости, в области, где $\psi'(x)$ и $\psi'(y)$ непрерывны и дифференцируемы, не может быть замкнутых фазовых траекторий. Это заставляет нас обратиться к выяснению возможности существования и к отысканию разрывных периодических движений. Нетрудно видеть, что такие разрывные движения в этой системе возможны.

Действительно, как видно из уравнений (387c), $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, вообще говоря, обращаются в бесконечность на кривой:

$$\Delta(x, y) = 0, \quad (390)$$

которую мы будем называть кривой Γ . Изображающая точка движется, в соответствии с уравнениями (387c), по интегральной кривой (389); дойдя до какой-нибудь точки (x_0, y_0) кривой Γ , она может «перескочить» в точку (x_1, y_1) . Координаты этой точки должны удовлетворять условиям скачка:

$$\left. \begin{aligned} y_1 + \phi(x_1) + Dx_1 &= y_0 + \phi(x_0) + Dx_0, \\ x_1 + \phi(y_1) + Dy_1 &= x_0 + \phi(y_0) + Dy_0. \end{aligned} \right\} \quad (391)$$

Эти условия вытекают, как обычно, из гипотезы непрерывности изменений энергии — в нашем случае из требования неизменности напряжения на конденсаторе, при «скачках» токов и легко получаются из уравнений (387).

Ясно, что координаты (x, y) изображающей точки после скачка [определяемые системой (390)] удовлетворяют уравнению той же интегральной кривой, по которой изображающая точка двигалась до скачка. Это видно из сопоставления уравнения (389) с условиями скачка. Если условия скачка соблюдаются, то константа C_1 в уравнении (389) не может измениться при скачке.

Таким образом изображающая точка, начав двигаться по интегральной кривой, которая, как следует из (389) и (389a), определяется только величинами E_{σ} и E , не покидает ее более в процессе движения. Накладывая на функцию $\phi(x)$ обычные ограничения (наличие

насыщения и отсутствие других особенностей, кроме точки перегиба), но не задавая точного вида функций $\psi(x)$ и $\psi(y)$, все же можно сделать некоторые высказывания относительно картины на фазовой плоскости x, y .

Как видно из (387с), прямая $x=y$ есть особая линия — «линия равновесия».

Каждой точке кривой Γ соответствует одна точка x_1, y_1 , в которую перескакивает система. Совокупность этих точек образует кривую B . Обе кривые, Γ и B , при наложенных ограничениях суть кривые замкнутые (рис. 271).

Далее нетрудно показать, что система (391) во всяком случае определяет на плоскости x, y , кроме кривой B (о существовании и количестве действительных ветвей которой в самом общем случае ничего нельзя сказать), кривую двойной кратности, совпадающую с кривой Γ . Нетрудно также убедиться, что кривая B должна касаться кривой Γ в точках ее пересечения с прямой $x=y$.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо задаться аналитическим выражением характеристики анодного тока.

Будем аппроксимировать характеристику при помощи функции arctg :

$$i_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{3}{v_s} (e_{st} - v_s),$$

где I_s — ток насыщения, v_s — напряжение насыщения, $e_{st} = e_p + De_a$ — управляющее напряжение. Решая это уравнение относительно управляющего напряжения и пользуясь обозначениями, введенными выше, получим:

$$\psi(x) = v_s - \frac{v_s}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{RI_s} x,$$

$$\psi(y) = v_s - \frac{v_s}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{RI_s} y.$$

Для удобства рассмотрения перейдем к безразмерным величинам, введя переменные:

$$\frac{\pi}{RI_s} x = u,$$

$$\frac{\pi}{RI_s} y = v,$$

$$\frac{D}{RC} t = \tau.$$

Уравнения (387с), (388), (389), (390) и (391) в новых координатах примут вид:

$$\frac{du}{d\tau} = -(u - v) \frac{D + 1 + \frac{a}{\sin^2 v}}{\Delta(u, v)}, \quad (387e)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = + (u - v) \frac{D + 1 + \frac{a}{\sin^2 u}}{\Delta(u, v)}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{-(D + 1 + \frac{a}{\sin^2 u})}{D + 1 + \frac{a}{\sin^2 v}}, \quad (388a)$$

$$(D + 1)(u + v) - a(\operatorname{ctg} u + \operatorname{ctg} v) = c', \quad (389b)$$

$$\Delta(u, v) = \left(D + \frac{a}{\sin^2 u}\right) \left(D + \frac{a}{\sin^2 v}\right) - 1 = 0, \quad (390a)$$

$$\left. \begin{aligned} v + a \operatorname{ctg} u + Du &= v_0 + a \operatorname{ctg} u_0 + Du_0, \\ u + a \operatorname{ctg} v + Dv &= u_0 + a \operatorname{ctg} v_0 + Dv_0, \end{aligned} \right\} \quad (391a)$$

где, например, a и произвольная постоянная c' имеют значения:

$$a = \frac{\pi v_0}{3RI_2}, \quad c' = \frac{\pi}{RI_2} [E_{g_1} + E_{g_2} + D(E_1 + E_2) - 2K].$$

Уравнения для определения координат особых точек интегральных кривых имеют вид:

$$(u - v) \sin^2 u [(D + 1) \sin^2 v + a] = 0,$$

$$(u - v) \sin^2 v [(D + 1) \sin^2 u + a] = 0.$$

Отсюда находим координаты следующих четырех особых точек (рис. 270):

$$\text{I } (u=0, v=0), \quad \text{II } (u=0, v=\pi),$$

$$\text{III } (u=\pi, v=0), \quad \text{IV } (u=\pi, v=\pi).$$

Исследование этих особых точек показывает, что они имеют сложный характер и принадлежат к классу особых точек четвертого порядка.

Так как анодные токи могут меняться в пределах $0 \leq i_a \leq R_2$, то физический смысл имеет только часть фазовой плоскости, определяемая неравенствами:

$$0 \leq u \leq \pi; \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

В этой части плоскости (u, v) интегральные кривые вблизи особых точек ведут себя так, как если бы точки II и III были бы узлами, а точки I и IV — седлами.

Переходим к рассмотрению кривых Γ , B и интегральных кривых. Кривая Γ определяет на плоскости u, v (в рассматриваемой нами области) замкнутую кривую, симметричную относительно осей:

$$u = v; \quad u + v = \pi; \quad u = \frac{\pi}{2}; \quad v = \frac{\pi}{2}.$$

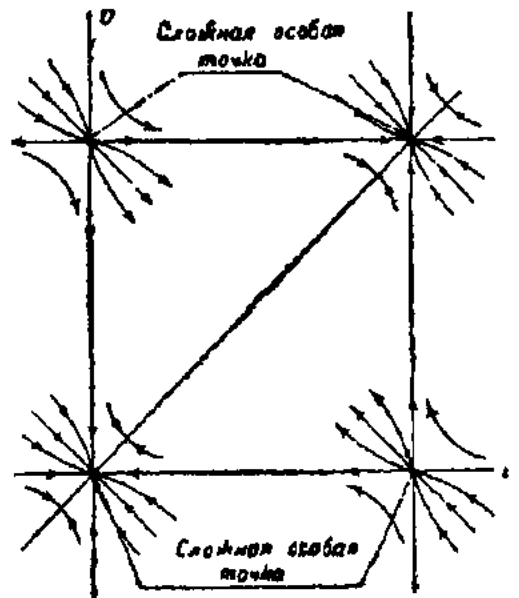


Рис. 270.

Кривая B [уравнение (391a)], построенная графически, является тоже замкнутой и симметричной относительно осей $u = v$ и $u + v = \pi$. Семейство интегральных кривых (389b) состоит из кривых, расположен-

ных симметрично относительно оси $v + u = \pi$, причем каждая из кривых симметрична относительно оси $u = v$.

Исследование «прямой равновесия» показывает, что эта прямая устойчива вне кривой Γ и неустойчива внутри нее.

На основании всего сказанного мы можем воспроизвести картину на фазовой плоскости переменных u, v (рис. 271).

Движение изображающей точки носит следующий характер: начав двигаться из произвольной точки, например из a , изображающая точка, двигаясь вдоль интегральной кривой, попадает в точку b на кривой Γ ; отсюда изображающая точка скачком переходит в точку c на кривой B . Далее, двигаясь по той же интегральной кривой, она снова попадает на кривую Γ в точке d , откуда происходит «скачок» в точку e , далее движение по интегральной кривой до точки b и т. д. Выясним, при каких значениях параметров возможны разрывные колебания. Очевидно, для этого необходимо: 1) чтобы кривая Γ имела действительные ветви; 2) константа, определяющая интегральную кривую, должна быть такова, чтобы существовали действительные точки пересечения интегральной кривой с кривой Γ . Можно показать, что первое условие (условие существования кривой Γ) будет выполняться, если

$$D < 1$$

и

$$a < 1 - D.$$

Второе условие будет выполнено, если

$$2(D+1) \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} - 2a \sqrt{\frac{1-D-a}{a}} < c' < \\ < 2(D+1) \left[\pi - \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} \right] - 2a \sqrt{\frac{1-D-a}{a}},$$

причем для \arcsin взято его значение, соответствующее первой четверти, а значение корня взято со знаком плюс.

Ввиду математических трудностей, связанных с вычислением периода колебаний для случая движения по произвольной интегральной кривой, мы выясним этот вопрос для диагональной интегральной

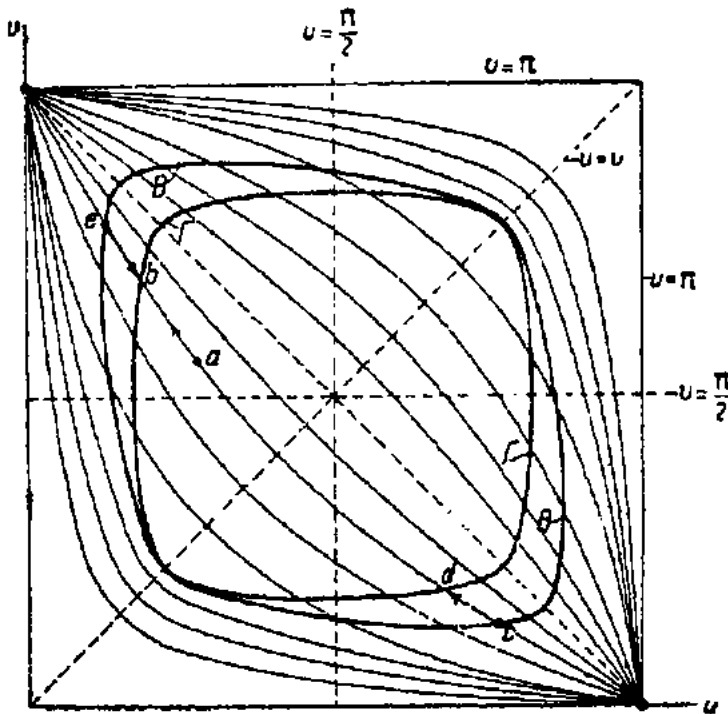


Рис. 271.

прямой. В этом случае уравнения (4а), в силу уравнения диагональной интегральной кривой $u + v = \pi$, принимают вид:

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{dv}{d\tau} = -(2u - \pi) \frac{D + 1 + \frac{a}{\sin^2 u}}{\left(D + \frac{a}{\sin^2 u}\right)^2 - 1},$$

откуда для периода имеем:

$$\tau = 2 \int_{u_0}^{u_1} \frac{1-D}{\pi - 2u} du + 2a \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{(2u - \pi) \sin^2 u},$$

где u_0 и u_1 — соответственно координаты точек пересечения интегральной прямой $u + v = \pi$ с кривыми Γ и B . Вторым интегралом, вследствие малости параметра a по сравнению с единицей, можно пренебречь в выражении для периода. Переходя к обычному масштабу времени, получим окончательно приближенную формулу для периода:

$$T = 2RC \frac{1-D}{D} \ln \frac{\pi - 2u_0}{\pi - 2u_1}.$$

2. Схема Хеегнера. В качестве другого примера вырожденной системы с двумя степенями свободы мы рассмотрим схему, предло-

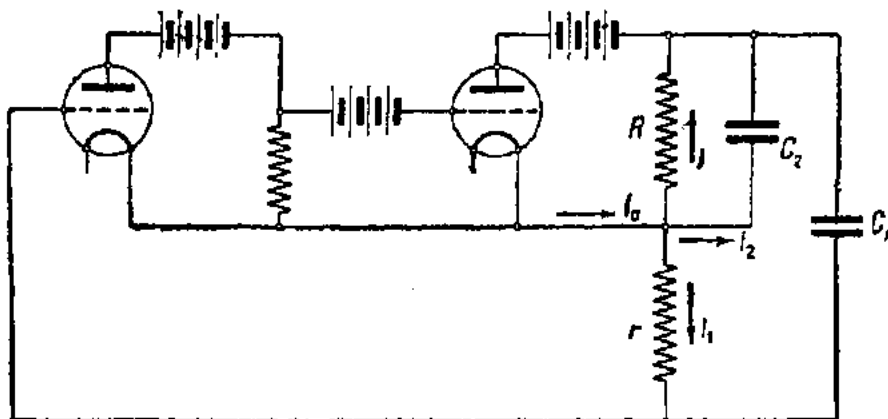


Рис. 272.

женную Хеегнером [50]. Схема эта при наших обычных упрощениях является дважды вырожденной системой с двумя степенями свободы. Действительно, пренебрегая анодной реакцией и сеточными токами и применяя обозначения токов и напряжений, приведенные на рис. 272, легко получить следующие два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{i_1}{rC_1} + \frac{i_2}{rC_2}, \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R+r - Rrk\varphi'(ri_2)}{RrC_2} i_2 + \frac{R - Rrk\varphi'(ri_1)}{RrC_1} i_1. \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

Сразу видно, что в рассматриваемом случае $\frac{di_1}{dt}$ и $\frac{di_2}{dt}$ при конечных i_1 и i_2 сохраняют конечные значения и что, следовательно, в системе невозможны скачкообразные изменения силы тока. С другой стороны,

при обычных предположениях о функции $\varphi(r, i_1)$ особая точка у этой системы уравнений только одна: $i_1 = 0$, $i_2 = 0$. В этой точке $\varphi'(0) = S > 0$, и характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{rC_1} - \gamma & \frac{1}{rC_2} \\ \frac{R - RrkS}{RrC_1} & -\frac{R + r - RrkS}{RrC_2} - \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\gamma^2 + \gamma \left[\frac{1}{rC_1} + \frac{R + r - RrkS}{RrC_2} \right] + \left[\frac{R + r - RrkS}{Rr^2C_1C_2} - \frac{R - RrkS}{Rr^2C_1C_2} \right] = 0,$$

или, наконец:

$$\gamma^2 + \left[\frac{C_2}{C_1} + \frac{R + r - RrkS}{R} \right] \frac{1}{rC_2} \gamma + \frac{1}{RrC_1C_2} = 0. \quad (393)$$

Из этого характеристического уравнения видно, что особая точка не может быть седлом, а лишь узлом или фокусом. Неустойчивость этой особой точки определяется условием:

$$\frac{RrkS - (R + r)}{R} > \frac{C_2}{C_1}. \quad (394)$$

Если это неравенство «слабое», то мы имеем неустойчивый фокус, если же неравенство это «сильное», то мы имеем неустойчивый узел.

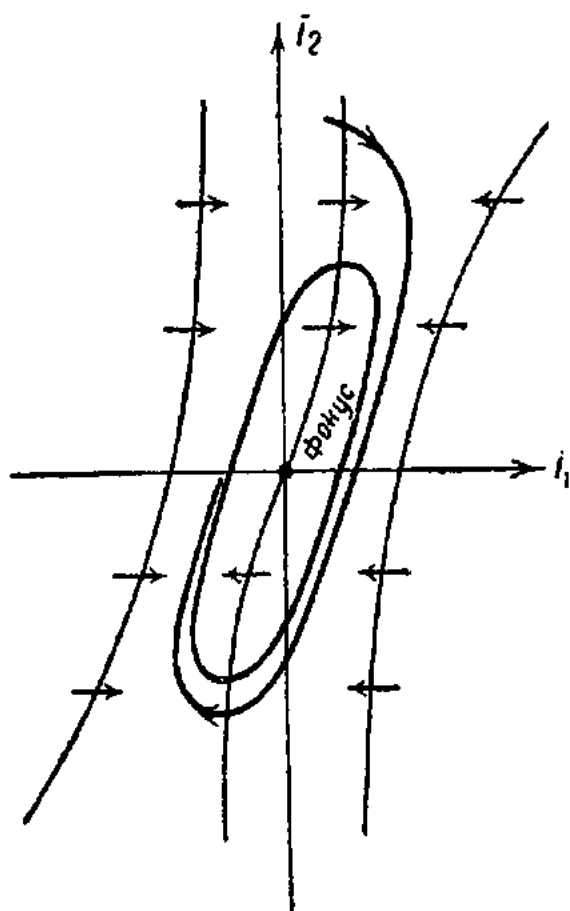


Рис. 273.

Бесконечность в подобных схемах всегда неустойчива. Действительно, при больших напряжениях лампа достигает насыщения (или запирается) и перестает работать, поэтому в далеких областях схема ведет себя как линейная, имеющая особую точку типа устойчивого узла. Следовательно, все интегральные кривые приходят из бесконечности в область конечных i_1 и i_2 . И если в начале координат лежит неустойчивая особая точка, то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Для случая какой-либо характеристики с монотонно убывающей крутизной этот устойчивый предельный цикл будет единственным. Для отыскания этого предельного цикла можно применить, например, метод изоклин. Предельный цикл, полученный для рассматриваемой схемы при помощи метода изоклин, изображен на рис. 273. Колебания в схеме не только непрерывны, но и близки к синусоидальным, о чем можно судить по тому, что

форма предельного цикла близка к эллипсу. Однако при более сильном возбуждении [«усилении» неравенства (394)] форма предельного цикла

искажается, и колебания становятся все более и более отличными от синусоидальных, оставаясь, однако, все время непрерывными, так как «разрывных» колебаний в рассматриваемой схеме существовать не может.

3. Мультивибратор Абрагама-Блоха. Наоборот, в схеме, предложенной Абрагамом и Блохом^[23], известной под именем мультивибратора, могут существовать именно только «разрывные» колебания^[71]. Для этой схемы (рис. 274), пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией, считая схему симметричной и применяя обозначения токов, приведенные на чертеже, получаем следующие два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{(R+r) \frac{i_1}{C} - rR \varphi'(ri_2) \frac{i_2}{C}}{r^2 R^2 \varphi'(ri_1) \varphi'(ri_2) - (R+r)^2}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{(R+r) \frac{i_2}{C} - rR \varphi'(ri_1) \frac{i_1}{C}}{r^2 R^2 \varphi'(ri_1) \varphi'(ri_2) - (R+r)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (395)$$

Система уравнений (395), которая может быть написана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{P(i_1, i_2)}{R(i_1, i_2)}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{Q(i_1, i_2)}{R(i_1, i_2)}, \end{aligned}$$

имеет одно состояние равновесия ($i_1 = 0$ и $i_2 = 0$ ¹⁾). Применяя критерий Бендиксона, можно убедиться, что система уравнений (395) не допускает непрерывных периодических решений, так как выражение $\frac{\partial P}{\partial i_2} + \frac{\partial Q}{\partial i_1}$ никогда не обращается в нуль. Для единственного состояния равновесия характеристическое уравнение имеет вид²⁾:

$$\gamma^2 + \frac{2(R+r)}{C[-r^2 R^2 S^2 + (R+r)^2]} + \frac{1}{C^2 [(R+r)^2 - r^2 R^2 S^2]} = 0. \quad (396)$$

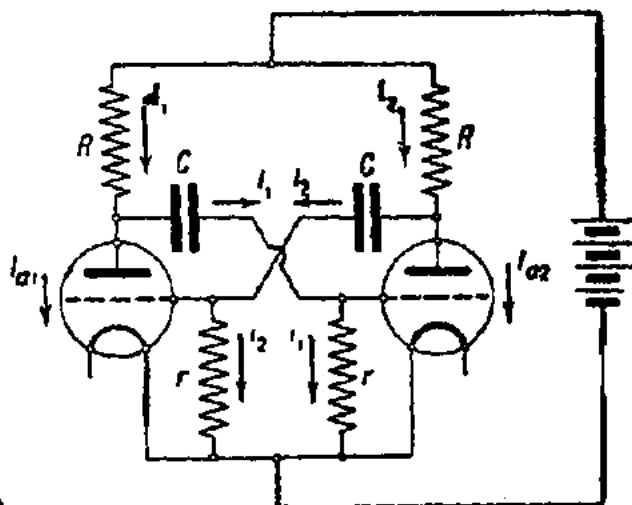


Рис. 274.

Очевидно, что особая точка может быть либо устойчивым узлом, если

1) Система (395) имеет еще и другие особые точки, для которых одновременно $P(i_1, i_2) = 0$ и $Q(i_1, i_2) = 0$, но если при этом $i_1 \neq 0$ и $i_2 \neq 0$, то вместе с P и Q обращается в нуль и R . В нашем случае такие особые точки не соответствуют состояниям равновесия.

2) Мы считаем схему симметричной не только в отношении параметров, но и в отношении ламп, и поэтому полагаем, что крутизна характеристики у обеих ламп в рабочей точке одна и та же, т. е. что $\varphi'(ri_1)_{i_1=0} = \varphi'(ri_2)_{i_2=0} = S > 0$.

все коэффициенты характеристического уравнения положительны, либо седлом, если

$$rRS > R + r. \quad (397)$$

Это есть, следовательно, условие устойчивости состояния равновесия. Но если $Rr\varphi'(0) > R + r$, то при каких-то значениях i_1 и i_2 должно существовать равенство:

$$r^2 R^2 \varphi'(ri_1) \varphi'(ri_2) = (R + r)^2, \quad (398)$$

т. е. знаменатель $R(i_1, i_2)$ в обоих уравнениях (395) при каких-то значениях $i_1 = i'_1$ и $i_2 = i'_2$ одновременно обращается в нуль, а это значит, что в этот момент $\frac{di_1}{dt}$ и $\frac{di_2}{dt}$ обращаются в бесконечность и сила тока в обеих цепях может измениться скачком. Таким образом, с одной стороны, рассматриваемая схема не допускает непрерывных периодических решений, так как в области, где $\frac{di_1}{dt}$ и $\frac{di_2}{dt}$ не обращаются в бесконечность, существует только одна особая точка типа седла и, значит, предельных циклов нет; с другой стороны, система допускает скачки, и, следовательно, можно ожидать, что в ней возникают разрывные периодические решения.

Место, откуда происходят скачки, определяется условием:

$$R(i'_1, i'_2) = r^2 R^2 \varphi'(ri'_1) \varphi'(ri'_2) - (R + r)^2 = 0. \quad (399)$$

При условии, что $\varphi'(0) rR > R + r$ и что $\varphi'(ri)$ монотонно убывает в обе стороны от нуля, эта кривая представляет собой замкнутую кривую, симметричную относительно i_1 и i_2 и охватывающую начало координат (кривая Γ на рис. 275). Место, куда перескакивает представляющая точка с какой-либо точки, лежащей на кривой Γ (координаты этой точки i'_1, i'_2), определяется условиями скачка, т. е. гипотезой, что при скачке напряжения на обкладках обоих конденсаторов остаются неизменными. Так как напряжения на обкладках конденсатора определяются выражениями:

$$V_1 = E - R\varphi(ri_2) - (R + r)i_1 \quad \text{и} \quad V_2 = E - R\varphi(ri_1) - (R + r)i_2,$$

то требование непрерывности изменения V приводит к таким условиям скачка:

$$\left. \begin{aligned} R\varphi(ri'_2) - (R + r)i'_1 &= R\varphi(ri''_2) - (R + r)i''_1, \\ R\varphi(ri'_1) - (R + r)i'_2 &= R\varphi(ri''_1) - (R + r)i''_2, \end{aligned} \right\} \quad (400)$$

где i'_1, i'_2 — значения до скачка, а i''_1, i''_2 — значения после скачка.

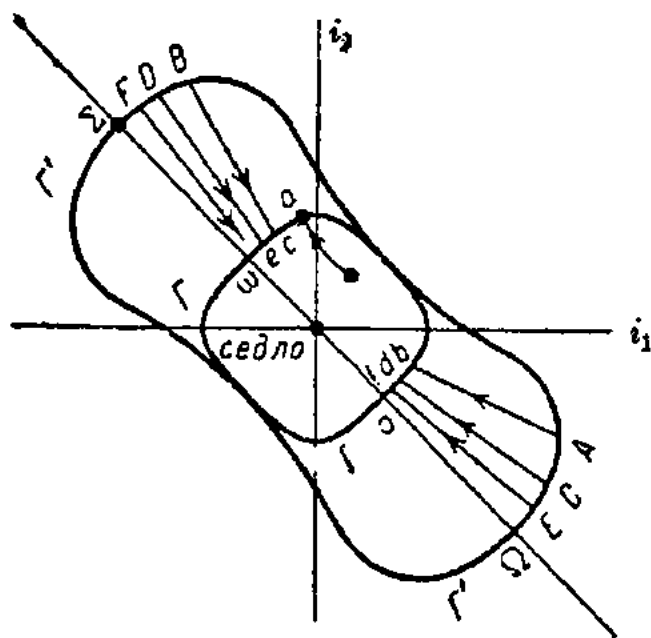


Рис. 275.

Из этих условий для каждой пары значений i'_1, i'_2 определяется однозначно пара значений i''_1, i''_2 , определяющая точку A , в которую перескакивает система из точки a . Определяя для каждой точки кривой Γ соответствующую ей точку, в которую перескакивает система, мы получим кривую Γ' (рис. 275), которая представляет собой геометрическое место точек, в которые перескакивает система. Эта кривая Γ' , также замкнутая и симметричная относительно i_1, i_2 , охватывает кривую Γ .

Представляющая точка из любой области фазовой плоскости попадает на кривую Γ , например в точку a . Дальнейшее движение представляющей точки состоит из непрерывных движений по участкам Ab, Bc, Cd и т. д. и из скачков из a в A , из b в B , из c в C и т. д. Можно показать, что при этих движениях система все больше и больше приближается к периодическому процессу, состоящему из двух непрерывных движений: от Ω к σ и от ϵ к ω , и из двух скачков: от ω к Ω и от σ к ϵ ¹⁾. При таком периодическом движении все время соблюдается равенство $i_1 = -i_2$. Эта симметрия в колебаниях является, конечно, результатом симметричности схемы и ламп. Можно было бы с самого начала предполагать, что установившееся движение будет симметричным относительно i_1 и i_2 , и, значит, в одном из уравнений (395) мы могли бы положить $i_1 = -i_2$ и $\varphi'(ri_1) = -\varphi'(ri_2)$ и прийти в результате к одному уравнению первого порядка:

$$\frac{di}{dt} = \frac{(R+r) + rR\varphi'(ri)}{r^2R^2[\varphi'(ri)]^2 - (R+r)^2}$$

или

$$[rR\varphi'(ri) - (R+r)] \frac{di}{dt} = \frac{i}{C}.$$

Уравнение подобного типа мы уже рассматривали (гл. IV, § 11) при изучении разрывных колебаний в системе с одной степенью свободы. Мы могли бы таким образом исследование симметричного мульти-вibratorа свести к исследованию системы, описываемой одним урав-

1) Эта «замкнутая» траектория, состоящая из двух скачков и двух непрерывных движений, в рассматриваемом случае играет роль предельного цикла. Однако можно сделать так, чтобы разрывное периодическое движение отображалось при помощи настоящего предельного цикла, если только вместо фазовой плоскости выбрать соответствующую фазовую поверхность. Мы видели, что, попадая на замкнутую кривую Γ (рис. 275), изображающая точка перескакивает на кривую Γ' . Установившихся движений можно ожидать только в области между этими двумя кривыми. Считая точку a тождественной A , точку b тождественной B и т. д., можно отобразить эту область на поверхности шара. (Если какую-нибудь поверхность можно взаимно непрерывно и взаимно однозначно отобразить по поверхности шара, то математики говорят, что такая поверхность гомеоморфна шару.) Разрывные колебания при этом отобразятся предельным циклом (например экватор). Кроме того, на шаре мы получим две особые точки (узла), расположенные в разные стороны цикла (например на полюсах). После такого отображения сразу видно, что в мульти-вibratorе Абрагама-Блоха не может быть квази-периодических движений. Такие движения могли бы существовать только тогда, когда фазовая поверхность — тор. Не может быть также периодических движений, дважды охватывающих шар; в precise эти результаты не очевидны.

нением первого порядка, однако при этом мы были бы лишены возможности рассматривать поведение схемы при несимметричных начальных условиях, т. е. проследить установление колебаний в том случае, когда в начальный момент $i_{1,0} \neq i_{2,0}$. Нужно, однако, иметь в виду, что, описывая схему мультивибратора двумя уравнениями первого порядка, мы также не можем рассматривать любых начальных условий, так как уравнение допускает задание только двух начальных условий, между тем как в начальный момент могут быть заданы четыре величины (два тока и два напряжения). Как и в случае системы с одной степенью свободы, пренебрежение одним из колебательных параметров приводит к конфликту между начальными условиями и уравнениями, описывающими систему. Меры «ликвидации конфликта» остаются прежними — нужно учесть либо паразитную самоиндукцию, либо паразитную емкость цепей. В системе становятся невозможными скачки, но зато становятся возможными непрерывные периодические решения. Однако это связано с повышением порядка (или числа) уравнений. Вместо этого можно поступить иначе — считать, что конфликт разрешается мгновенно при помощи начального скачка: система скачком переходит из начального состояния, несовместимого с уравнениями, в состояние, допускаемое уравнениями, причем скачок подчиняется общему условию скачка. Однако, как мы видели, условия скачка, вообще говоря, не всегда однозначно определяют то состояние, в которое приходит система.

Заметим кстати еще следующее. При рассмотрении схемы мультивибратора Абрагама-Блоха предположение о том, что автоколебания симметричны, хотя и упрощало значительно задачу, но не было необходимым. Мы и без этого упрощающего предположения были в состоянии рассмотреть задачу до конца. Однако в общем случае такие симметричные схемы с двумя степенями свободы приводят к двум уравнениям не первого, а второго порядка, т. е. к задаче, математически весьма сложной. В таком случае только предположение о симметричности колебаний позволяет рассмотреть вопрос при помощи тех методов, которые нами изложены. Это предположение о симметрии хорошо соблюдается на опыте, если сама схема достаточно симметрична. Так, например, обстоит дело со схемой так называемого «мультивибратора на самоиндукциях» (рис. 276), применяемого в технике измерения радиочастот. Рассматривая эту схему с нашими обычными упрощениями, мы получим два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$rL \varphi'(ri_2) \frac{di_2}{dt} + L \frac{di_1}{dt} + ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt = E,$$

$$rL \varphi'(ri_1) \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} + ri_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = E.$$

Предполагая, что колебания в схеме симметричны, т. е. что все время соблюдается равенство $i_1 = -i_2$, мы, заменяя в одном из этих уравнений i_2 через $-i_1$, получим одно уравнение первого порядка:

$$L [1 - r\varphi'(ri)] \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = E.$$

Это уравнение вполне эквивалентно двум уравнениям (370), полученным для схемы с одной степенью свободы, содержащей L , C и r . Следовательно, в том случае, когда схема мультивибратора на самоиндукциях достаточно симметрична, к ней можно сразу применить все те выводы, которые были получены в предшествующем параграфе для схемы с одной степенью свободы (нужно лишь положить $k=1$).

Мы рассмотрели две схемы, из которых одна допускает только непрерывные, а другая только разрывные колебания. Можно, однако, указать такие схемы, в которых при конечных изменениях того или иного параметра происходит переход от непрерывных к разрывным колебаниям. Такова, например, уже рассмотренная нами «универсальная» схема, приведенная на рис. 277. Как мы видели, при перемещении движка k вдоль сопротивления r , когда отношение сопротивления r_1 ко всему сопротивлению $r = r_1 + r_2$ (это отношение мы обозначим через β) достигает определенного значения, происходит переход от особой точки типа узла к особой точке типа седла. Вместе с тем

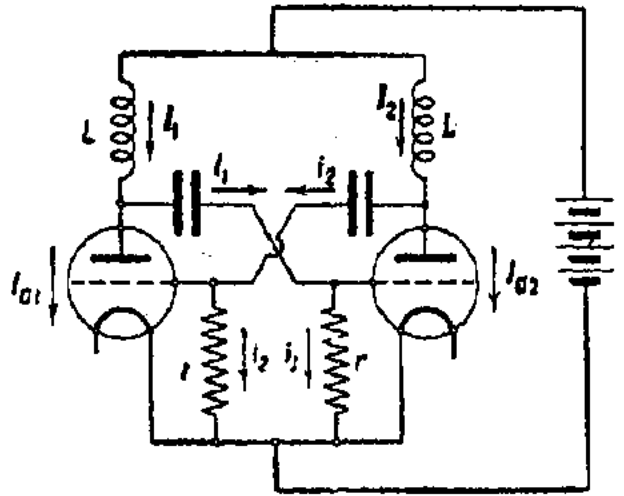


Рис. 276.

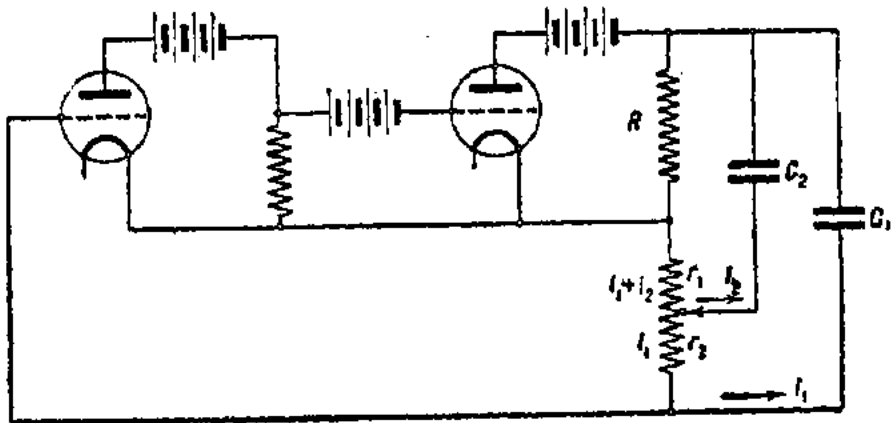


Рис. 277.

происходит переход от непрерывных колебаний к разрывным. В этом легко убедиться, рассматривая общие уравнения универсальной схемы (полученные при наших обычных упрощающих предположениях):

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{i_1}{(1-\beta)rC_1} + \frac{i_2}{(1-\beta)rC_2},$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\{\beta r + R - rR\varphi' [kr(i_1 + \beta i_2)]\} \frac{i_1}{C_1} - \{r + R - rR\varphi' [kr(i_1 + \beta i_2)]\} \frac{i_2}{C_2}}{(1-\beta) \{R + \beta r - \beta rR\varphi' [kr(i_1 + \beta i_2)]\}}.$$

При рассмотрении «линеаризованных» уравнений мы убедились в том, что при значениях $\beta < \beta_{xp} = \frac{R}{r} \frac{1}{SkR - 1}$ особая точка будет фокус

или узел. В этом случае в системе будет существовать предельный цикл. При $\beta > \beta_{кр}$ особая точка является седлом, предельный цикл исчезает, но становятся возможными скачкообразные изменения силы тока i_2 , так как $\frac{di_2}{dt}$ может обращаться в бесконечность. В системе

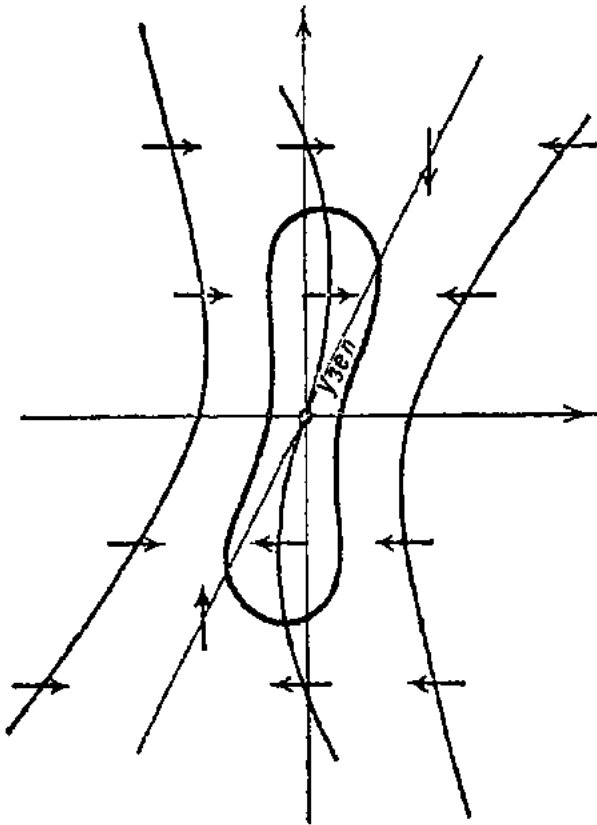


Рис. 278.

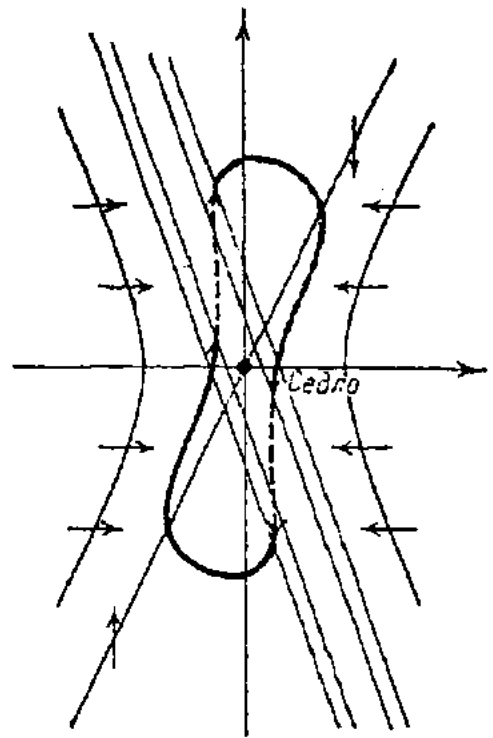


Рис. 279.

происходят разрывные колебания, подобные тем, какие были рассмотрены в предыдущем параграфе. Картины на фазовой плоскости для того и другого случая изображены соответственно на рис. 278 и 279.

§ 19. Малые параметры и паразитные степени свободы

Как уже неоднократно указывалось, при рассмотрении всякой реальной физической системы мы неизбежно должны идеализировать эту систему. Но, отбрасывая те или иные свойства системы, применяя ту или иную идеализацию, мы всегда рискуем тем, что можем отбросить как раз существенные для рассматриваемого вопроса обстоятельства и что сделанные допущения как раз не дадут возможности правильно ответить на поставленные вопросы. Мы не можем построить никакой теории, пока не идеализируем свойств рассматриваемой системы, но, с другой стороны, мы не можем решить вопрос о «законности» допущенной идеализации, пока не получим каких-либо результатов из нашего теоретического рассмотрения и не сопоставим этих результатов с данными опыта.

Однако некоторые соображения о «законности» и о последствиях какой-либо определенной идеализации мы все же можем высказать, не апеллируя к данным опыта, если мы будем рассматривать и сопоста-

влять две теории, одна из которых развита с применением интересующей нас идеализации, а другая без нее.

Одним из наиболее широко применяемых методов идеализации является пренебрежение теми или иными «малыми» параметрами системы. В простейших случаях это пренебрежение каким-либо малым параметром математически выражается в том, что мы отбрасываем один из членов дифференциального уравнения, описывающего систему, именно тот его член, который содержит в качестве коэффициента пренебрегаемый параметр. Так, например, когда мы пренебрегаем самоиндукцией контура, содержащего, кроме того, сопротивление и емкость, то это значит, что в уравнении $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ мы отбрасываем первый

член $L\ddot{q}$. Это отбрасывание, конечно, не проходит «безнаказанно», ибо мы тем самым ограничиваем свое рассмотрение только теми областями, где $L\ddot{q}$ мало по сравнению с двумя другими членами уравнения, и лишаемся возможности изучать поведение системы в тех областях, где $L\ddot{q}$ сравнимо с $R\dot{q}$ и $\frac{q}{C}$. Однако в некото-

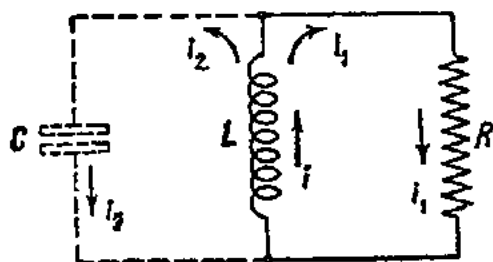


Рис. 280.

рых случаях мы вполне можем помириться с этим ограничением. При этом мы говорим, что отбрасываем параметр L потому, что «он мал», хотя по существу говорить о малости параметра L не имеем права, ибо это — параметр, имеющий определенную размерность, и об его малости можно судить, только сравнивая его с другими величинами той же размерности. В сущности мы отбрасываем не малый параметр L , а малый (по сравнению с другими членами дифференциального уравнения) член $L\ddot{q}$.

Точно так же, пренебрегая той собственной емкостью, которой обладает, например, включенная в контур катушка самоиндукции (рис. 280), мы отбрасываем соответствующий член дифференциального уравнения, содержащий эту собственную емкость C в качестве коэффициента. Именно, вместо уравнения

$$RLC \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = 0$$

мы пытаемся охватить поведение системы при помощи «укороченного» уравнения $L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = 0$. Это уравнение будет удовлетворительно описывать поведение системы во всей области, где $RLC \frac{d^2 i_1}{dt^2}$ мало по сравнению с другими двумя членами уравнения. В области же, где $RLC \frac{d^2 i_1}{dt^2}$ сравнимо с двумя другими членами уравнения, укороченное уравнение не может описать поведения системы. Опять-таки мы говорим, что пренебрегаем параметром C в силу его малости, хотя по существу ни с чем его не сравниваем и ничего об его малости сказать не можем. Мы отбрасываем один из членов дифференциального уравнения, рассчи-

тывая на то, что чем меньше соответствующий параметр, тем шире область, в которой отбрасываемый член дифференциального уравнения мал и поэтому не играет существенной роли.

Иногда то же самое предположение о малости члена дифференциального уравнения базируется не на том, что параметр «мал», а, наоборот, на том, что он «велик». Так, например, рассматривая процесс, происходящий после включения постоянной ЭДС в цепь, состоящую из включенных последовательно самоиндукции, емкости и сопротивления, мы можем вместо уравнения $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$ (причем, для $t=0, q=0, \dot{q}=0$) для начальной стадии процесса ограничиться укороченным уравнением $L\ddot{q} + R\dot{q} = 0$, т. е. пренебречь $\frac{q}{C}$ по сравнению с другими членами уравнения. Это укороченное уравнение тем дольше (считая от момента $t=0$) будет пригодно для описания процесса, чем больше емкость C . Мы пренебрегаем в этом случае параметром не потому, что он «мал», а потому, что он «велик», но коэффициентом при соответствующем члене дифференциального уравнения служит не сам большой параметр, а обратная ему малая величина.

Конечно, физически это — два совершенно различных случая. «Малыми» параметрами мы часто вынуждены пренебрегать, так как просто не знаем их величин, например не знаем собственной емкости катушки самоиндукции или собственной самоиндукции проводов сопротивления. Поэтому если бы мы и попытались учесть эти «малые» параметры и ради этого повысили бы порядок уравнений, описывающих систему, то это все же не продвинуло бы нас вперед, так как величин этих параметров мы не знаем. С другой стороны, мы обычно не в состоянии избавиться от этих малых параметров в реальной схеме, так как мы не можем сделать сопротивление, совсем не обладающее самоиндукцией, или катушку самоиндукции совсем без емкости. Эти малые параметры, которые не могут быть совершенно устранены и которыми обычно пренебрегают, мы и называем «паразитными параметрами». Конечно, большая емкость, которой, как мы видели, иногда тоже можно пренебречь, — это нечто совсем иное. Эта емкость не является паразитной — она обычно составляет существенную часть схемы и легко может быть устранена из схемы. Кроме того, величина ее почти всегда хорошо известна, и мы отбрасываем ее для упрощения задачи. Это в сущности довольно специальный прием. Между тем первый случай — когда мы отбрасываем некоторые члены дифференциального уравнения в силу того, что соответствующие параметры системы малы, — является физически гораздо более интересным, так как мы в той или иной мере пользуемся этим приемом на каждом шагу, в каждой попытке описать реальную физическую систему при помощи дифференциальных уравнений.

Мы вынуждены это делать, так как если бы мы вводили в рассмотрение все новые и новые параметры системы, то мы получали бы дифференциальное уравнение все более и более высокого порядка. Мы отбрасываем те члены дифференциального уравнения, которые по нашим предположениям либо везде, либо в большей части интересующей нас

области должны быть малы по сравнению со всеми остальными (не отбрасываемыми) членами уравнения. Отказываясь от рассмотрения вопроса в общем виде, мы поставим перед собой более узкую задачу, именно — попытаемся проследить, могут ли малые члены дифференциального уравнения вызвать изменение *устойчивости состояний равновесия* в системе ¹⁾.

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением вопроса об устойчивости состояний равновесия, мы можем пользоваться линейным приближением. Пусть вблизи состояния равновесия поведение системы может быть описано линейным дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0. \quad (401)$$

Для линейных систем все сказанное ниже может быть отнесено не только к областям, близким в состоянии равновесия, но и ко всей области изменений координат и скоростей.

При подстановке $x = e^{st}$ мы получим характеристическое уравнение n -й степени:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (402)$$

Знаком корней этого уравнения решается вопрос об устойчивости состояний равновесия, именно, состояние равновесия устойчиво, если все n корней или их действительные части отрицательны. Введение нового малого члена в исходное уравнение должно быть связано с повышением порядка уравнения. Положим, что порядок уравнения повышается на единицу. (Другие случаи, когда порядок уравнения повышается сразу больше чем на единицу, могут быть рассмотрены подобным образом.) Это повышение порядка уравнения (401) может произойти двумя путями — прибавлением либо малого члена $\lambda \frac{d^{n+1} x}{dt^{n+1}}$, либо

малого члена $\lambda \int_0^t x dt$, где λ — достаточно малый коэффициент. В первом

случае характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda S^{n+1} + a'_0 S^n + a'_1 S^{n-1} + \dots + a'_n = 0, \quad (403)$$

а во втором:

$$a'_0 S^{n+1} + a'_1 S^n + \dots + a'_n S + \lambda = 0. \quad (404)$$

1) Заметим, что понятие о «грубости» автономной системы, определяемой (например) двумя дифференциальными уравнениями 1-го порядка, может быть естественным образом обобщено на случай, когда малые добавочные члены содержат первые производные, т. е. когда «изменяемая» система имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p_1 \left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q_1 \left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right).$$

Если же малые добавочные члены содержат производные высших порядков, то вся данная постановка задачи о «грубости» системы нарушается, так как для измененной системы мы имеем фазовое пространство большого числа измерений. Как мы увидим дальше, в этом последнем случае мы не можем распорядиться (без особых специальных ограничений) малостью добавочных членов, хотя бы в том отношении, чтобы они не влияли на устойчивость состояния равновесия.

В новых уравнениях вместо коэффициентов a_i появятся, вообще говоря, другие коэффициенты a'_i , так как учет малого параметра может привести не только к появлению новых членов, но и к небольшим изменениям старых, причем, очевидно, при $\lambda \rightarrow 0$, $a'_i \rightarrow a_i$. Оба эти уравнения имеют по $n+1$ корней. Из них n корней S_1, S_2, \dots, S_n в силу малости коэффициента λ близки по величине к n корням исходного характеристического уравнения и имеют знаки, совпадающие со знаками действительных частей¹⁾. Следовательно, изменения, происшедшие с этими n корнями, не могут изменить устойчивости состояния равновесия. Это может сделать только новый корень S_{n+1} . Чтобы решить вопрос о влиянии этого корня, рассмотрим оба случая отдельно.

Начнем с первого случая. Известно, что, при $\lambda \rightarrow 0$, $S_{(n+1)} \rightarrow \infty$, поэтому если λ достаточно мало, то S_{n+1} очень велико, и мы можем в уравнении (403) отбросить все члены степени ниже n и получить следующее асимптотическое выражение для $S_{(n+1)}$ при малых λ :

$$S_{(n+1)} \approx -\frac{a_0}{\lambda}. \quad (405)$$

Во втором случае мы можем характеристическое уравнение (404) переписать так:

$$S[a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n] + \lambda = 0.$$

При $\lambda \rightarrow 0$, $S_{(n+1)} \rightarrow 0$; поэтому при малых λ , пренебрегая высшими степенями $S_{(n+1)}$, мы получим во втором случае такое асимптотическое выражение для $S_{(n+1)}$:

$$S_{(n+1)} \approx -\frac{\lambda}{a_n}. \quad (406)$$

Теперь легко установить, какое влияние на устойчивость состояний равновесия может иметь введение нового малого члена в том и другом случаях. Поведение системы вблизи состояния равновесия определяется уравнением:

$$x = b e^{S_{(n+1)} t} + c_1 e^{S_1 t} + c_2 e^{S_2 t} + \dots + c_n e^{S_n t}. \quad (407)$$

Если среди n «старых» корней S_1, S_2, \dots, S_n есть хоть один с действительной частью, большей нуля, то состояние равновесия неустойчиво и новый корень $S_{(n+1)}$ не может в характере этого состояния ничего изменить — оно все равно будет неустойчиво. Если же все n корней (или их действительные части) отрицательны, то устойчивость состояния равновесия решается знаком корня $S_{(n+1)}$. Если этот корень отрицателен, то ничего нового он не вносит. Если же он положителен, то состояние равновесия оказывается неустойчивым и, значит, при переходе от исходной системы к дополненной происходит потеря устойчивости. Но знак $S_{(n+1)}$ зависит, с одной стороны, от знака λ и, с другой, — от знака коэффициента a_0 или a_n исходного уравнения. Если выбрать $a_0 > 0$, то a_n должно быть положительно, чтобы состояние

¹⁾ Мы предполагаем, что исходная система «грубая» и что, следовательно, действительные части всех корней исходного характеристического уравнения отличны от нулей.

равновесия в исходной системе было устойчиво¹⁾). Следовательно, потеря устойчивости может произойти в том случае, если стоящий при вновь введенном малом члене коэффициент λ отрицателен. Как мы увидим, такие случаи могут быть в реальных системах. Это значит, что состояние равновесия, которое без учета паразитного параметра кажется нам устойчивым, в силу наличия этого параметра в действительности оказывается неустойчивым, и реальная система в таком состоянии находиться не может. Совершенно очевидно, насколько важно было бы уметь отличать эти состояния равновесия, кажущиеся нам устойчивыми, от состояний равновесия действительно устойчивых, т. е. таких, в которых реальная система может находиться как угодно долго.

Несмотря на отсутствие каких-либо общих методов, мы все же можем указать прием, с помощью которого во многих случаях можно «разоблачить» такие состояния равновесия, которые только кажутся устойчивыми, а в действительности неустойчивы. Этот прием заключается в том, чтобы последовательно вводить в уравнение различные малые паразитные параметры и определять знаки, с которыми они входят в уравнение. Если мы обнаружим хоть один такой паразитный параметр, который входит со знаком минус, то есть основания опасаться, что состояние равновесия в действительности неустойчиво. Мы говорим только «есть основания», так как возможно, что другой паразитный параметр входит в этот же член уравнения со знаком плюс, и тогда знак коэффициента зависит от соотношения между величинами паразитных параметров, а величин паразитных параметров мы обычно не знаем. Кроме того, мы никогда не сможем рассмотреть влияние всех без исключения паразитных параметров. Поэтому, строго говоря, мы никогда не можем быть уверены в том, что состояние равновесия, которое с точки зрения нашей теории кажется устойчивым, действительно устойчиво. Решить этот вопрос окончательно не в состоянии никакая теория, ответ на него может дать только опыт. Но все же при теоретическом рассмотрении всегда нужно иметь в виду, что существует опасность принять неустойчивое состояние равновесия за устойчивое.

Чтобы показать, насколько велика эта опасность и насколько легко в некоторых случаях ее избежать и «разоблачить» состояния равновесия, кажущиеся устойчивыми, мы рассмотрим несколько конкретных примеров, а затем снова вернемся к некоторым общим соображениям. В наших примерах мы ограничимся только такими случаями, которые могут быть рассмотрены до конца в рамках теории нелинейных уравнений второго порядка. Следовательно, мы будем рассматривать такие системы, которые при учете малых членов описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а при отбрасывании этих членов приводят к уравнению первого порядка. При этом мы начнем рассмотрение с уравнения второго порядка, а затем, предполагая один из параметров малым и отбрасывая соответствующий член уравнения, рассмотрим соответствующие уравнения первого порядка.

1) Это требование сразу получается из так называемых условий Раута-Гурвица. См., например, [18].

В качестве первого примера мы рассмотрим уже знакомую нам схему вольтовой дуги, питаемой постоянным током (рис. 281). Кроме батареи и дуги, в этой цепи присутствуют сопротивление R , самоиндукция L и емкость C (само собой разумеется, что уже и в таком виде рассматриваемая схема представляет собой результат идеализации). Как и раньше, характеристику вольтовой дуги, т. е. зависимость силы тока в цепи дуги i от напряжения на ее зажимах V_b , мы обозначим через $i = \varphi(V_b)$. Но нам удобнее будет пользоваться обратной зависимостью V_b от i , которую мы обозначим так: $V_b = \psi(i)$ (рис. 282).

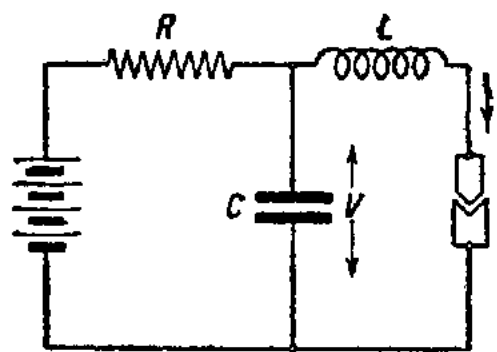


Рис. 281.

Повторим и дополним те выводы, которые были нами сделаны раньше, при рассмотрении этой схемы.

Уравнения для рассматриваемой схемы мы получили в таком виде:

$$C \frac{dV}{dt} = \frac{E - V}{R} - i, \quad L \frac{di}{dt} = V - \psi(i). \quad (408)$$

Состояния равновесия этой системы (i_0, V_0) определяются из условия:

$$\psi(i) = E - Ri$$

и соответствуют точкам пересечения кривой $\psi = \psi(i)$ и прямой $\psi = E - Ri$ (этих точек пересечения может быть либо одна, либо три).

Для того чтобы исследовать характер этих состояний равновесия, перенесем начало координат в точку, соответствующую состоянию равновесия $i = i_0$ и $V = V_0$, и разложим функцию $\psi(i)$ в ряд вблизи значения $i = i_0$:

$$\psi(i) = \psi(i_0) + i\psi'(i_0) + \dots$$

Подставляя в уравнения (408) вместо $\psi(i)$ первые два члена этого ряда, а вместо V и i выражения $V + V_0$ и $i + i_0$, где V_0 и i_0 — значения тока и напряжения, соответствующие состоянию равновесия, а V и i — значения, отсчитываемые от состояния равновесия, получим [принимая во внимание, что V_0 и i_0 удовлетворяют уравнениям (408)]:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{CR} - \frac{i}{C}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{\psi'(i_0)}{L} i. \quad (409)$$

Для того чтобы выяснить характер состояния равновесия (i_0, V_0), составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{CR} - \gamma & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{\psi'(i_0)}{L} - \gamma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\gamma^2 + \left[\frac{1}{Rc} + \frac{\psi'}{L} \right] \gamma + \frac{1}{Lc} \left[1 + \frac{\psi'}{R} \right] = 0. \quad (410)$$

Очевидно, что характер особой точки, а значит, и состояния равновесия, зависит от знака и величины ψ' , т. е. от крутизны характеристики дуги в точке, соответствующей данному состоянию равновесия. Состояние равновесия, отмеченное цифрой 1 (рис. 283) (так как $\psi'(i_1) > 0$ и оба корня уравнения (410) или их действительные части отрицательны), во всяком случае устойчиво — это либо устойчивый фокус, либо устойчивый узел в зависимости от соотношений между L , C , R и $\psi'(i_1)$. В точке 2 $\psi'(i_2)$ отрицательно и, как видно из диаграммы, по абсолютной величине больше, чем R . Следовательно, $1 + \frac{\psi'(i_2)}{R} < 0$, и особая точка 2 есть седло. Соответствующее ей состояние равновесия всегда неустойчиво. Наконец, в точке 3 хотя $\psi'(i_3) < 0$, но, как видно из диаграммы, по абсолютной величине $\psi'(i_3)$ меньше, чем R , и, значит,

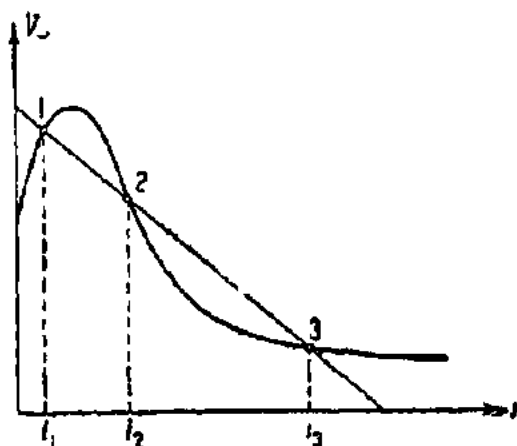


Рис. 283.

$1 + \frac{\psi'(i_3)}{R} > 0$, т. е. особая точка, отмеченная цифрой 3, также может быть либо фокусом, либо узлом¹⁾. Эта особая точка неустойчива, если $\left| \frac{\psi'(i_3)}{L} \right| > \frac{1}{Rc}$, в противном случае она устойчива. Так как $\psi'(i_3)$ есть величина сравнительно малая (характеристика хотя и падающая, но пологая), то при L малых состояние равновесия 3 всегда неустойчиво, наоборот, при C малых это же самое состояние равновесия всегда устойчиво. Вообще же переход от устойчивого к неустойчивому состоянию равновесия в этой точке происходит при каком-то определенном «критическом» значении изменяемого параметра (этим изменяемым параметром может быть любой — R , L или C). Итак, при наличии трех состояний равновесия мы можем иметь в смысле их устойчивости одну из двух комбинаций, изображенных на рис. 284 и 285²⁾.

Посмотрим теперь, изменится ли и как именно характер этих состояний равновесия, если одним из двух параметров, L или C , мы пренебрегаем. Пренебрегая емкостью, мы получим схему, приведенную на рис. 286, пренебрегая самоиндукцией, — схему рис. 287. Обе эти схемы, описываемые одним уравнением первого порядка, уже были рассмотрены в предыдущей главе, и мы можем просто сопоставить

1) Мы считаем для определенности, что характеристика дуги на большом участке является падающей. Следовательно, для всех не слишком малых R и не слишком больших L всегда $\psi'(i_3) < 0$. Если точка 3 лежит в поднимающейся части характеристики, то $\psi'(i_3) > 0$ и точка 3 всегда устойчива.

2) На рисунках точки 1 и 3 изображены в виде узлов. Но эти точки могут быть и фокусами; в отношении же устойчивости картина останется неизменной.

результаты, полученные там, с теми, которые получены только что. Состояния равновесия во всех трех случаях, именно в общем случае $L \neq 0$, $C \neq 0$ и в частных случаях $C = 0$, $L \neq 0$ или $C \neq 0$, $L = 0$, остаются одни и те же. Далее при переходе к случаю $C = 0$ ничего не изменяется в смысле устойчивости этих состояний равновесия — состояния 1 и 3 остаются устойчивыми, а состояние 2 — неустойчивым (как и при C малом, но отличным от нуля). При переходе же к случаю $L = 0$ состояние 1 остается устойчивым, а состояние 3 — неустойчивым (как

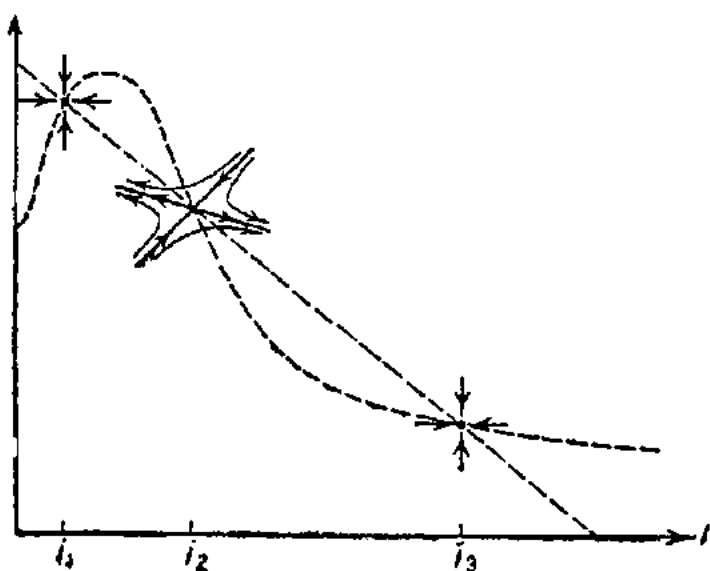


Рис. 284.

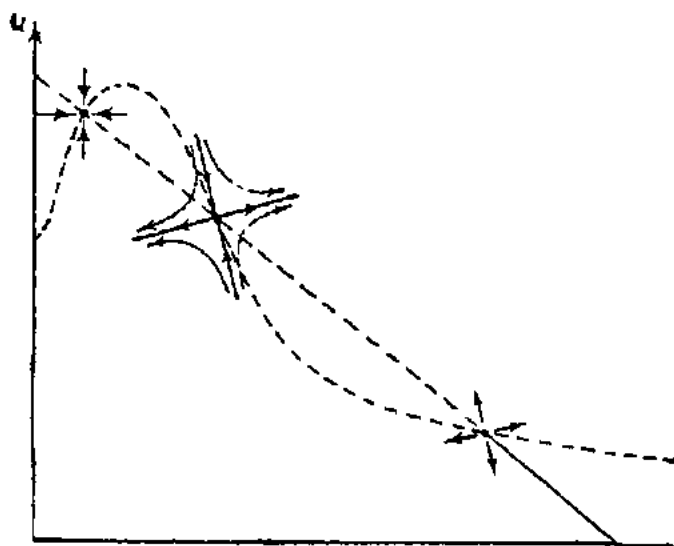


Рис. 285.

и при L малом, но отличным от нуля), но состояние 2 из неустойчивого (при $L \neq 0$, $C \neq 0$) превращается в устойчивое (при $L = 0$). Мы получаем следующий результат: при $L = 0$ состояние равновесия 2 устойчиво, но уже при каком угодно малом L оно оказывается неустойчивым.

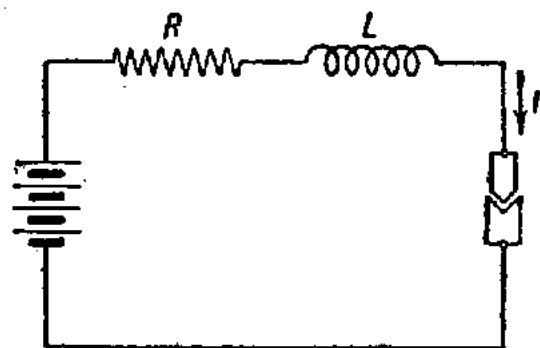


Рис. 286.

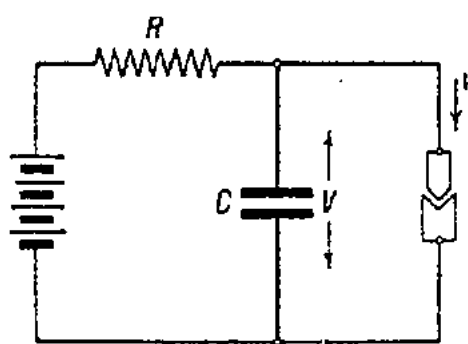


Рис. 287.

Для того чтобы проследить предельные переходы при $L \rightarrow 0$ и $C \rightarrow 0$, перепишем характеристическое уравнение (410) следующим образом. Для перехода $C \rightarrow 0$ напишем:

$$C\gamma^2 + \gamma \left[\frac{1}{R} + C \frac{\psi'}{L} \right] + \frac{1}{LR} [\psi' + R] = 0, \quad (410')$$

а для перехода $L \rightarrow 0$:

$$L\gamma^2 + \gamma \left[\frac{L}{CR} + \psi' \right] + \frac{1}{CR} [\psi' + R] = 0. \quad (410'')$$

Когда C или L обращается в нуль, то порядок характеристического уравнения понижается и новое уравнение первой степени дает только один корень. Так же как и в случае уравнения второй степени, если корень отрицателен, то состояние равновесия устойчиво, т. е. все начальные отклонения затухают. Но при $L=0$ уравнение (410') превращается в следующее:

$$\gamma = -\frac{\psi' + R}{L},$$

и так как в точке $2 \psi' + R < 0$, то состояние равновесия остается неустойчивым, как и в случае $C \neq 0$. При $L=0$ уравнение (410'') превращается в следующее:

$$\gamma = -\frac{\psi' + R}{CR\psi'},$$

и хотя $\psi' + R < 0$, но также и $\psi' < 0$, поэтому γ тоже меньше нуля, и состояние равновесия оказывается устойчивым. Такая потеря устойчивости будет происходить при исчезновении в характеристическом уравнении $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ (где $a > 0$) члена второй степени ($a \rightarrow 0$) всякий раз, когда не только свободный член c , но и коэффициент b при члене первой степени отрицательны. Этот случай можно для краткости назвать «отрицательным седлом» в отличие от «положительного седла», для которого только свободный член $c < 0$, а коэффициент $b > 0$. Следовательно, если a обращается в нуль, то «положительное седло» сохраняет свою неустойчивость, а «отрицательное седло» превращается в устойчивое состояние равновесия.

Нетрудно убедиться в том, что только что рассмотренный нами случай, когда состояние равновесия в дополненной системе превращается в седло, является единственным возможным случаем, для рассматриваемого класса задач, потери устойчивости в результате учета малых параметров. Действительно, состояние равновесия в исходной системе должно быть устойчиво, т. е. единственный корень должен быть отрицателен. При переходе к уравнению второго порядка для потери устойчивости должен появиться второй, положительный корень, и, следовательно, два корня будут разных знаков, а в таком случае состояние равновесия представляет собой седло.

Можно утверждать и обратное, именно, что при вырождении системы только особая точка типа седла может из неустойчивой превратиться в устойчивую. Это происходит тогда, когда из двух корней при вырождении исчезает положительный корень. С точки зрения изображения движения на фазовой плоскости это значит, что вследствие появившейся в результате вырождения связи между координатой и скоростью представляющая точка может двигаться только по той единственной сепаратрисе, по которой происходит движение по направлению к седлу. Ясно, что пока мы рассматриваем только это движение, седло «кажется» нам устойчивой особой точкой. В действительности достаточно какого угодно малого отклонения представляющей точки в сторону от сепаратрисы, чтобы в конце концов представляющая точка навсегда ушла из области, близкой к состоянию равновесия. Но в реальной системе

начальные условия никогда не могут быть заданы абсолютно точно, хотя бы вследствие наличия флуктуаций. Значит, реальная система вследствие наличия самоиндукции и неизбежных отклонений в начальных условиях не сможет находиться в таком состоянии равновесия сколько-нибудь длительное время. Только оба эти обстоятельства вместе — наличие малой самоиндукции и неизбежные отклонения в начальных условиях — приводят к тому, что система уходит из состояния равновесия, которое нам казалось устойчивым. Присутствие малой самоиндукции лишает состояние равновесия устойчивости, но эта потеря устойчивости никак бы не сказалась на поведении системы, если бы не было хотя бы небольших отклонений в начальных условиях.

Рассмотренное нами состояние равновесия как раз является таким, которое без надлежащей проверки мы легко могли бы принять за устойчивое. Так оно и случилось с Фридлиндером¹⁵¹⁾, который случай

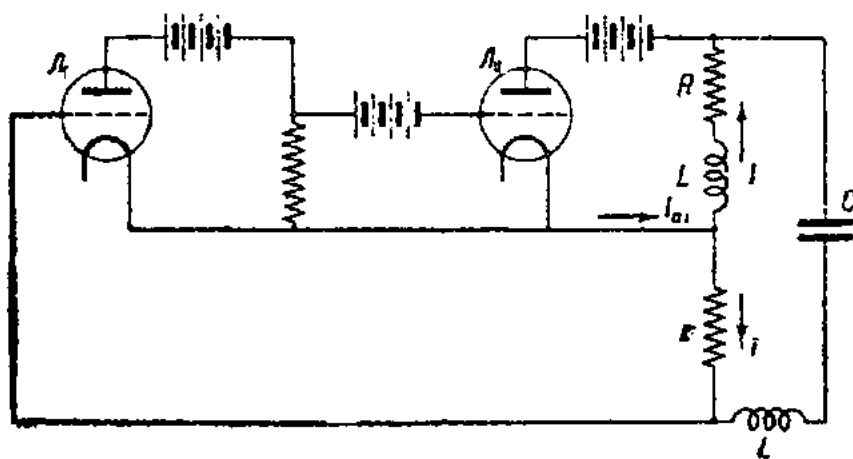


Рис. 288.

вольтовой дуги в схеме без самоиндукции привел как пример того, что на фазовой кривой могут рядом находиться два устойчивых состояния равновесия, причем за одно из устойчивых состояний он принимал седло, которое только «кажется» устойчивым. Интересно, что в другой своей работе, от-

носящейся к тому же году, Фридлиндер указывает на возможность нарушения устойчивости состояния равновесия введением сколь угодно малого резервуара энергии.

Рассмотрим другой пример, иллюстрирующий влияние паразитных параметров на состояния системы, именно рассмотрим схему с электронными лампами, приведенную на рис. 288. Положим, что лампа II имеет длинный прямолинейный участок характеристики и что ее влияние поэтому сводится только к повороту фазы подводимого напряжения и к увеличению его в k раз. Для лампы I мы введем криволинейную характеристику и положим $I_{a1} = \varphi(kri)$. Пренебрегая сеточными токами и реакцией анода, мы получим для рассматриваемой схемы два уравнения Кирхгофа:

$$I + i = I_{a1}; \quad L \frac{di}{dt} + RI - ri - L_1 \frac{di}{dt} - \frac{i}{C} \int i dt = 0$$

или после простых преобразований:

$$\frac{di}{dt} = \frac{R\varphi(kri) - (R+r)i - V}{L + L_1 - Lkr\varphi'(kri)}; \quad \frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}. \quad (411)$$

Единственное состояние равновесия в этой системе определяется условиями:

$$i = 0, \quad V - R\varphi(0) = 0.$$

Разлагаем в ряд характеристику: $\varphi(kri) = \varphi(0) + kri\varphi'(0) + \dots$. Если S — крутизна характеристики в точке $i=0$ и начало координат перенесено в эту точку, то, ограничиваясь первым членом разложения, мы можем считать, что для малых i : $V = Skri$. Тогда уравнения (411) для области, близкой к состоянию равновесия, превращаются в линейные:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\rho}{\lambda}i - \frac{V}{\lambda}; \quad \frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}, \quad (411')$$

где $\rho = r + R(1 - Skr)$ и $\lambda = L' + L(1 - Skr)$. Характеристическое уравнение системы уравнений (411') имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\rho}{\lambda} - \gamma & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{C} & -\gamma \end{vmatrix} = \gamma^2 + \frac{\rho}{\lambda}\gamma + \frac{1}{\lambda C} = 0,$$

и, следовательно:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{4\lambda}{C}}}{2\lambda}. \quad (412)$$

Сразу видно, что при $\lambda < 0$ особая точка $i=0$ есть седло, а при $\lambda > 0$ эта же особая точка может быть либо узлом, либо фокусом и неустойчива при $\rho < 0$. Полная диаграмма распределения особых точек для разных значений ρ и λ приведена на рис. 289.

Если бы мы пренебрегли паразитными самоиндукциями L и L_1 , т. е. положили $\lambda=0$, то получили бы (после линеаризации) систему, описываемую одним уравнением первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{\rho C}.$$

Состояние равновесия для этой системы осталось бы прежним, но его устойчивость зависела бы только от знака ρ , именно, при $\rho > 0$ состояние равновесия было бы устойчиво. Эти состояния равновесия вырожденной системы нанесены в виде темных и светлых кружков на оси $\lambda=0$ нашей диаграммы (рис. 289), причем в области $\rho > 0$ расположены устойчивые (черные кружки), а в области $\rho < 0$ неустойчивые (светлые кружки) состояния равновесия.

Как всегда при вырождении, «положительные седла» остаются неустойчивыми, а «отрицательные седла» превращаются в «устойчивые» состояния равновесия. Но устойчивость этих состояний равновесия и в этом случае обусловлена нашей наивностью». Однако, как мы сейчас увидим, не быть наивными в этом случае еще труднее, чем в предшествующем. Допустим сначала, что в цепи с R есть паразитная самоиндукция L , а в

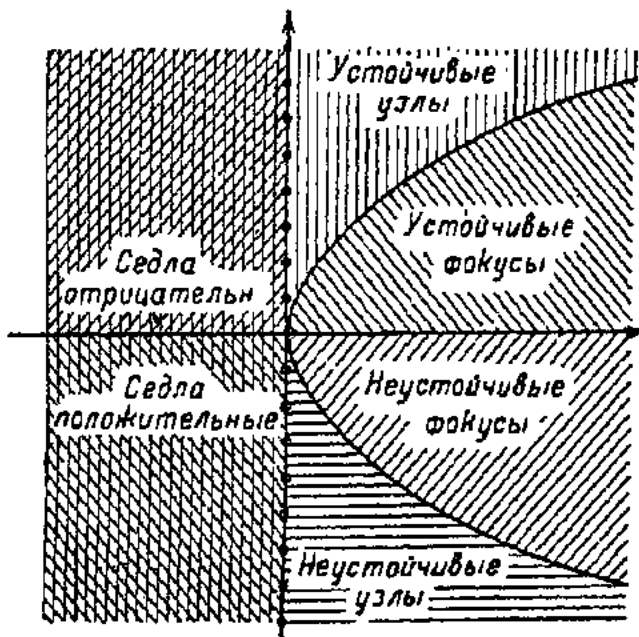


Рис. 289.

цепи с емкостью C ее нет, т. е. положим, что $L' = 0$. Кроме того, положим, что $1 - KrS < 0$, но R настолько мало, что $\rho = r + R(1 - krS) > 0$. Тогда состояние равновесия, с точки зрения наших обычных критериев устойчивое при $L = 0$, сразу теряет свою устойчивость при каком угодно малом L и превращается в седло. И при каких угодно малых отклонениях от устойчивого уса седла (а также малые отклонения в реальной системе всегда неизбежны) представляющая точка в конце концов уйдет как угодно далеко от этого состояния равновесия. Поэтому в реальной системе такое состояние равновесия неустойчиво.

Но ведь самоиндукцией, хотя бы малой, обладает и цепь с емкостью, т. е. в реальной системе $L_1 \neq 0$. Однако, учитывая L' , мы не только не нарушим условий устойчивости, которым удовлетворяет состояние равновесия вырожденной системы при $L = 0$ и $\rho > 0$, но даже можем вернуть «устойчивость» тому состоянию равновесия, которое оказалось неустойчивым в силу наличия паразитной самоиндукции L . Действительно, если L' достаточно велико, так что $\lambda = L' + L(1 - krS) > 0$, несмотря на то, что $1 - krS < 0$, то состояние равновесия, которое было неустойчивым при $L \neq 0$ и $L' = 0$ (седло), начинает нам казаться устойчивым при появлении достаточно большого L' . Таким образом мы видим на конкретном примере, что не только самый факт наличия того или иного паразитного параметра может влиять на устойчивость состояния равновесия, но и соотношение между паразитными параметрами может оказать решающее влияние на результат рассмотрения вопроса об устойчивости данного состояния равновесия. Но если мы можем быть уверены в самом факте существования паразитных параметров, то мы обычно ничего не можем сказать об их величине и тем более о соотношении между различными паразитными параметрами. Поэтому из того результата, к которому мы пришли выше относительно влияния L и L' , мы должны в сущности вывести такое заключение. Есть область, в которой мы для вырожденной системы вообще ничего не можем сказать об устойчивости состояния равновесия, в нашем примере — это область значений ρ , ограниченная пределами: $r > \rho > 0$. Так как в этой области $1 - Skr < 0$, то решение вопроса об устойчивости состояний равновесия зависит от не поддающихся учету факторов — величин паразитных параметров. Поэтому, рассматривая вырожденную систему и указывая для нее условие возбуждения, т. е. условие неустойчивости $\rho < 0$, мы должны иметь в виду существование также и области «неопределенных» состояний равновесия, простирающейся от $\rho = r$ до $\rho = 0$. Вполне возможно, что так называемое «паразитное самовозбуждение» в схемах, появляющееся и исчезающее без всякого заметного изменения параметров схемы, во многих случаях обусловлено именно малыми изменениями величин малых параметров в таких областях «неопределенных» состояний равновесия.

Совершенно так же, как и в вопросе об устойчивости состояний равновесия, присутствие паразитных параметров может «смешать карты» и в вопросе о других стационарных состояниях в системе. Примером этого может служить та же самая схема. В той области, где состояние равновесия устойчиво (при $\rho > 0$ и $\lambda > 0$), других стационарных состояний в системе нет. Но в других квадрантах, где

состояния равновесия неустойчивы, могут существовать другие стационарные состояния, именно: при условии, что $L' = 0$, во втором квадранте во всяком случае существует устойчивый «разрывный цикл», который нами был найден в предыдущем параграфе. Но если появляется паразитная самоиндукция L' , то скачки становятся невозможными и «разрывный цикл» исчезает (при этом λ еще может оставаться отрицательным и состояние равновесия неустойчивым). Далее в третьем квадранте (при $\rho < 0$ и $\lambda < 0$), если $L' = 0$, а $L \neq 0$, во всяком случае не может существовать непрерывного предельного цикла (так как единственная особая точка — седло). Но если помимо паразитной L существует и паразитная L' и притом такая, что при $\rho < 0$, $\lambda > 0$ (четвертый квадрант), то предельный цикл заведомо существует (особая точка — неустойчивый фокус или узел, а бесконечность устойчива). Таким образом и на вопрос о существовании предельного цикла часто мы не сможем дать определенного ответа потому, что не знаем соотношения между какими-либо паразитными параметрами системы.

Заметим, что в том случае, когда под влиянием какого-либо малого параметра состояние системы становится неустойчивым, скорость ухода системы из этого кажущегося устойчивым состоянием в двух возможных случаях совершенно различна. Именно, в первом случае, если малый параметр λ входит коэффициентом при высшей производной, то новый корень характеристического уравнения, обуславливающий уход из со-

стояния равновесия $S_{(n+1)} \approx -\frac{a_0}{\lambda}$, т. е. величина корня, а значит, и скорость ухода, тем больше, чем меньше λ . Во втором случае, когда малый параметр входит множителем при интеграле, новый корень $S_{(n+1)} = -\frac{\lambda}{a_n}$, т. е. величина корня, а значит, и скорость ухода, тем меньше, чем меньше параметр λ .

В практически интересных случаях при введении новых малых параметров эти параметры обычно появляются в виде коэффициентов не при интеграле (справа), а при высшей производной (слева). Поэтому если малый параметр вызывает неустойчивость состояния равновесия, то он же обуславливает обычно очень быстрый уход из этого состояния равновесия, казавшегося устойчивым.

Все сказанное можно перевести на язык фазовых представлений. Во всякой реальной системе, учитывая все новые и новые паразитные параметры, мы будем вводить все большее и большее число степеней свободы данной системы. Вместе с тем все больше и больше становится число измерений того фазового пространства, в котором мы отображаем поведение рассматриваемой системы. Но при изучении всякой физической системы мы не можем неограниченно вводить в рассмотрение эти новые степени свободы и должны ограничиться некоторым, обычно небольшим, числом независимых переменных, характеризующих состояние системы. В случае рассмотрения системы как дискретной мы обычно учитываем только один или несколько параметров системы и считаем, следовательно, что она обладает некоторым конечным числом степеней свободы n . Состояния такой системы мы можем отобразить в фазовом пространстве, имеющем, вообще говоря, $2n$

измерений. Число измерений может быть и меньше $2n$ (если некоторые степени свободы «вырождены»). Во всяком случае пренебрежение теми или иными параметрами системы сводится к тому, что из многообразия с большим числом измерений мы выделяем образ с меньшим числом измерений n' (причем $n' < 2n$). В частности при рассмотрении дискретных систем с одной степенью свободы мы пользуемся либо двумерным образом — фазовой поверхностью, либо выделяем образ одномерный — фазовую линию. Таким образом вопрос, о котором идет речь, на языке фазовых представлений может быть сформулирован следующим образом: в каких случаях движение представляющей точки в многомерном фазовом пространстве может быть удовлетворительно отражено движением представляющей точки в пределах образа с меньшим (n') числом измерений? Очевидно, это возможно только в тех случаях, когда изображающая точка в течение интересующих нас промежутков времени находится в достаточной близости к образу, имеющему n' измерений. Здесь возможны два основных случая.

Прежде всего возможно, что все движения представляющей точки в многомерном пространстве направлены к n' -мерному образу и из всех областей представляющая точка движется к нему. Это значит, что относительно изменения всех тех переменных, которыми мы пренебрегали, система устойчива. Тогда при любых начальных условиях наше ограничение с требуемой точностью вступит в силу по прошествии достаточного промежутка времени. Длина этого промежутка времени должна быть тем больше, чем больше начальные отклонения по «паразитным переменным», т. е. по тем переменным, которые не входят в состав n' -мерного образа, и тем меньше, чем больше скорость движения системы к n' -мерному образу. Если эта скорость достаточно велика (а это часто бывает именно, когда паразитные параметры малы), то уже скоро представляющая точка окажется достаточно близко к n' -мерному образу и поэтому поведение системы можно будет отобразить движением представляющей точки внутри n' -мерного образа. В этом случае мы можем совсем отказаться от рассмотрения движений системы в начальный момент и постулировать, что представляющая точка в начальный момент сразу (скачком) переходит к границе n' -мерного образа. Место, куда попадает представляющая точка при скачке, может быть определено при помощи соответствующих условий скачка.

Возможен и другой случай, когда некоторые движения представляющей точки в многомерном пространстве удаляют эту точку от n' -мерного образа. Это и значит, что по отношению к некоторым «паразитным переменным» рассматриваемая система неустойчива. В таком случае изменение состояния системы можно с достаточной точностью отобразить движением представляющей точки внутри n' -мерного образа только в течение некоторого определенного промежутка времени и при том непременно условии, что в начальный момент представляющая точка лежит достаточно близко к границам n' -мерного образа, т. е. что начальные значения всех паразитных переменных достаточно малы.

ГЛАВА VI

СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1. Цилиндрическое фазовое пространство

Отображая поведение динамической системы в фазовом пространстве, мы требуем *взаимно однозначного соответствия* между состоянием системы и положением представляющей точки в фазовом пространстве. Значит, каждому состоянию системы должна соответствовать одна и только одна точка фазового пространства, и, наоборот, каждой точке фазового пространства должно соответствовать одно и только одно состояние системы. Это требование устанавливает известную связь между характером физической системы и основными чертами того геометрического образа, который может служить для данной системы фазовым пространством. До сих пор мы рассматривали физические системы (с одной степенью свободы), для которых фазовым пространством может служить плоскость. Однако существуют такие системы, для которых плоскость не может служить фазовым пространством, так как при этом не соблюдается требование взаимной однозначности. Примером такой системы может служить обычный физический маятник. Действительно, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия и скоростью; но при изменении угла отклонения на 2π получается совершенно такое же состояние маятника, физически никак не отличающееся от исходного. Поэтому на фазовой плоскости мы получим бесконечное число точек, соответствующих одному и тому же физическому состоянию системы (все точки, отстоящие друг от друга на $2k\pi$ по оси абсцисс). Следовательно, строго говоря, плоскость не пригодна в качестве фазового пространства для обычного физического маятника, так как при этом не удается соблюсти условия однозначности. И когда мы изображали поведение обычного маятника или шарика, скользящего по кругу по фазовой плоскости, то мы поступали не вполне законно. Правда, эта незаконность вряд ли может послужить причиной недоразумений, особенно до тех пор, пока мы ограничиваемся рассмотрением движений, не выходящих за пределы одного полного оборота. Но если мы рассматриваем движения, выходящие за пределы 2π , то для соблюдения требования однозначности придется отказаться от использования плоскости в качестве фазового пространства. В частности для систем, положение которых вполне определяется заданием угла, требование

однозначности будет, очевидно, соблюдено, если в качестве фазового пространства взять, например, цилиндр, ось которого совпадает с осью y . И так как системы, положение которых однозначно определяется углом, встречаются очень часто, то применение цилиндрического фазового пространства представляет большой интерес. Мы рассмотрим сейчас некоторые физические системы, поведение которых следует отображать на цилиндрической фазовой поверхности, и укажем, как нужно применить общие методы построения фазового портрета динамической системы в тех случаях, когда фазовым пространством служит цилиндр.

Помимо обычного маятника цилиндрическое фазовое пространство целесообразно применять для отображения поведения целого ряда электромеханических систем, например синхронного электромотора, генератора переменного тока, работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, и т. д. Все эти системы приводят к рассмотрению одной и той же математической задачи, и потому мы рассмотрим только одну из этих систем, именно обычный маятник с «линейным трением», находящийся под действием постоянного вращающего момента. Если обозначить этот постоянный момент через M_0 , то мы получим для движения маятника уравнение:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b \frac{d\vartheta}{dt} + mga \sin \vartheta = M_0,$$

где I — момент инерции маятника, а b — момент сил трения, действующих на маятник при угловой скорости, равной единице. Вводя новое независимое переменное $\tau = \sqrt{\frac{mga}{I}} t$ («естественный масштаб времени»), можно полученное уравнение привести к виду:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\vartheta}{d\tau} + \sin \vartheta - \beta = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{b}{\sqrt{I m g a}} > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{M_0}{m g a} > 0. \quad (413)$$

Прежде чем переходить к исследованию этого уравнения, мы покажем, в каких случаях могут быть приведены к такому же уравнению задачи о работе синхронного мотора и о параллельной работе генераторов.

В случае синхронного мотора через ϑ можно обозначить угол между осью магнитного поля статора и осью магнитного поля ротора. M_0 в этом случае выражает момент, действующий на мотор со стороны нагрузки (нагрузку мы считаем постоянной). Так как момент, действующий со стороны нагрузки, стремится замедлить вращение ротора, то мы должны здесь, так же как и для маятника, написав момент в правой части со знаком плюс, считать угол ϑ положительным, когда ротор отстаёт от статора. Кроме постоянного момента, действующего со стороны нагрузки, на ротор действует момент со стороны сил трения и в результате электрического демпфирования. Момент этих сил можно считать пропорциональным угловой скорости. И так как эти силы пре-

пятствуют движению, то момент их можно выразить в виде члена $-b \frac{d\vartheta}{dt}$ в правой части, причем $b > 0$. Но кроме момента со стороны нагрузки и сил трения, на ротор мотора действует момент, возникающий в результате взаимодействия полей статора и ротора. Этот момент есть функция угла ϑ , причем он направлен так, что стремится уменьшить угол ϑ (ускорить движение отстающего ротора). Следовательно, мы можем обозначить этот момент через $-f(\vartheta)$, причем f имеет тот же знак, что и ϑ , и вместе с ϑ обращается в нуль. Мы можем теперь сумму всех действующих на ротор моментов приравнять произведению момента инерции на угловое ускорение; мы получим¹⁾:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_0 - b \frac{d\vartheta}{dt} - f(\vartheta).$$

Что касается вида функции $f(\vartheta)$, характеризующей взаимодействие полей статора и ротора, то при известных упрощающих предположениях для этого взаимодействия получается синусоидальная зависимость. Заменяя $f(\vartheta)$ через $\sin \vartheta$, мы получим уравнение, вполне аналогичное тому, которое было получено для маятника (413).

В случае генератора, работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, через ϑ следует обозначить угол опережения ротора рассматриваемого генератора по отношению к роторам других машин, а через M_0 — постоянный момент со стороны двигателя, вращающего данный генератор (при таком выборе опять M_0 стремится увеличить ϑ). Демпфирующий момент попрежнему равен $-b \frac{d\vartheta}{dt}$. Кроме того в случае генератора, работающего в общую цепь, при наличии сдвига ϑ возникает электромеханический момент, действующий на данный генератор со стороны других, работающих с ним в параллель²⁾. Этот момент есть функция от ϑ , причем он стремится уменьшить ϑ . Поэтому он должен быть равен $-f(\vartheta)$, где $f(\vartheta)$ имеет тот же знак, что и ϑ ; при известных предположениях он также может быть принят равным $\sin \vartheta$.

§ 2. Консервативные системы, отображаемые на цилиндре

Для исследования уравнения (413) введем новую переменную $z = \frac{d\vartheta}{dt}$. Мы получим систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{dt} = -az - \sin \vartheta + \beta; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = z.$$

1) Строго говоря, мы должны были бы рассматривать взаимодействие генераторов, а не только действие всех остальных генераторов на данный.

2) Заметим, что для неподвижной системы отсчета уравнение движения ротора имеет вид:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = f(\omega t - \phi) - b \frac{d\phi}{dt} - M_0,$$

где ω — угловая скорость оси магнитного поля статора, а ϕ — угол поворота ротора. Полагая $\vartheta = \omega t - \phi$, получим уравнение, приведенное в тексте.

Исключая τ , можем получить одно уравнение первого порядка:

$$z \frac{dz}{d\vartheta} = -az - \sin \vartheta + \beta, \quad (413')$$

причем ϑ и z суть координаты цилиндрического фазового пространства.

Для того чтобы построить фазовый портрет исследуемой системы, мы так же, как и в случае фазовой плоскости, должны изучить основные элементы фазового портрета, именно особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, соответствующие периодическим движениям. Но в цилиндрическом фазовом пространстве помимо «обычных» предельных циклов, лежащих на поверхности цилиндра и охватывающих состояния равновесия, но не охватывающих самого цилиндра (такие кривые вполне аналогичны замкнутым траекториям на фазовой плоскости), может встретиться совершенно новый тип предельных циклов, охватывающих не состояния равновесия, а самый цилиндр. Очевидно, что и эти замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. Для построения фазового портрета на цилиндре мы должны знать также и эти замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Но особенно нас должны интересовать эти замкнутые траектории потому, что им соответствуют периодические движения и периодические решения уравнения (413'). Поскольку эти решения периодические с периодом 2π , то они должны удовлетворять условию $z(\vartheta_0 + 2\pi) = z(\vartheta_0)$ при любом ϑ_0 . Для того чтобы обнаружить наличие таких периодических решений, можно, например, воспользоваться следующим признаком. Если существуют два частных решения $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$, так что при любом ϑ_0 :

$$z_1(\vartheta_0 + 2\pi) > z_1(\vartheta_0), \quad z_2(\vartheta_0 + 2\pi) < z_2(\vartheta_0),$$

и если между интегральными кривыми, соответствующими этим решениям, нет особых точек, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий можно утверждать, что между $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$ существует периодическое решение, для которого

$$z(\vartheta_0 + 2\pi) = z(\vartheta_0).$$

Исследование уравнения (413') мы начнем с частного случая $a=0$ (консервативная система). Уравнение в этом случае принимает вид:

$$z \frac{dz}{d\vartheta} = \beta - \sin \vartheta.$$

После разделения переменных и интегрирования получим решение:

$$\frac{1}{2} z^2 = \cos \vartheta + \beta \vartheta + C_1 \quad \text{или} \quad z = \pm \sqrt{2(\cos \vartheta + \beta \vartheta) + C}.$$

Для того чтобы облегчить построение интегральных кривых на поверхности цилиндра, мы рассмотрим одновременно вспомогательную плоскость (ϑ, y) , на которой нанесем кривую $y = 2(\cos \vartheta + \beta \vartheta)$. Развернутую на плоскость (ϑ, z) цилиндрическую фазовую поверхность мы расположим под вспомогательной плоскостью (ϑ, y) . Построение инте-

гральных кривых на плоскости (ϑ, z) сведется к тому, что, задавая разные значения C , мы будем извлекать корень из суммы $C + y$ и откладывать его вверх и вниз по оси z . При заданном C каждому значению y , для которого $y + C > 0$, будут соответствовать две точки на плоскости ϑ, z , а для значений y , для которых $y + C < 0$, это не будет иметь места, так как значения для z будут получаться мнимые.

Построения эти дадут разные результаты при разных значениях β . При $\beta = 0$, т. е. $y = 2 \cos \vartheta$, мы получим картину, изображенную на рис. 290. Для $C = -2$ мы получим одну точку $\vartheta = 0, z = 0$ — это особая точка типа центра. Для $-2 < C < 2$ получим ряд замкнутых интегральных кривых, имеющих вертикальную касательную при $z = 0$ и вложенных одна в другую. Для $C = 2$ — две кривых, пересекающихся в точках $\vartheta = +\pi$ и $\vartheta = -\pi$. Эти точки пересечения суть седла, а сами кривые являются сепаратрисами. Для $C > 2$ получим кривые, нигде не пересекающие оси абсцисс, и, наконец, для $C < -2$ интегральные кривые вообще не имеют действительных ветвей.

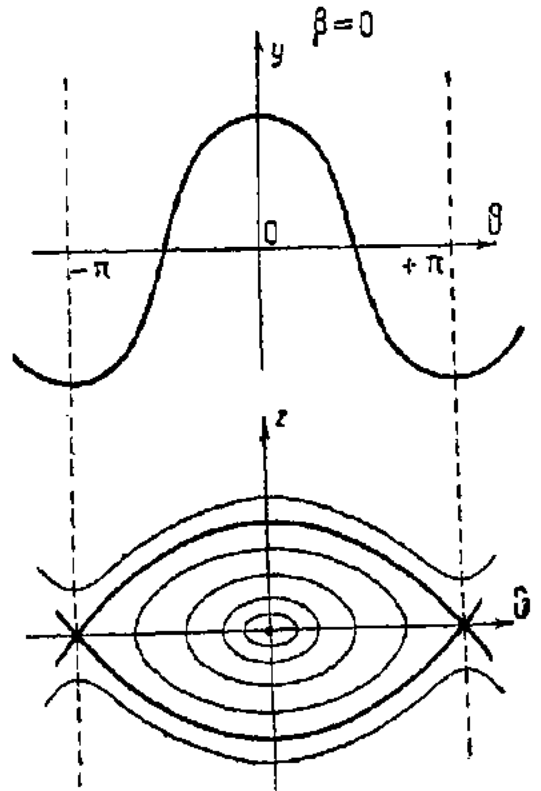


Рис. 290.

На цилиндрической фазовой поверхности мы получим уже знакомую нам картину, изображенную на рис. 291. Все кривые, лежащие внутри сепаратрис, замкнуты и охватывают особую точку — центр. Они соответствуют периодическим движениям обычного типа. Кривые, проходящие вне сепаратрис ($C > 2$), также замкнутые, но они охватывают цилиндр и соответствуют новому типу периодических движений, о которых мы уже говорили. Физический смысл полученной картины не требует никаких пояснений, тем более, что этот случай $\beta = 0$ мы уже подробно рассматривали.

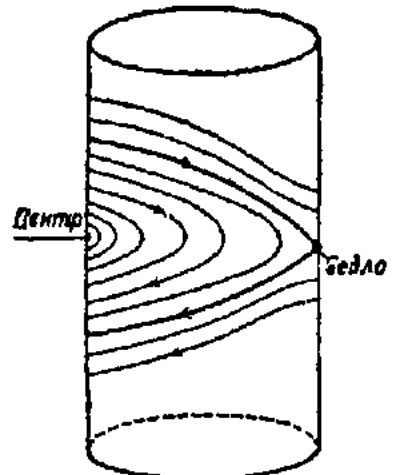


Рис. 291.

Для $\beta \neq 0$ мы получим разные картины в зависимости от того, будет ли $\beta < 1$ или $\beta > 1$. На вспомогательной плоскости мы должны построить кривую

$$y = 2 \cos \vartheta + 2\beta\vartheta.$$

При $\beta < 1$ эта кривая имеет максимумы в точках, где $\vartheta = \arcsin \beta + 2k\pi$, в минимумы в точках, где $\vartheta = -\arcsin \beta + (2k + 1)\pi$. При $\beta = 1$ кривая $y = 2(\cos \vartheta + \beta\vartheta)$ не имеет ни максимума, ни минимума, но имеет при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ точку перегиба с горизонтальной касательной. При $\beta > 1$

Кривая $y = 2(\cos \vartheta + \beta \vartheta)$ возрастает монотонно и не имеет ни экстремумов, ни точек перегиба.

Для случая $\beta < 1$ (рис. 292) мы снова получаем одну особую точку типа центра, одну особую точку типа седла и сепаратрису. На цилиндре мы получим картину, изображенную

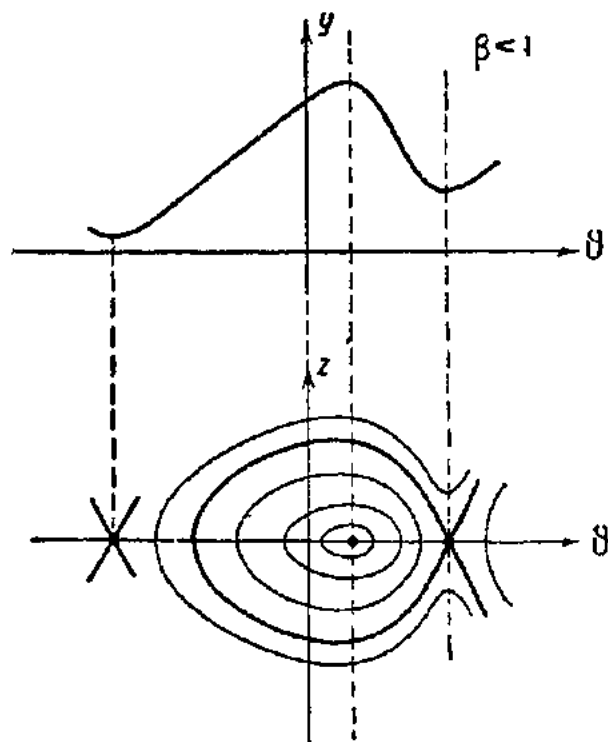


Рис. 292.

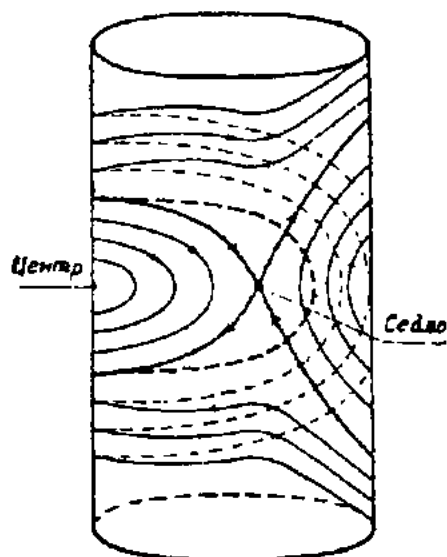


Рис. 293.

на рис. 293. Кривые, находящиеся внутри сепаратрисы, — замкнутые и соответствуют периодическим движениям. Кривые, лежащие вне сепаратрисы, не замыкаются на цилиндре, так как, при увеличении ϑ на 2π , z для них не приобретает прежнего значения, а с каждым оборотом возрастает (по абсолютной

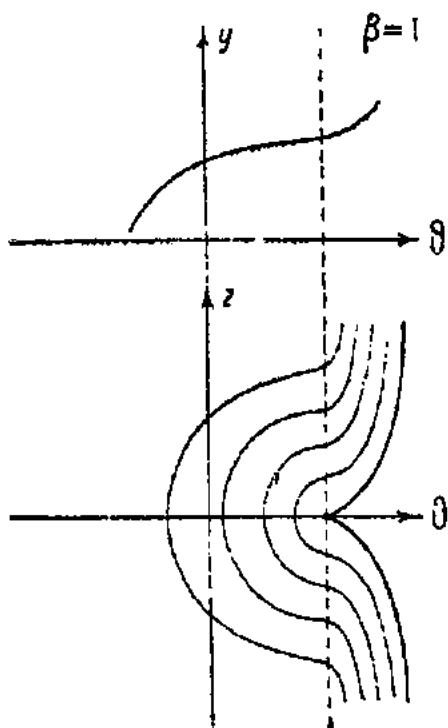


Рис. 294.

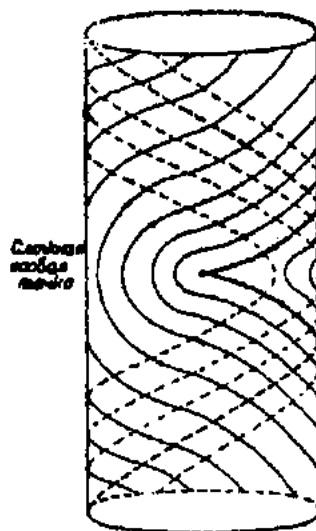


Рис. 295.

величине). Следовательно, периодические движения «второго типа» в этом случае невозможны. Для $\beta = 1$ (рис. 294) мы получим одну особую точку высшего порядка. В этом случае замкнутых кривых на

цилиндре (рис. 295) нет совсем. Для $\beta > 1$ особых точек совсем нет (рис. 296), нет также и замкнутых кривых на цилиндре (рис. 297). Следовательно, при $\beta > 1$ невозможны периодические движения ни первого, ни второго типа. Физический смысл полученных результатов совершенно ясен. Если постоянный момент не слишком велик, так что он нижнее положение равновесия смещает менее чем на $\frac{\pi}{2}$ (т. е. постоянный момент меньше, чем наибольший момент силы тяжести), то при достаточно малых начальных отклонениях (и начальных скоростях) возможны колебания вокруг этого смещенного положения равновесия. При этом, двигаясь в сторону, противоположную внешнему моменту, маятник отдает ту же энергию, которую он получил при движении в направлении внешнего момента. Если начальное отклонение

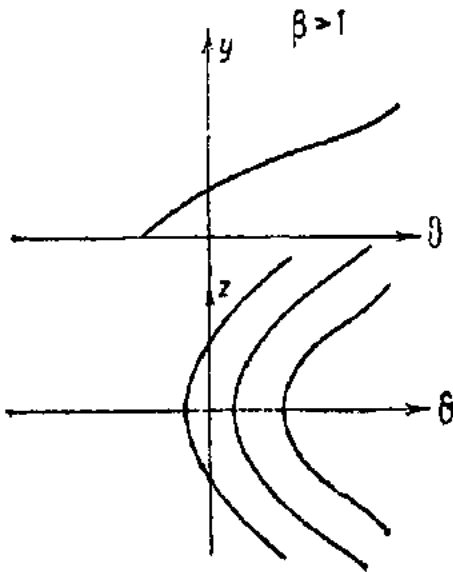


Рис. 296.

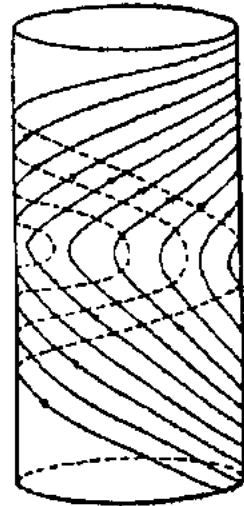


Рис. 297.

велико, то благодаря действию постоянного внешнего момента маятник пройдет через верхнее положение равновесия и дальше будет двигаться в направлении постоянного момента, причем скорость маятника после каждого оборота будет возрастать. Если же $\beta > 1$, то внешний момент превосходит наибольший момент силы тяжести. В таком случае колебания вообще невозможны, и при любых начальных условиях маятник в конце концов будет вращаться в направлении постоянного момента со скоростью, изменяющейся не монотонно, но все же возрастающей после каждого полного оборота.

§ 3. Неконсервативная система ^[99]

Перейдем теперь к рассмотрению случая $\alpha \neq 0$, т. е. неконсервативных систем. В этом случае уравнение интегральных кривых на цилиндре

$$z \frac{dz}{d\theta} = -\alpha z - \sin \theta + \beta \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{-\alpha z - \sin \theta + \beta}{z}$$

уже не поддается непосредственному интегрированию. Поэтому мы должны применить методы качественного интегрирования.

Прежде всего изоклина $\frac{dz}{d\vartheta} = 0$ есть сдвинутая синусоида.

Ее уравнение:

$$z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}.$$

Она пересекает ось ϑ только при $\beta < 1$ (рис. 298). При $\beta > 1$ эта изоклина не пересекает оси ϑ (рис. 299). Далее $\frac{dz}{d\vartheta} > 0$ между синусоидой и осью ϑ , т. е. в областях, заштрихованных на рис. 298 и 299. Во всей остальной области $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$.

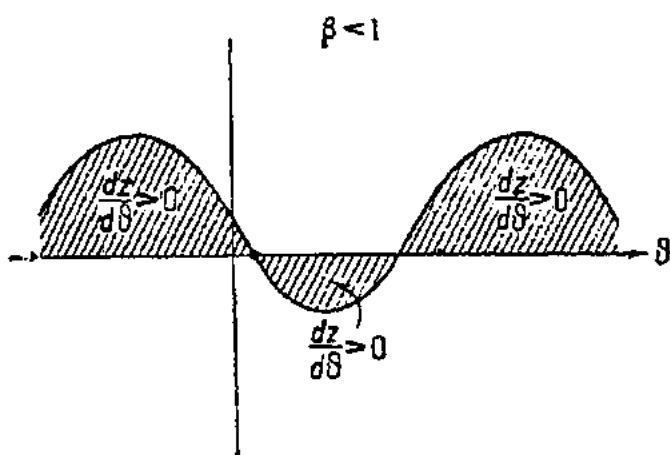


Рис. 298.

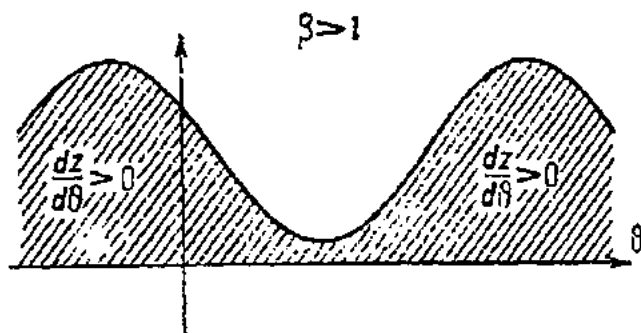


Рис. 299.

Координаты особых точек определяются уравнениями:

$$\beta - \sin \vartheta = 0, \quad z = 0.$$

Следовательно, при $\beta > 1$ особых точек нет. При $\beta < 1$ особые точки существуют и определяются уравнениями:

точки A_k :

$$\vartheta = 2k\pi + \vartheta_0; \quad z = \vartheta,$$

точки B_k :

$$\vartheta = (2k + 1)\pi - \vartheta_0; \quad z = 0,$$

где

$$\vartheta_0 = \arcsin \beta \left(0 < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2} \right).$$

Нам достаточно рассмотреть точки A_0 и B_0 , так как характер особых точек через 2π повторяется.

Начнем с выяснения характера особой точки типа A_k . Положим $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi + \eta$ и разложим $\sin^2 \vartheta$ в ряд по степеням η . Ограничиваясь первой степенью η , получим для поведения системы вблизи особой точки типа A_k линейное уравнение:

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{-\alpha z - \gamma \cos \vartheta_0 + \dots}{z}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$S^2 + \alpha S + \cos \vartheta_0 = 0$$

и корни его:

$$S_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \cos \vartheta_0}.$$

Следовательно, особая точка есть

$$\text{фокус при } \alpha^2 < 4 \cos \vartheta_0,$$

$$\text{узел при } \alpha^2 > 4 \cos \vartheta_0.$$

При $\alpha = 0$, как мы видели, эта особая точка превращается в центр.

Исследуем теперь характер особых точек типа B_k . Полагаем $\vartheta = (2k+1)\pi - \vartheta_0 + \eta$ и разлагаем $\sin \vartheta$ в ряд. Ограничиваясь первым членом ряда, получим:

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{-\alpha z + \eta \cos \vartheta_0 + \dots}{z}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$S^2 + \alpha S - \cos \vartheta_0 = 0,$$

и его корни:

$$S = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \cos \vartheta_0}.$$

Значит, особая точка есть седло. Угловые коэффициенты асимптот седла определяются из уравнения:

$$\mu^2 + \frac{\alpha}{2} \mu - \frac{\cos \vartheta_0}{4} = 0,$$

откуда

$$\mu = -\frac{\alpha}{4} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\cos \vartheta_0}{4}}.$$

При $\alpha = 0$ эта особая точка, как и следовало ожидать, остается седлом.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании периодических решений. При этом мы будем отдельно рассматривать случаи $\beta > 1$ и $\beta < 1$. Начнем с первого из этих случаев.

I. $\beta > 1$.

Чтобы убедиться в существовании периодических решений, достаточно, как уже указывалось, отыскать два таких частных решения $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$, чтобы для них удовлетворялись условия:

$$z_1(\vartheta_1 + 2\pi) \leq z_1(\vartheta_1), \quad (\text{A})$$

$$z_2(\vartheta_1 + 2\pi) \geq z_2(\vartheta_1). \quad (\text{B})$$

Первое из этих решений можно найти сразу. Действительно, всякое такое решение $z_1(\vartheta)$, для которого при некотором ϑ_0 : $z_1(\vartheta_0) > \frac{1+\beta}{\alpha}$, будет как раз искомым решением, ибо выше синусоиды $z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}$ всегда $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$ (рис. 300), и, следовательно, $z_1(\vartheta_0) \leq z_1(\vartheta_0 - 2\pi)$, что удовлетворяет условию (А).

Для отыскания второго решения, удовлетворяющего условию (В), рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку А (рис. 301), с координатами $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $z = \frac{\beta - 1}{\alpha}$, т. е. через точку, в которой си-

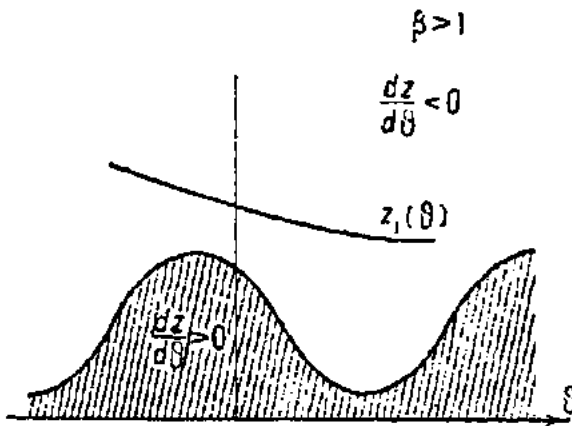


Рис. 300.

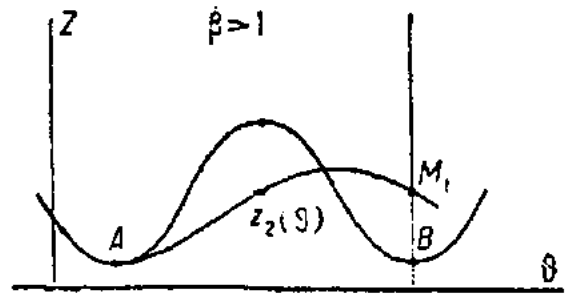


Рис. 301.

нусоида $z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}$ имеет минимум. Проследим ход интегральной кривой справа от точки А. Так как между синусоидой и осью ϑ $\frac{dz}{d\vartheta} > 0$, то с возрастанием ϑ кривая должна идти вверх и в некоторой точке Q пересечь синусоиду. В этой точке интегральная кривая имеет горизонтальную касательную, так как синусоида есть изоклина $\frac{dz}{d\vartheta} = 0$. Дальше интегральная кривая опускается вниз и пересекает прямую $\vartheta = \frac{5\pi}{2}$ в точке М, лежащей не ниже точки В (так как синусоида есть изоклина $\frac{dz}{d\vartheta} = 0$, то интегральная кривая должна пересечь ее, имея горизонтальную касательную; нетрудно видеть, что это возможно только в точке В или после точки В). Следовательно, рассматриваемая нами интегральная кривая соответствует решению, для которого $z_2(\frac{\pi}{2} + 2\pi) \geq z_2(\frac{\pi}{2})$, т. е. удовлетворяет условию (В).

Так как особых точек в рассматриваемом случае ($\beta > 1$) нет, то между двумя решениями z_1 и z_2 в силу непрерывности должно существовать периодическое решение, для которого $z_0(\vartheta + 2\pi) = z_0(\vartheta)$. Можно показать, что это периодическое решение — единственное. Для этого, интегрируя обе части уравнения:

$$\frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{d\vartheta} = -\alpha z - \sin \vartheta + \beta$$

в пределах от ϑ_1 до $\vartheta_1 + 2\pi$, получим:

$$\frac{1}{2} [z(\vartheta_1 + 2\pi)]^2 - \frac{1}{2} [z(\vartheta_1)]^2 = -\alpha \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} z d\vartheta + 2\pi\beta,$$

и для периодического решения $z_0(\vartheta_1 + 2\pi) = z_0(\vartheta_1)$. Значит,

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} z_0(\vartheta) d\vartheta = \frac{2\pi\beta}{\alpha}.$$

Положим, что существуют два периодических решения z_{01} и z_{02} . Так как они не могут пересекаться, то всегда либо $z_{01} > z_{02}$, либо, наоборот, $z_{01} < z_{02}$. Но

тогда и $\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} z_{01}(\vartheta) d\vartheta > \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} z_{02}(\vartheta) d\vartheta$ (или наоборот).

Однако это невозможно, так как для всех периодических решений должно быть:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 + 2\pi} z_0(\vartheta) d\vartheta = \frac{2\pi\beta}{\alpha}.$$

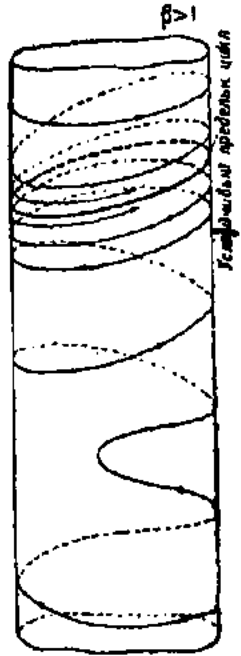


Рис. 302.

Значит, может существовать только одно периодическое решение. Это единственное периодическое решение охватывает цилиндр — оно соответствует периодическому движению «второго типа» (рис. 302). Замкнутых фазовых траекторий, не охватывающих цилиндр, не существует, ибо внутри таких траекторий должны находиться особые точки, которых в рассматриваемом случае нет. Следовательно, периодических движений «первого типа» в рассматриваемом случае нет.

II. $\beta < 1$.

В этом случае, так же как и в предыдущем, сразу можно убедиться в существовании решения z_1 , подчиняющегося условию:

$$z_1(\vartheta_1 + 2\pi) \leq z_1(\vartheta_1).$$

Чтобы убедиться в существовании решений z_2 , подчиняющихся условию:

$$z_2(\vartheta_1 + 2\pi) \geq z_2(\vartheta_1),$$

рассмотрим две интегральные кривые (рис. 303); кривую Γ_1 , проходящую через особую точку A_1 с положительным наклоном (один из усов седла), и кривую Γ_2 , проходящую через точку A_2 с отрицатель-

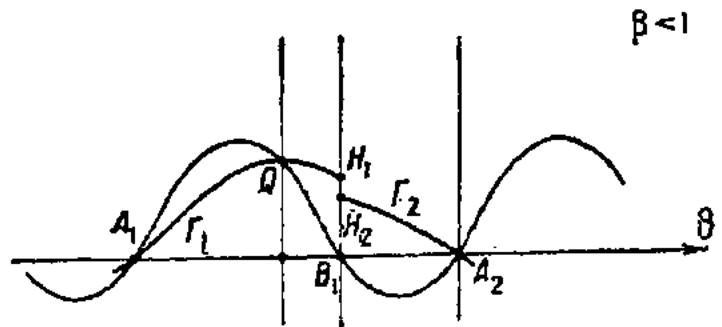


Рис. 303.

ным наклоном (другой ус седла). Наклон кривой Γ_1 в точке A_1 есть $m_1 = -\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{\cos \vartheta_0}{4}}$, т. е. меньше, чем наклон синусоиды в этой точке¹⁾. Так как синусоида есть изоклина $\frac{dz}{d\vartheta} = 0$, то кривая Γ_1 пересекает синусоиду в точке Q , имея в этом месте горизонтальную касательную.

Прямую $\vartheta = \vartheta_0$ кривая Γ_1 пересекает в точке H_1 . Кривая Γ_2 выходит из A_2 с отрицательным угловым коэффициентом и пересекает прямую $\vartheta = \vartheta_0$ в точке H_2 . Ординаты этих точек обозначим соответственно через h_1 и h_2 .

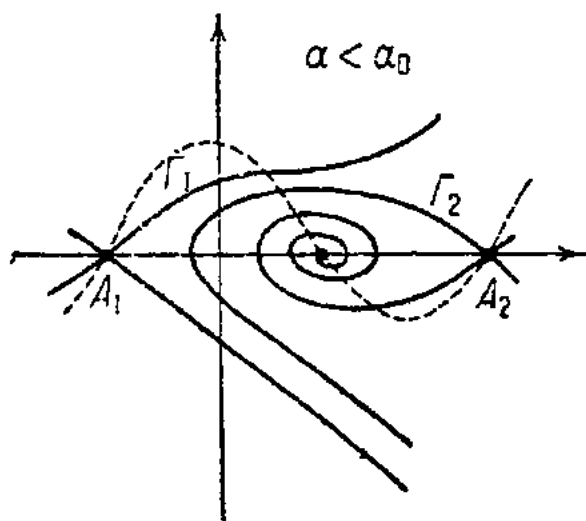


Рис. 304.

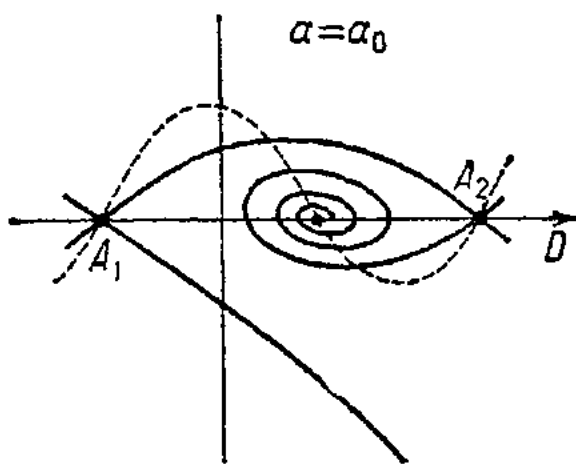


Рис. 305.

Можно показать, что для достаточно малых a всегда $h_2 < h_1$; но в таком случае интегральная кривая Γ_1 и все достаточно близкие к ней кривые, лежащие выше ее, удовлетворяют условию:

$$z_2(\vartheta_1) \leq z_2(\vartheta_1 + 2\pi),$$

и, значит, для достаточно малых a заведомо существует и периодическое решение z_0 , для которого $z_0(\vartheta_1 + 2\pi) = z_0(\vartheta_1)$. Так же как и в прошлом случае, можно показать, что это решение единственное.

Можно также убедиться, что, при достаточно больших a , $h_2 > h_1$ и что существует единственное значение $a = a_0$, при котором $h_1 = h_2$ и кривые Γ_1 и Γ_2 сливаются в одну кривую.

Далее можно убедиться в том, что при $a > a_0$ периодических решений не существует, а при $a < a_0$ единственное существующее решение лежит в верхней полуплоскости (целиком в области $z > 0$). И, наконец, можно убедиться в том, что в рассматриваемом случае не существует замкнутых фазовых траекторий, не охватывающих цилиндр (но зато

1) Наклон синусоиды в этой точке равен $\frac{\cos \vartheta_0}{a}$. Величина же m_1 определяется из уравнения $m_1^2 + m_1 \frac{a}{2} \cos \vartheta_0 = \frac{\cos \vartheta_0}{4}$. Если вместо m_1 подставить $\frac{\cos \vartheta_0}{a}$, то мы получим слева $\frac{\cos^2 \vartheta_0}{a^2} + \frac{\cos \vartheta_0}{2}$, т. е. больше чем $\frac{\cos \vartheta_0}{2}$. Значит, $m_1 < \frac{\cos \vartheta_0}{a}$.

охватывающих особые точки). В этом можно убедиться, рассматривая ход сепаратрис при $\alpha < \alpha_0$ (рис. 304), при $\alpha = \alpha_0$ (рис. 305) и, наконец, при $\alpha > \alpha_0$ (рис. 306). Таким образом при $\beta < 1$ мы получаем два различных случая для $\alpha < \alpha_0$ и $\alpha > \alpha_0$. Только при $\alpha < \alpha_0$ существует единственное периодическое решение, охватывающее цилиндр (рис. 308). При $\alpha > \alpha_0$ никаких периодических решений не существует (рис. 307). Оба найденных нами периодических решения второго типа, т. е. охватывающих цилиндр (первое при любом α и $\beta > 1$, второе при $\alpha < \alpha_0$ и $\beta < 1$), устойчивы, так как все соседние движения стремятся к этим периодическим движениям. Однако, в то время как в первом случае ($\beta > 1$) периодическое решение устанавливается при любых начальных

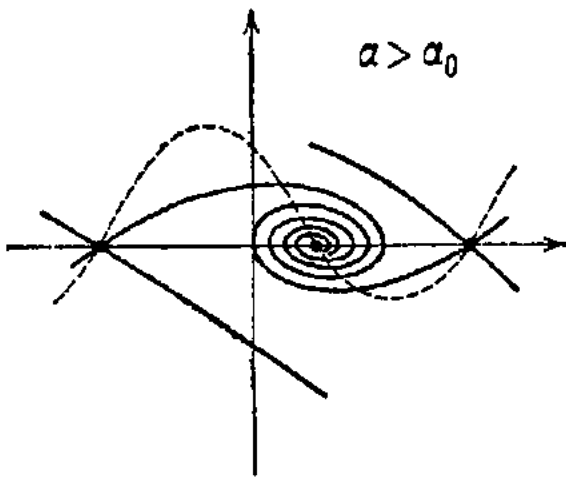


Рис. 306.

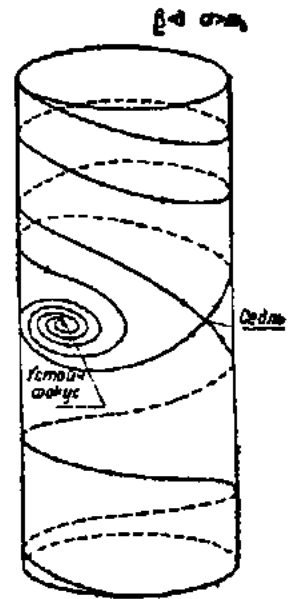


Рис. 307.

условиях, во втором случае существует область начальных значений, из которых система приходит к состоянию покоя (к устойчивому фокусу). Эта область показана штриховкой на рис. 309.

Физический смысл полученных результатов совершенно ясен. Если в системе существует трение, пропорциональное скорости, и на нее действует постоянный вращающий момент, то работа, затрачиваемая на преодоление сил трения, очевидно, растет вместе со скоростью, в то время как работа внешних сил остается неизменной. Поэтому, если $\beta > 1$ и, значит, постоянный момент внешних сил настолько велик, что он превосходит наибольшее значение момента силы тяжести, то он будет при любых начальных условиях раскручивать маятник до тех пор, пока не установится баланс между энергией, рассеиваемой на трение, и работой внешних сил. Наоборот, если $\beta < 1$ и, значит, момент внешних сил настолько мал, что наибольший момент силы тяжести его превосходит, то внешний момент сам по себе не в состоянии «провернуть» маятник. Тогда маятник может начать «провертываться» только при известных начальных условиях. Но это движение может превратиться в периодическое только при условии, что энергия, рассеиваемая на трение за один оборот, в конце концов будет равна работе внешних сил, создающих постоянный момент. А так как,

кроме того, нужны соответствующие начальные условия, именно достаточно большая начальная скорость, то потери энергии на трение при данном α не могут быть сколь угодно малы (так могло бы быть только, если бы маятник мог двигаться сколь угодно медленно). Значит, чтобы потерп на трение за оборот не превосходили определенной величины (равной работе внешних сил за оборот), нужно, чтобы α было достаточно мало, меньше, чем некоторое критическое значение α_0 .

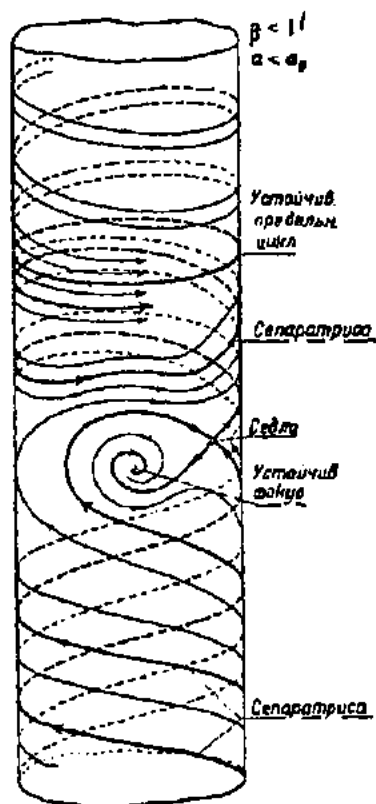


Рис. 308.

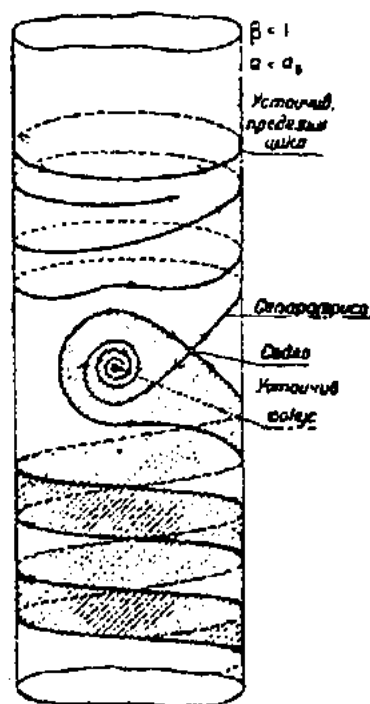


Рис. 309.

Таким образом все наши результаты получают вполне наглядное истолкование. Конечно, в случае синхронного мотора и параллельно работающих машин это истолкование будет более сложным.

Мы рассмотрели только один тип двумерного фазового пространства — цилиндрическое пространство. В некоторых задачах оказывается целесообразным ввести и другие типы двумерного фазового пространства, например тор. Однако системы, для рассмотрения которых целесообразно ввести фазовое пространство в виде тора, выходят из рамок данной части нашей книги.

ГЛАВА VII

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Метод ван-дер-Поля

Перейдем теперь к количественному рассмотрению нелинейных систем. Как мы уже говорили, это количественное рассмотрение при современном состоянии теории может быть удовлетворительно проведено, в сущности, лишь для двух классов систем, имеющих, однако, довольно значительный практический интерес. Один из этих классов — это системы, близкие к консервативным, из которых практически наиболее интересны системы, близкие к синусоидальным; другой класс — это системы, допускающие разрывные колебания. Методы количественного исследования разрывных колебаний уже были нами рассмотрены.

В настоящей главе мы изложим количественные методы рассмотрения систем, принадлежащих к первому классу, причем мы ограничимся наиболее простым случаем, именно систем, близких к линейным консервативным системам.

Уравнение движения такой системы может быть написано в виде уравнения второго порядка ¹⁾:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$$

1) Уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору в обычных переменных, имеет вид:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = \mu F\left(v, \frac{dv}{dt}, \mu\right), \quad (a)$$

где t — время, ω_0 — циклическая частота, v — зависимое переменное, например напряжение или ток, μ — так называемый малый параметр, который мы будем предполагать не имеющим размерности и который определяет близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Вводя безразмерное независимое переменное $t = \omega_0 \tau$ и безразмерное зависимое переменное $x = \frac{v}{v_0}$, где v_0 — некоторая определенная физическая величина, имеющая такую же размерность, как и v (например напряжение насыщения или ток насыщения), получим уравнение (a) в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu \frac{1}{v_0 \omega_0^2} F(v_0 x, v_0 \omega_0 \dot{x}; \mu)$$

или, обозначая

$$\frac{1}{v_0 \omega_0^2} F(v_0 x, v_0 \omega_0 \dot{x}; \mu) = f(x, \dot{x}; \mu)$$

или, если ввести обозначение $y = \dot{x}$, в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu f(x, y). \quad (414)$$

Здесь μ — безразмерный положительный параметр, который мы в дальнейшем будем предполагать достаточно малым. Величина этого параметра при заданной $f(x, y)$ определяет степень близости рассматриваемой системы к линейной консервативной системе. Относительно функции $f(x, y)$ мы будем предполагать, что это полином по x и y .

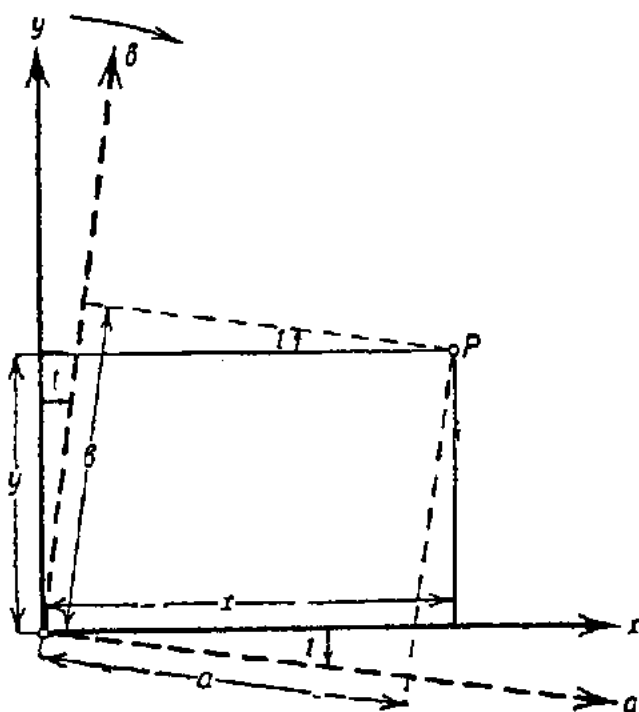


Рис. 310.

Чтобы исследовать уравнения (414), мы воспользуемся следующим приближенным методом исследования нелинейных систем, который будем называть методом ван-дер-Поля [11], [12]. Именно, вместо уравнений (414) мы будем рассматривать другие, составленные по определенному рецепту, «вспомогательные» уравнения. Как мы увидим дальше, решения этих вспомогательных уравнений, значительно более простых, чем исходные, обладают замечательным свойством — они аппроксимируют решение исходных уравнений (при одних и тех же начальных усло-

виях) с заданной точностью на протяжении сколь угодно большого заданного отрезка времени, если только параметр μ мы выберем достаточно малым. Следует отметить, что метод ван-дер-Поля является адекватным методом исследования нелинейных систем, в том смысле, что этот метод учитывает специфику нелинейных систем, их характерные черты; вспомогательные уравнения суть также нелинейные уравнения, однако, как мы уже говорили, несравненно более простые.

в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \mu). \quad (\beta)$$

Заметим, что часто преобразование уравнения системы, близкой к линейной консервативной, к виду (β), весьма удобному для теоретического исследования, можно провести иным путем: например можно ввести малый параметр и одновременно привести уравнения к безразмерному виду и т. д.

Теория, для простоты рассуждений, приводится в тексте для частного случая, когда в уравнении (β) $f(x, \dot{x}; \mu)$ не зависит от μ . Если $f(x, \dot{x}; \mu)$ многочлен μ , коэффициенты которого, в свою очередь, полиномы по x и \dot{x} , то формулы, относящиеся к первому приближению для уравнений (414) [например формулы (426a) и (427a)], сохраняют свою силу и для уравнения (β), если только $f(\xi, \eta)$ заменить через $f(\xi, \eta; 0)$.

Перейдем к выводу вспомогательных уравнений и к доказательству высказанных нами утверждений об их аппроксимирующих свойствах.

Чтобы вывести эти вспомогательные уравнения или, как мы их будем называть, уравнения ван-дер-Поля, возьмем на фазовой плоскости вращающуюся по часовой стрелке (с угловой скоростью $\omega = 1$) прямоугольную систему координат ab (рис. 310), начало которой совпадает с началом системы xy .

Заметим, что при $\mu = 0$, когда система (414) превращается в простейший гармонический осциллятор, фазовые траектории превращаются в круги с центром в начале координат, по которым изображающая точка движется так, что соответствующая угловая скорость $\omega = 1$. Поэтому при $\mu = 0$ изображающая точка, двигаясь по плоскости x, y , остается неподвижной относительно вращающейся плоскости a, b ; каждая точка плоскости a, b является при $\mu = 0$ состоянием равновесия.

Формулы преобразования от переменных x, y к переменным a, b будут, как нетрудно видеть по рис. 310¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t, \\ y &= -a \sin t + b \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (415)$$

В новых переменных уравнения (414) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \sin t &= 0, \\ -\frac{da}{dt} \sin t + \frac{db}{dt} \cos t &= \mu f(a \cos t + b \sin t; -a \sin t + b \cos t) \end{aligned} \right\} \quad (416)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\mu f(a \cos t + b \sin t; -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ \frac{db}{dt} &= +\mu f(a \cos t + b \sin t; -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (417)$$

Развертывая правые части в конечные ряды Фурье (причем a и b будем считать постоянными), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left[\frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \varphi_1(a, b) \cos t + \bar{\varphi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\varphi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right], \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left[\frac{\psi_0(a, b)}{2} + \psi_1(a, b) \cos t + \bar{\psi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\psi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (418)$$

1) При переходе к переменным a, b можно не апеллировать к вращающейся системе отсчета. Действительно, будем искать решение уравнений (414) в виде:

$$x = a(t) \cos t + b(t) \sin t, \quad (\alpha)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — функции времени. Очевидно, что если $x(t)$ задано, то $a(t)$ и $b(t)$ не являются вполне определенными, поэтому мы имеем право наложить на $a(t)$ и $b(t)$ еще одно условие:

$$\frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \sin t = 0. \quad (\beta)$$

Легко видеть, что (α) и (β) эквивалентны переходу к вращающейся системе и, следовательно, приводят к тем же самым формулам (417).

где $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ — соответствующие коэффициенты Фурье функций:

$$\left. \begin{aligned} & -f(a \cos t + b \sin t; -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ & +f(a \cos t + b \sin t; -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (419)$$

Уравнения (418) — это наша система (414), только лишь преобразованная к другим переменным. Так как формулы перехода (415) содержали явно время, то новая система уравнений неавтономна, хотя исходная система была автономна.

Рассмотрим теперь наряду с системой (418) вспомогательную или «укороченную» систему:

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}; \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}, \quad (420)$$

полученную из первой путем отбрасывания всех «осциллирующих» членов.

Система (420), как и первоначальная система (414), является автономной. Однако она значительно проще системы (414). Именно, нетрудно показать, что в системе (420) при переходе к полярным координатам переменные разделяются. Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_0(a, b)}{2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi; -a \sin \xi + b \cos \xi) \sin \xi d\xi, \\ \frac{\psi_0(a, b)}{2} &= +\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi; -a \sin \xi + b \cos \xi) \cos \xi d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (421)$$

то, полагая

$$a = K \cos \vartheta, \quad b = K \sin \vartheta \quad (422)$$

или

$$K = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{a}{b},$$

имеем ¹⁾:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mu \Psi(K), \quad (423)$$

¹⁾ Умножая первое из уравнений (420) на a , второе — на b и складывая, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{dK^2}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi; -a \sin \xi + b \cos \xi) (-a \sin \xi + b \cos \xi) d\xi.$$

Обозначая $a \cos \xi + b \sin \xi = K \cos(\xi + \delta)$, имеем далее:

$$\frac{1}{2} \frac{dK^2}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos(\xi + \delta); -K \sin(\xi + \delta)] K \sin(\xi + \delta) d\xi,$$

откуда, полагая $\xi + \delta = u$ и используя периодичность подынтегральной функции и деля на K , получаем первое из уравнений (423).

где

$$\Phi(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u; -K \sin u) \sin u \, du, \quad (424)$$

$$\Psi(K) = \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u; -K \sin u) \cos u \, du. \quad (425)$$

Нетрудно провести исследование системы вспомогательных уравнений.

Начнем с первого из уравнений (423), которое мы сможем исследовать независимо от второго:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K); \quad (423a)$$

качественная картина уравнения такого типа, как мы видели, полностью определяется расположением и характером состояний равновесия на соответствующей фазовой прямой.

Координаты этих состояний равновесия суть корни уравнения:

$$\Phi(K) = 0 \quad (426)$$

или

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u; -K \sin u) \sin u \, du = 0. \quad (426a)$$

Состояние равновесия $K=K_*$ будет устойчивым, если

$$\Phi'(K_*) < 0 \quad (427)$$

или если ¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_*, \cos u; -K_*, \sin u) \, du < 0, \quad (427a)$$

Умножив второе из уравнений (420) на a , первое—на b и вычитая второй результат из первого, найдем:

$$a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt} = K^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi; -a \sin \xi + b \cos \xi) (a \cos \xi + b \sin \xi) \, d\xi,$$

откуда при помощи таких же преобразований получим второе из уравнений (423).

¹⁾ Действительно:

$$\begin{aligned} \Phi'(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_x \cos u \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \sin^2 u \, du = \\ &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [f'_x K \sin u + f'_y K \cos u] \cos u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} \frac{d}{du} \{f \cos u\} \, du + \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du, \end{aligned}$$

и неустойчивым, если

$$\Phi'(K_1) > 0.$$

Остальные движения, как мы знаем, являются либо асимптотическими к состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, либо асимптотическими к состоянию равновесия для $t \rightarrow +\infty$ и уходящими в бесконечность для $t \rightarrow -\infty$ и т. д.

Для этих движений, как всегда в таких случаях, могут быть найдены и аналитические выражения¹⁾.

Действительно, из (423а) имеем:

$$\mu(t-t_0) = \int_{K_0}^K \frac{dK}{\Phi(K)},$$

где $(K)_{t=t_0} = K_0$, откуда, разрешая это уравнение относительно K , имеем:

$$K = K\{\mu(t-t_0)\}.$$

Теперь перейдем ко второму из уравнений (423) и к изображению движения на плоскости a, b или, как мы будем ее называть, на плоскости переменных ван-дер-Поля:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K).$$

Здесь следует различать два случая. В первом случае, довольно часто встречающемся на практике,

$$\Psi(K) \equiv 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f'(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \equiv 0.$$

В этом случае второе уравнение интегрируется сразу:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta = \text{const.} = \vartheta_0,$$

и мы можем сразу представить себе картину фазовых траекторий на плоскости ван-дер-Поля. Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под всевозможными углами $\vartheta = \text{const.}$ Движение вдоль каждой из этих прямых про-

откуда, в силу (426),

$$\Phi'(K_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_1 \cos u, -K_1 \sin u) \, du.$$

1) Мы сейчас не рассматриваем вопроса о том, можно ли практически вычислить те интегралы, которые содержат эти аналитические выражения.

исходит одинаково и определяется уравнением (423а). Корни уравнения (426) $K = K_i$ дают радиусы окружностей, которые являются кривыми состояний равновесия: каждая точка такой кривой является состоянием равновесия. Примерная картина на плоскости переменных ван-дер-Поля (плоскость a, b) в частном случае трех состояний равновесия для уравнения (423а) изображена на рис. 311а.

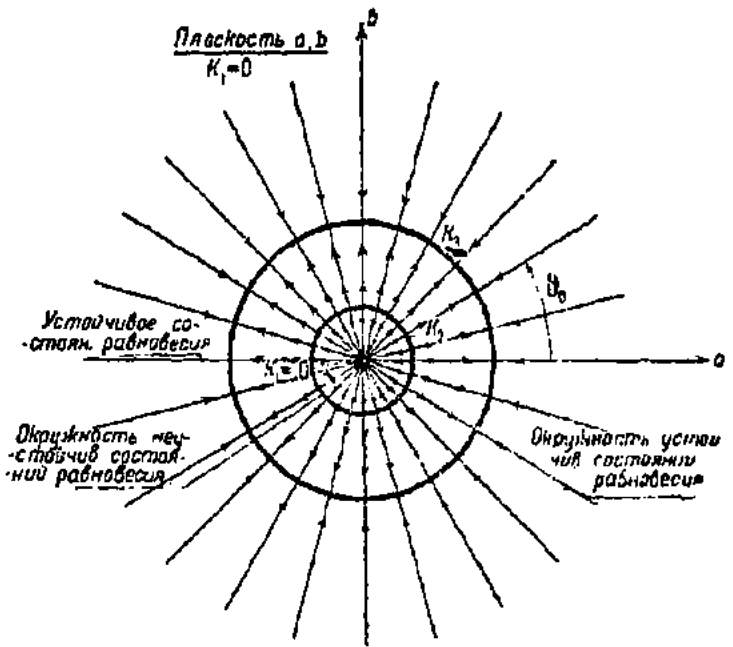


Рис. 311а.

Если мы перейдем теперь от вращающейся системы координат ab к исходной системе координат xu с помощью формул преобразования (416), то, как нетрудно видеть, окружностям состояний равновесия на плоскости a, b будут соответствовать на плоскости x, y круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы K_i (рис. 311с).

Движение изображающей точки по какому-нибудь циклу, имеющему радиус K_i , следует закону:

$$x = a \cos t + b \sin t = K_i \cos \vartheta_0 \cos t + K_i \sin \vartheta_0 \sin t = K_i \cos(t - \vartheta_0),$$

$$y = -a \sin t + b \cos t = -K_i \cos \vartheta_0 \sin t + K_i \sin \vartheta_0 \cos t = -K_i \sin(t - \vartheta_0),$$

где ϑ_0 — произвольно. Произвольность фазы ϑ_0 для периодических дви-

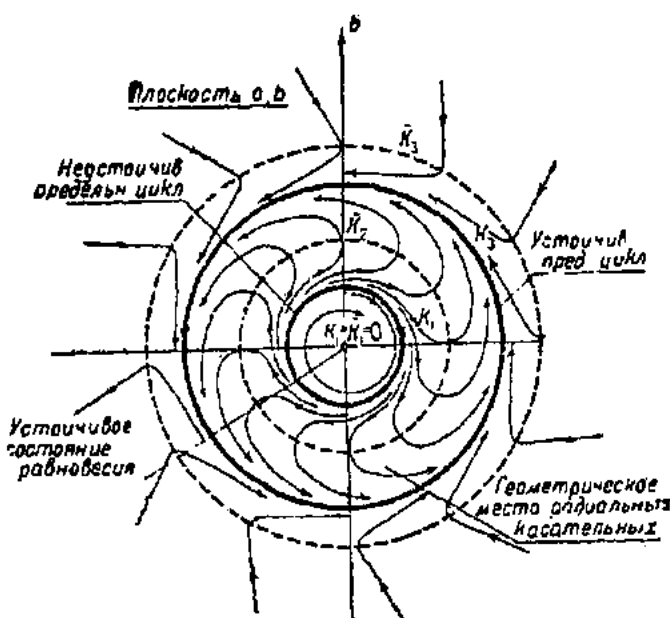


Рис. 311б.

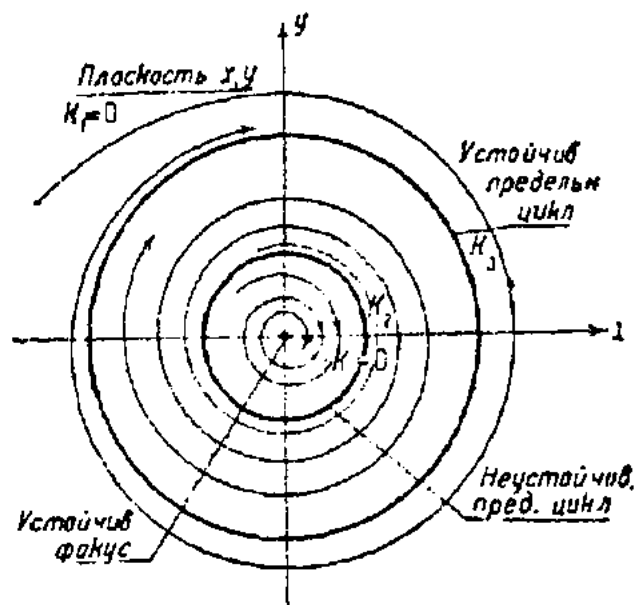


Рис. 311с.

жений по данному предельному циклу на плоскости x, y соответствует на плоскости a, b тому обстоятельству, что состояния равновесия вспомогательных уравнений образуют целые окружности.

Сразу видно, что рассматриваемый предельный цикл будет орбитно устойчив, если соответствующие состояния равновесия будут устойчивы, и наоборот. Остальные траектории, представлявшие собою на плоскости a, b отрезки прямых, преобразуются на плоскости x, y в спирали, вообще говоря, накручивающиеся на предельные циклы либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда $\Psi(K) \not\equiv 0$. Пусть уравнение $\Psi(K) = 0$ имеет несколько корней и пусть эти корни будут $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$. Мы предположим, что ни одно из чисел $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$ не совпадает с числами K_1, K_2, \dots, K_n , о которых у нас уже была речь.

Тогда, возвращаясь к уравнениям (423), легко сделать заключение, что состояниям равновесия уравнения (423а) на фазовой плоскости a, b соответствуют круговые предельные циклы, опять-таки с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение изображающей точки на плоскости a, b по какому-нибудь предельному циклу радиуса K_j подчиняется уравнениям:

$$a = K_j \cos \{ \mu \Psi(K_j) t + \vartheta_0 \},$$

$$b = K_j \sin \{ \mu \Psi(K_j) t + \vartheta_0 \}.$$

Устойчивость или неустойчивость рассматриваемого предельного цикла определяется устойчивостью или неустойчивостью соответствующего состояния равновесия для уравнения (423а), а направление вращения — знаком $\Psi(K_j)$.

Остальные кривые суть спирали, накручивающиеся на предельные циклы (или на состояние равновесия) либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 311б). Если мы теперь в этом втором случае перейдем к неподвижной системе координат, то получим картину, совершенно аналогичную той, которая была на этой плоскости в первом случае. Мы будем опять иметь ряд предельных циклов с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение по какому-нибудь из этих предельных циклов, для которого $K = K_j$, дается уравнениями ¹⁾:

$$x = a \cos t + b \sin t = K_j \cos \{ [1 - \mu \Psi(K_j)] t - \vartheta_0 \},$$

$$y = -a \sin t + b \cos t = -K_j \sin \{ [1 - \mu \Psi(K_j)] t - \vartheta_0 \}.$$

Этот случай отличается от первого случая лишь тем, что здесь мы имеем определенную поправку на частоту $\Delta\omega = -\mu \Psi(K_j)$, которая, в первом приближении по μ , соответствует поправке на период $\tau = \mu 2\pi \Psi(K_j)$. Остальные траектории — опять спирали, вообще говоря, накручивающиеся на предельные циклы.

Мы истолковали результат исследования вспомогательных уравнений [уравнений (420) или, что все равно, уравнений (423)] на основной плоскости x, y . Теперь позволительно спросить, в какой мере эти резуль-

¹⁾ Заметим, что для этого решения $\frac{dx}{dt}$ равняется y лишь с точностью до величин порядка μ .

таты отражают свойства решений исходных уравнений (414) или, что все равно, свойства решений неукороченных преобразованных уравнений (419)?

Можно доказать, — и в этом, вообще говоря, и заключается обоснование метода ван-дер-Поля, — что та картина, которую мы только что обнаружили на плоскости x, y для достаточно малого μ , аппроксимирует картину фазовых траекторий исходных уравнений. Это высказывание можно сделать более точным. Именно, что касается предельных циклов, то можно доказать, — мы это докажем в § 5 этой главы, когда будет идти речь о методе Пуанкаре, — что для достаточно малого μ исходные уравнения (414) действительно имеют предельные циклы (если уравнение $\Phi(K)$ имеет простые корни), которые близки к кругам с радиусами $K = K_0$ (тем ближе, чем меньше μ), и не имеют других предельных циклов; эти предельные циклы соответствуют периодическим решениям, устойчивым по Ляпунову, если $\Phi'(K_0) < 0$; если $\Psi(K_0) = 0$, то поправка к периоду (по сравнению с гармоническим осциллятором) начинается с членов, пропорциональных μ^2 , если же $\Psi(K_0) \neq 0$, то теория Пуанкаре дает поправку к периоду, начинающуюся с члена, пропорционального μ , коэффициентом которого стоит $2\pi\Psi(K_0)$.

Что же касается решений, соответствующих процессам установления, то мы сейчас докажем, следуя Мандельштаму и Папалекси, что решения вспомогательных уравнений сколь угодно мало отличаются от решений исходных уравнений (при одинаковых начальных условиях) в течение заданного сколь угодно большого промежутка времени, лишь бы μ было достаточно малым.

§ 2. Обоснование метода ван-дер-Поля для процессов установления ^(57, 106)

Нашей целью является доказать, что решение системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left[\frac{\varphi_0(ab)}{2} + \sum_{j=1}^n \varphi_j(a, b) \cos jt + \sum_{j=1}^n \bar{\varphi}_j(a, b) \sin jt \right] \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left[\frac{\psi_0(ab)}{2} + \sum_{j=1}^n \psi_j(a, b) \cos jt + \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j(a, b) \sin jt \right] \end{aligned} \right\} \quad [418]$$

и решение «укороченной» системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2} \\ \frac{db}{dt} &= \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2} \end{aligned} \right\} \quad [420]$$

удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, сколь угодно мало отличаются друг от друга на протяжении заданного сколь угодно большого промежутка времени t , если только μ достаточно мало.

Для сокращения выкладок мы докажем это предложение для частного случая одного уравнения первого порядка:

$$\frac{da}{dt} = \mu [f(a) + \varphi(a) \cos t] = \mu F(a, t), \quad (428)$$

для которого «укороченное» уравнение имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = \mu f(a). \quad (429)$$

Доказательство для общего случая не отличается по идее от того доказательства, которое мы будем проводить для этого частного случая.

Будем рассматривать решение уравнения (428) $a(t)$ и решение $a_0(t)$ уравнения (429), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: при $t = t_0$ $a(t_0) = a_0(t_0) = \eta$.

Мы будем предполагать, что $f(a)$ и $\varphi(a)$ — однозначные и непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, причем для всех значений a , удовлетворяющих неравенству:

$$|a - \eta| < |A - \eta|, \quad (430)$$

эти функции и их производные ограничены. То-есть, другими словами, существуют положительные числа M , N , P и Q такие, что для всех значений a , удовлетворяющих неравенству (430), мы будем иметь:

$$|f(a)| < M, \quad |\varphi(a)| < N, \quad \left| \frac{df}{da} \right| < P, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right| < Q. \quad (431)$$

Нетрудно видеть, что при этих предположениях для любых численных значений a_1 и a_2 , лежащих в указанных границах, т. е. таких, что

$$|a_1 - \eta| < |A - \eta| \text{ и } |a_2 - \eta| < |A - \eta|,$$

и для любых значений t мы будем иметь (применяя теорему о среднем):

$$|F(a_2, t) - F(a_1, t)| < B |a_2 - a_1|, \quad (432)$$

где B — положительное, не зависящее от выбора a_1 и a_2 внутри указанных границ, число.

Нам нужно доказать, что, задав наперед D ($D > 0$), мы всегда можем подобрать такое достаточно малое μ , чтобы для всех $t > t_0$, удовлетворяющих условию:

$$\mu(t - t_0) \leq D, \quad (433)$$

соблюдалось условие:

$$|a(t) - a_0(t)| < \epsilon,$$

где ϵ — сколь угодно малое положительное число.

На число D накладывается только одно ограничение — именно D должно быть таким, чтобы решение $a_0(t)$ при всех значениях t , удов-

летворяющих неравенству $\mu(t-t_0) \leq D$, не выходило бы из указанных границ, т. е. чтобы:

$$|a_0(t) - \eta| < |A - \eta|.$$

Такое D всегда можно выбрать, так как решение $a_0(t)$ есть функция только $\mu(t-t_0)$.

Нетрудно видеть, что высказанное нами предложение действительно является лишь более точной формулировкой факта, о котором мы говорили выше. Действительно, задавая сколь угодно большой промежуток времени T , мы можем выбрать (при фиксированном D) на основании этого предложения столь малое μ , чтобы решение уравнения (428) $a(t)$ и решение уравнения (429) $a_0(t)$ отличались бы сколь угодно мало друг от друга в течение всего промежутка времени $t_0, t_0 + T$.

Для доказательства нашего предложения будем искать решение уравнения (428) обычным методом последовательных приближений, считая $a_0(t)$ нулевым приближением и находя последовательно дальнейшие приближения: $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), \dots$, принимающие значение $a_j(t_0) = \eta$ ($j = 1, 2, \dots$) при $t = t_0$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ даст нам решение уравнения (428)¹.

Первое приближение мы найдем, подставляя в правую часть уравнения (428) $a_0(t)$ и интегрируя:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F(a_0, t) dt. \quad (434)$$

Точно так же мы найдем второе приближение:

$$a_2(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F(a_1, t) dt, \quad (435)$$

и вообще n -е приближение $a_n(t)$ будет:

$$a_n(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F(a_{n-1}, t) dt. \quad (436)$$

Как уже было сказано, можно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) = a(t)$ существует и является решением уравнения (428).

Будем теперь последовательно оценивать разности $a_n - a_0$.

Для первого приближения мы будем иметь:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F(a_0, t) dt = \eta + \mu \int_{t_0}^t f(a_0) dt + \mu \int_{t_0}^t \varphi(a_0) \cos t dt.$$

1) Метод последовательных приближений и доказательство того, что функции $a_n(t)$, которые мы находим ниже, стремятся при $n \rightarrow \infty$ к решению уравнения (428), можно найти, например, у Гурса (Курс анализа, том II, часть 2).

Интегрируя по частям второй интеграл в правой части и замечая, что

$$\mu \int_{t_0}^t f(a_0) dt = a_0(t) - \eta,$$

мы получим:

$$a_1(t) = a_0(t) + \left[\mu \varphi(a_0) \sin t \right]_{t_0}^t - \mu \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} \frac{da_0}{dt} \sin t dt \quad (437)$$

или, пользуясь оценками, введенными выше:

$$|a_1(t) - a_0(t)| < \mu 2N + \mu QMD = \mu S, \quad (438)$$

где

$$S = 2N + QMD. \quad (439)$$

Для того чтобы оценить $a_2(t) - a_0(t)$, заметим, что

$$|a_2(t) - a_0(t)| \leq |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0|.$$

Но

$$a_2 - a_1 = \mu \int_{t_0}^t [F(a_1, t) - F(a_0, t)] dt; \quad (440)$$

пользуясь неравенством (432), имеем¹⁾:

$$|a_2(t) - a_1(t)| < \mu B \int_{t_0}^t |a_1 - a_0| dt < \mu^2 BS |t - t_0| \leq \mu BSD. \quad (441)$$

А следовательно, мы будем иметь:

$$|a_2(t) - a_0(t)| < \mu S (1 + BD). \quad (442)$$

Далее

$$|a_3(t) - a_0(t)| \leq |a_3 - a_2| + |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0|.$$

Но

$$\begin{aligned} |a_3 - a_2| &= \mu \left| \int_{t_0}^t [F(a_2, t) - F(a_1, t)] dt \right| < \mu B \int_{t_0}^t |a_2 - a_1| dt < \\ &< \mu^3 B^2 S \frac{|t - t_0|^2}{1.2} \leq \mu S \frac{(BD)^2}{1.2}, \end{aligned}$$

откуда

$$|a_3 - a_0| < \mu S \left[1 + BD + \frac{(BD)^2}{1.2} \right]. \quad (443)$$

¹⁾ Мы предполагаем, что $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), \dots$ в течение всего рассматриваемого промежутка времени $\mu(t - t_0) \leq D$ не выходят из области, заданной условиями (430). Ниже это будет строго доказано.

Продолжая дальше таким же образом, мы получим:

$$|a_n - a_{n-1}| < \mu S \frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|a_n - a_0| < \mu S \left[1 + BD + \frac{(BD)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!} \right] < \mu \cdot S \cdot e^{BD}. \quad (444)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ есть решение уравнения (428), то мы будем иметь:

$$|a - a_0| \leq \mu S e^{BD}. \quad (445)$$

Однако все те оценки, которые мы делали, например использование неравенства (432), законны только до тех пор, пока мы можем ручаться, что все функции $a_j(t)$ находятся внутри указанных нами границ, т. е. до тех пор, пока:

$$|a_j(t) - \eta| < |A - \eta|. \quad (446)$$

Посмотрим, выполняется ли это. Нетрудно видеть, что, силу (430) и условия, наложенного на D , существует такое число α ($\alpha > 0$)¹⁾, что:

$$|A - \eta| - |a_0(t) - \eta| \geq \alpha \text{ для } 0 \leq \mu(t - t_0) \leq D. \quad (447)$$

Переходя к $a_1(t)$, на основании (438) имеем (для тех же значений t):

$$|a_1(t) - \eta| \leq |a_1 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S + |A - \eta| - \alpha|,$$

откуда следует, что для выполнения (446) достаточно, чтобы $\mu S < \alpha$.
Далее:

$$|a_2(t) - \eta| \leq |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S(1 + BD) + |A - \eta| - \alpha|,$$

и, следовательно, для того чтобы $|a_2 - \eta|$ было меньше $|A - \eta|$, достаточно, чтобы

$$\mu S(1 + BD) < \alpha.$$

Продолжая таким же образом дальше, нетрудно видеть, что все проведенные оценки законны, если $\mu S e^{BD} < \alpha$.

Очевидно, что сколь бы мало ни было ϵ , мы всегда можем указать такое μ , чтобы мы имели:

$$\mu S e^{BD} < \alpha \quad (448)$$

и

$$|a(t) - a_0(t)| \leq \mu S e^{BD} < \epsilon$$

для всех t , удовлетворяющих неравенству $\mu(t - t_0) \leq D$. С этой целью нам достаточно выбрать μ меньше наименьшего из чисел $\frac{\alpha}{S e^{BD}}$, $\frac{\epsilon}{S e^{BD}}$.

Этим наше предложение доказано.

1) Величина α определена, коль скоро задано D . Выбор μ не огражается на α .

Сделаем еще одно существенное замечание: из вышесказанного следует, что $a_0(t)$ при достаточно малом μ аппроксимирует соответствующее точное решение $a(t)$, вообще говоря, во всем интересующем нас с точки зрения физики интервале изменения a , так как в большинстве физически интересных случаев в этом интервале условия (431) выполнены. Иначе говоря, аппроксимация, получаемая по способу ван-дер-Поля, в физически интересных случаях охватывает любой наперед заданный отрезок исследуемого процесса.

Мы здесь не будем давать соответствующих формулировок для случая плоскости, когда у нас будут не одно уравнение (428) и одна функция $a(t)$, а два уравнения (418) и соответственно две функции $a(t)$ и $b(t)$, так как эти формулировки очевидны.

Скажем еще несколько слов о составлении вспомогательных уравнений (423)¹⁾; $\Phi(K)$ является свободным членом в разложении $f(K \cos u, -K \sin u) \sin u$ в ряд Фурье, а $\Psi(K)$ — свободным членом разложения $f(K \cos u, -K \sin u) \cos u$. Если, как мы предположили, $f(x, y)$ — полином, то эта операция нахождения свободного члена может быть совершена с помощью тригонометрических формул, приведенных в конце книги.

Заметим в заключение, что для целого ряда целей (например для изучения бифуркаций) значительно удобнее вместо уравнения (423а) пользоваться уравнением:

$$\frac{d\rho}{dt} = \bar{\Phi}(\rho), \quad (449)$$

где

$$\bar{\rho} = K^2, \quad \text{а} \quad \bar{\Phi}(\rho) = 2\sqrt{\rho} \Phi(\sqrt{\rho}).$$

§ 3. Применение метода ван-дер-Поля

1. Ламповый генератор при мягком режиме. В качестве примера рассмотрим при помощи метода ван-дер-Поля ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 312). На основании

1) Уравнения в a и b сравнительно просто получаются и по способу самого ван-дер-Поля. Чтобы исследовать уравнение:

$$\ddot{y} + y = \mu f(y, \dot{y}),$$

ван-дер-Поль полагает $y = a \cos t + b \sin t$. Подставляя это выражение в уравнение, он получает:

$$\begin{aligned} & \underline{\ddot{a} \cos t} + 2\underline{\dot{b} \cos t} + \underline{\dot{b} \sin t} - 2\underline{\dot{a} \sin t} = \\ & = \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t + \underline{\dot{a} \cos t} + \underline{\dot{b} \sin t}). \end{aligned}$$

Далее он отбрасывает справа и слева подчеркнутые члены, обосновывая это тем, что a и b должны быть медленно меняющимися функциями времени; далее разворачивает функцию f в ряд Фурье, считая a и b постоянными, и приравнивает коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$. В результате такой операции получаются уравнения, совпадающие с (420).

закона Кирхгофа уравнение, определяющее силу тока в колебательном контуре генератора, напишется следующим образом:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (450)$$

Мы будем считать, что анодный ток зависит только от напряжения на сетке (т. е. будем пренебрегать реакцией анода), и ограничимся для первого рассмотрения кубической характеристикой лампы. Эту кубическую характеристику мы возьмем в форме полинома третьей степени, написанного относительно «безразмерного напряжения»¹⁾ v , т. е. напряжения на сетке V_g , отнесенного к напряжению насыщения V_s :

$$I_a = V_s (\alpha_1 v + \beta_1 v^2 - \gamma_1 v^3). \quad (451)$$

Здесь $v = \frac{V_g}{V_s}$, а $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — коэф-

фициенты, имеющие все одну и ту же размерность (обратную размерности сопротивления). Такое же «безразмерное напряжение» мы введем в уравнение (450). Так как $V_g = \frac{1}{C} \int i dt$, то $v = \frac{1}{CV_s} \int i dt$, и после подстановки безразмерного напряжения уравнение (450) примет вид:

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = \frac{1}{V_s} \frac{dI_a}{dt}.$$

Подставляя теперь в это уравнение выражение для I_a (451), после очевидных преобразований получим:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + v = (a + 2\beta v - 3\gamma v^2) \frac{dv}{dt}, \quad (452)$$

где $t' = \omega_0 t$ (в дальнейшем мы будем писать вместо t' опять t , помня, что мы ввели новую единицу времени),

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} a = (M\alpha_1 - RC) \omega_0, \quad \beta = M\beta_1 \omega_0, \quad \gamma = M\gamma_1 \omega_0. \quad (452a)$$

Здесь a, β, γ — безразмерные параметры. Мы предположим, как это обычно возможно сделать, что эти параметры малы по сравнению с единицей и притом одного и того же порядка малости. В таком случае можно положить:

$$a = \mu a', \quad \beta = \mu \beta', \quad \gamma = \mu \gamma',$$

1) Подробнее об этом см. в дополнительной главе «Электронная лампа».

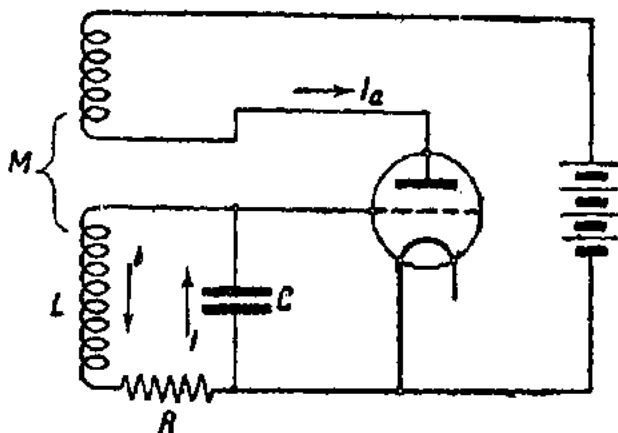


Рис. 312.

где μ — тот малый параметр, который должен войти в наши теоретические рассмотрения ($\mu \geq 0$), а α' , β' , γ' — определенные безразмерные величины порядка единицы¹). Мы предположим еще, что параметр μ достаточно мал для того, чтобы результаты, полученные по методу ван-дер-Поля, отображали с достаточной точностью фактическое положение дела с решениями уравнения (452) и в первую очередь с периодическими решениями и их устойчивостью. Само собой разумеется, что это последнее фундаментальное предположение налагает, вообще говоря, существенные ограничения на коэффициенты α , β , γ и, следовательно, на тот класс задач, который может подпасть под наше рассмотрение²).

Полагая $v = x$, $\frac{dv}{dt} = y$ и вводя параметр μ , перейдем от одного уравнения (452) к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu(\alpha' + 2\beta'x - 3\gamma'x^2)y. \quad (453)$$

В согласии с (420) и (423) вспомогательные уравнения имеют вид:

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{a}{2} \left[\alpha' - \frac{3\gamma'}{4}(a^2 + b^2) \right]; \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{b}{2} \left[\alpha' - \frac{3\gamma'}{4}(a^2 + b^2) \right] \quad (454)$$

или в полярных координатах K , ϑ :

$$\frac{dK}{dt} = \mu \frac{K}{2} \left[\alpha' - \frac{3\gamma'}{4}K^2 \right]; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0. \quad (455)$$

Радиусы предельных циклов (в нулевом приближении) на плоскости x , y даются уравнением:

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left[\alpha' - \frac{3\gamma'}{4}K^2 \right] = 0. \quad (456)$$

Предположим, что $\gamma' > 0$, и рассмотрим отдельно случаи $\alpha' < 0$ и $\alpha' > 0$.

Если $\alpha' < 0$, то уравнение (456) имеет единственный интересный для нас корень $K = 0$. В этом случае предельный цикл вырождается в точку. Эта особая точка устойчива, так как

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha'}{2} < 0.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае все остальные траектории суть спирали, наматывающиеся при $t \rightarrow \infty$ на особую точку в начале координат. Мы имеем на плоскости x , y картину, характерную для затухающих колебаний. Если $\alpha' > 0$, то уравнение (456) имеет два интересных для нас корня:

$$K_1 = 0 \quad \text{и} \quad K_2 = + \sqrt{\frac{4\alpha'}{3\gamma'}} = + \sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma}}. \quad (457)$$

1) Зафиксировав какую-нибудь одну из этих величин, например положив $\alpha' = 1$, мы этим самым определим (при заданных α , β , γ) как величины β' , γ' , так и параметр μ .

2) О выборе параметра μ см. § 5 настоящей главы, пункт 2.

Нетрудно видеть, что первый корень соответствует неустойчивой особой точке, так как $\Phi'(0) = \alpha' > 0$. Второй корень соответствует устойчивому предельному циклу, так как $\Phi'(K_2) = -\alpha' < 0$.

Остальные траектории разбиваются на два класса: на траектории, наматывающиеся снаружи на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и уходящие в бесконечность при $t \rightarrow -\infty$, и на траектории, наматывающиеся изнутри на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и стремящиеся к особой точке при $t \rightarrow -\infty$. Мы имеем картину, характерную для простейшей автоколебательной системы, работающей при мягком режиме.

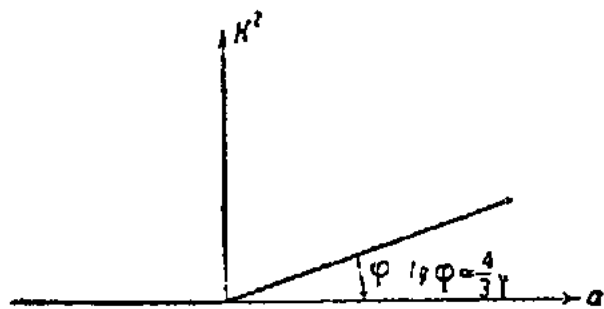


Рис. 313а.

Если, начиная с некоторого положительного значения α' , мы будем его непрерывно уменьшать (например увеличивая K), оставляя γ постоянным, то квадрат радиуса предельного цикла будет уменьшаться по линейному закону (рис. 313а):

$$K_0^2 = \frac{4}{3\gamma} \alpha. \quad (457a)$$

При $\alpha = 0$ предельный цикл исчезнет, сольется с неустойчивым фокусом, передав фокусу свою устойчивость; мы видим, что в этом случае $\alpha = 0$ является бифуркационным значением параметра α'). Если изменять непрерывно α от отрицательного значения к положительному, то, когда α проходит через нуль, возникают колебания, амплитуда которых, начиная с нуля, непрерывно увеличивается¹⁾. При обратном изменении α амплитуда колебаний постепенно уменьшается, доходит до нуля, колебания исчезают и система начинает себя вести как затухающий осциллятор (рис. 313б).

Такой характер возникновения колебаний носит название мягкого возникновения колебаний, в отличие от жесткого возникновения колебаний, когда сразу возникают колебания конечной амплитуды, несмотря на то, что мы непрерывно и медленно меняем параметр. Найдем теперь, пользуясь вспомогательными уравнениями, приближенные аналитические выражения, дающие процессы установления колебаний.

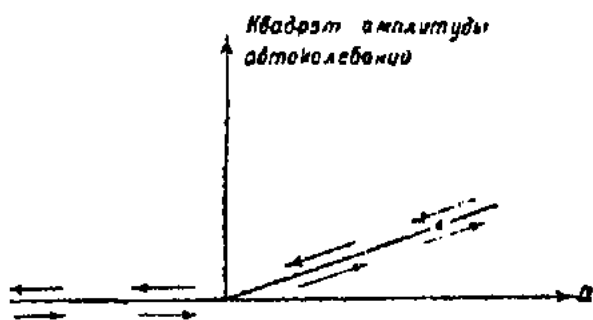


Рис. 313б.

1) Теория бифуркаций для рассматриваемого случая в общем виде дана в § 8 этой главы.

2) При этом предполагается, само собой разумеется, что изменения параметра совершаются достаточно медленно.

Интегрируя уравнения (455), находим (предполагая, что $a > 0$):

$$K = K_0 \sqrt{\frac{C_1 e^{at}}{C_1 e^{at} + K_0^2}} \quad (K_0^2 = \frac{4a}{3\gamma}), \quad (458)$$

$$\vartheta = \text{const.} = \vartheta_0,$$

откуда, переходя к переменным на плоскости x, y , имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= K_0 \sqrt{\frac{e^{a(t-\vartheta_0)}}{e^{a(t-\vartheta_0)} + C}} \cos(t - \vartheta_0), \\ y &= -K_0 \sqrt{\frac{e^{a(t-\vartheta_0)}}{e^{a(t-\vartheta_0)} + C}} \sin(t - \vartheta_0), \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

где $C = \frac{K_0^2}{C_1 e^{a\vartheta_0}}$.

Можно сказать, что это — приближенное выражение общего интеграла уравнений (453), так как здесь две произвольных постоянных C и ϑ_0 ($C=0$ соответствует предельному циклу; $C=\infty$ — состоянию равновесия). Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: выражение (451), принятое нами для характеристики, содержало квадратичный член, который, однако, совершенно не входит в выражение нулевого приближения общего решения (его влияние будет сказываться только в следующих приближениях). Это — весьма общее положение, относящееся не только к квадратичному, но и к любым четным членам характеристики. Если мы аппроксимируем характеристику в виде любого многочлена, четные члены не оказывают никакого влияния на нулевые приближения. Происходит это вследствие того, что разложение четных степеней синусов и косинусов содержит только синусы и косинусы четных кратных углов, и поэтому в их разложении не содержится основной (резонансной) частоты.

2. Ламповый генератор при жестком режиме. Рассмотрим снова ламповый генератор, описываемый уравнением (450), но возьмем другое выражение для характеристики, а именно положим:

$$I_a = V_s (a_1 v + \gamma_1 v^3 - \epsilon_1 v^5), \quad (460)$$

где v — снова «безразмерное напряжение».

Полагая

$$a = (M a_1 - RC) \omega_0, \quad \gamma = M \gamma_1 \omega_0, \quad \delta = M \epsilon_1 \omega_0,$$

и так как по-предыдущему

$$a = \mu a', \quad \gamma = \mu \gamma', \quad \delta = \mu \delta',$$

мы можем привести в этом случае уравнение (460) к виду:

$$\ddot{v} + v = \mu \{ a' - 3\gamma' v^3 + 5\delta' v^5 \} v. \quad (461)$$

В согласии с (420) и (423) вспомогательные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \frac{a}{2} \left[\alpha' + \frac{3}{4} \gamma' (a^2 + b^2) - \frac{5}{8} \delta' (a^2 + b^2)^2 \right], \\ \frac{db}{dt} &= \mu \frac{b}{2} \left[\alpha' + \frac{3}{4} \gamma' (a^2 + b^2) - \frac{5}{8} \delta' (a^2 + b^2)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (462)$$

или в полярных координатах K, ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \mu \frac{K}{2} \left[\alpha' + \frac{3}{4} \gamma' K^2 - \frac{5}{8} \delta' K^4 \right], \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (462a)$$

Радиусы предельных циклов (в нулевом приближении) даются уравнением:

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left[\alpha' + \frac{3}{4} \gamma' K^2 - \frac{5}{8} \delta' K^4 \right] = 0. \quad (463)$$

Предположим, что $\gamma' > 0$, $\delta' > 0$, а α' может быть как положительным, так и отрицательным.

Уравнение (463) всегда имеет корень $K=0$. Это значит, что начало координат всегда является состоянием равновесия. Так как $\Phi'(0) = \frac{\alpha'}{2}$, то это состояние равновесия устойчиво для $\alpha' < 0$ и неустойчиво для $\alpha' > 0$. Радиусы предельных циклов, не выродившихся в точку, даются уравнением:

$$\alpha' + \frac{3}{4} \gamma' K^2 - \frac{5}{8} \delta' K^4 = 0$$

или, иначе, уравнением:

$$\alpha + \frac{3}{4} \gamma K^2 - \frac{5}{8} \delta K^4 = 0.$$

Из этого биквадратного относительно K уравнения, вообще говоря, определяются два значения K_1^2 и K_2^2 (нас интересуют только положительные значения K^2), которые дадут соответствующие радиусы предельных циклов K_1 и K_2 . Если построить диаграмму (рис. 313с), в которой по оси абсцисс откладывать α , а по оси ординат K^2 (квадрат радиусов предельных циклов), то, как нетрудно видеть, получается простая парабола (мы считаем γ и δ фиксированными). Эта парабола пересекает ось K^2 в двух точках: в точке $K^2=0$ и в точке $K^2 = \frac{6}{5} \frac{\gamma}{\delta}$; в точке, для которой $r = \frac{6}{10} \frac{\gamma}{\delta}$, проходит вертикальная касательная, и вся парабола расположена справа от этой касательной. Пользуясь условием устойчивости циклов $\Phi'(K) < 0$, можно убедиться, что вся часть параболы, расположенная выше точки с вертикальной касательной, соответствует устойчивым предельным циклам, а часть параболы, расположенная ниже этой точки, — неустойчивым циклам.

Используя рис. 313с, где изображена эта парабола и прямая $K^2=0$ и где устойчивые части отмечены жирным, легко представить себе картину на фазовой плоскости при разных α и фиксированных γ и δ .

Если вначале генератор не возбужден, например α имеет некоторое отрицательное значение $-\alpha'$ (рис. 313с), то при возрастании α в момент, когда α станет равным нулю, возбуждаются колебания конечной амплитуды. При дальнейшем возрастании α амплитуда монотонно растет. При убывании α амплитуда будет постепенно уменьшаться до тех пор, пока α не станет равной α_0 — абсциссе точки с вертикальной касательной. Тогда колебания сразу сорвутся. Мы видим, что возникновение и исчезновение колебаний происходят, в отличие от случая мягкого установления, при разных значениях коэффициента возбуждения, наблюдается так называемое «затягивание» (своего рода гистерезис при переходе от состояния равновесия к периодическому движению).

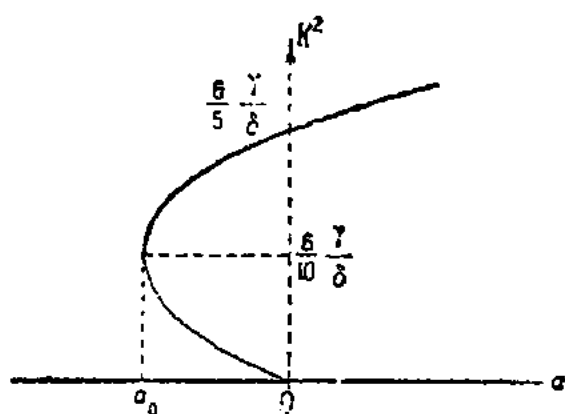


Рис. 313с.

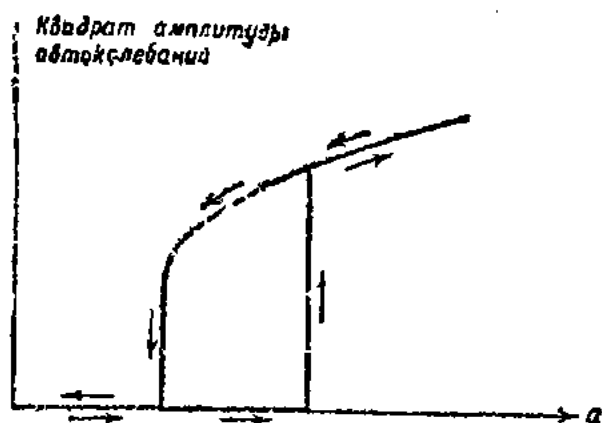


Рис. 313д.

Кроме того, появляются и прекращаются колебания с различными и в обоих случаях конечными амплитудами. В общем получается типичная картина так называемого жесткого установления колебаний (рис. 313д). Если в начальный момент система находится левее точки с вертикальной касательной, то мы никаким способом не можем возбудить колебаний, не изменяя параметров системы. Если же система находится между точкой α_0 , через которую проходит вертикальная касательная, и точкой $\alpha=0$, то хотя в системе и нет самовозбуждения, однако колебания в ней могут существовать. Но, для того чтобы их возбудить, нужно системе дать известный толчок. Как будет ясно из дальнейшего, для того чтобы возникли колебания в системе, необходимо, чтобы квадрат начального отклонения системы от состояния равновесия был больше неустойчивой ветви параболы. При положительном значении α имеет место самовозбуждение колебаний — колебания возникают при сколь угодно малом начальном отклонении от состояния равновесия.

Заметим, что уравнения (462а) можно обинтегрировать подобно тому, как это мы сделали в случае генератора при мягком режиме, и получить решения, количественно характеризующие процессы установления.

К вопросу о жестком и мягком режиме мы еще вернемся в дальнейшем, в связи с теорией бифуркации.

§ 4. Метод Пуанкаре

Мы рассмотрим здесь метод интегрирования нелинейных уравнений, данный Пуанкаре в его работах по небесной механике^{19, 10)}. Этот метод, несмотря на существенные ограничения, накладываемые и на выбор уравнения и на поставленные задачи, все же охватывает очень многие важные случаи и дает ответ на целый ряд существенных для практики вопросов.

Мы будем предполагать, что наше нелинейное уравнение (или система уравнений) зависит от некоторого параметра μ и при определенном значении $\mu = \mu_0$ (например при $\mu = 0$) обращается в уравнение или систему уравнений, решение которых нам хорошо известно, например в линейное уравнение или систему линейных уравнений.

Мы изучим нелинейное уравнение для значений μ , мало отличных от μ_0 . Далее мы будем рассматривать только периодические решения нелинейного уравнения (это ограничение также лежит в существе метода). Мы рассмотрим вопросы существования периодических решений и их устойчивости (в том определении понятия «устойчивости», которое дал Ляпунов).

Для определенности мы предположим, что наша система при $\mu = 0$ обращается в линейную с постоянными коэффициентами.

Ход рассуждений является, однако, вполне общим, применимым и при других предположениях.

Итак, мы будем рассматривать систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu), \quad (464)$$

где a, b, c и d — константы. Мы будем считать, что μ достаточно мало. Далее будем считать, что f_1 и f_2 являются голоморфными функциями x, y и μ , т. е. что их можно разложить в сходящиеся, кратные, степенные ряды по x, y, μ по крайней мере при малых значениях переменных.

Рассматривая нелинейные члены как результат малого искажения линейной системы (получающейся при $\mu = 0$), мы поставим своей задачей изучить, для каких исходных периодических решений линейной системы существуют периодические же (хотя бы и с другим периодом) решения нелинейной системы, обращающиеся в исходные при $\mu = 0$, и при каких условиях (т. е. при каких f_1 и f_2) эти периодические решения нелинейной системы будут устойчивыми.

Рассмотрим сперва случай $\mu = 0$. Уравнения переходят в

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (465)$$

Исключение y приводит к уравнению:

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0. \quad (466)$$

Необходимая предпосылка дальнейших рассмотрений состоит в том, что полученная линейная система (465) или уравнение (466) должна сама иметь периодические решения,

Это значит, что характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (467)$$

должно иметь чисто мнимые корни, т. е. должно быть:

$$(a + d) = 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| > 0. \quad (468)$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = +i\sqrt{ad - bc}; \\ \lambda_2 = -i\sqrt{ad - bc}; \end{array} \right\} \quad (469)$$

или, если ввести обозначение $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \lambda = \pm\sqrt{ad - bc}$, то можно сказать, что решение уравнения (466) имеет вполне определенную частоту $\omega_0 = \lambda$, определяемую самим уравнением. Фаза же и амплитуда периодического решения не задаются системой и определяются начальными условиями. Произвольность фазы очевидна: время не входит явно в (466), и поэтому начинать отсчет можно с любого момента t_0 . [Разность фаз между x и y и отношение амплитуд x и y вполне определены системой — достаточно подставить значение для x во второе из уравнений (465).]

Итак, мы убедились, что если выполнены условия (468), то наша система (465) имеет бесчисленное множество периодических решений, отличающихся одно от другого амплитудой и фазой. Эти решения имеют вид:

$$x = K \cos(it + \chi); \quad y = kK \sin(it + \chi + \chi'), \quad (470)$$

где k и χ' определяются через коэффициенты уравнений (465), а K и χ произвольны. В общем виде:

$$x = \varphi_0(t, \chi, K); \quad y = \psi_0(t, \chi, K), \quad (471)$$

где φ_0 и ψ_0 суть периодические функции t с периодом $\frac{2\pi}{\lambda}$, χ и K — произвольные постоянные. Такой общий вид будут иметь решения, если при $\mu = 0$ наша система становится нелинейной, но консервативной, соответствующей случаю центра.

Так как отсчет времени можно начинать с произвольного момента, то без всякого ограничения общности можно считать $\chi = 0$, и тогда решение нашей линейной системы может быть написано в виде:

$$x = x_0(t, K) = K \cos \lambda t; \quad y = y_0(t, K) = kK \sin(\lambda t + \chi'). \quad (472)$$

1. Идея метода Пуанкаре. Прежде чем перейти к систематическому изложению теории Пуанкаре, мы приведем вкратце основную идею и одновременно точно сформулируем математическую задачу. Такое введение поможет легче разобраться в дальнейшем изложении. Пусть нам известно решение уравнений (464) при $\mu = 0$, т. е., другими словами, решение уравнений (465). Пусть это решение

будет $x = x_0(t, K)$; $y = y_0(t, K)$. При $t = 0$ имеем: $x = x_0(0, K)$, $y = y_0(0, K)$, где K — «амплитуда». Слово «амплитуда» мы ставим в кавычках, имея в виду, что уравнения, получающиеся при $\mu = 0$, вообще говоря, могут быть и нелинейными, но консервативными. (В дальнейшем, однако, мы будем считать, что при $\mu = 0$ уравнения превращаются в линейные.) Рассмотрим теперь решения уравнений (464) при $\mu \neq 0$. Пусть это будут: $x = x(t, \mu, K)$, $y = y(t, \mu, K)$, принимающие значения $x = x_0(0, K) + \beta_1$, $y = y_0(0, K) + \beta_2$ при $t = 0$, β_1 и β_2 — некоторые достаточно малые величины. Пуанкаре ищет эти решения в виде степенных рядов по β_1 , β_2 и μ и доказывает их сходимость при достаточно малых значениях β_1 , β_2 и μ , равномерную внутри любого заданного конечного интервала времени $0 < t < t_1$ (этого доказательства сходимости мы не приводим). Коэффициенты этих степенных рядов суть функции времени. Эти функции можно вычислить, приравняв коэффициенты при равных степенях β_1 , β_2 и μ в выражениях, получившихся после подстановки в уравнения (464) вышеупомянутых степенных рядов. Для определения этих функций получатся линейные уравнения с определенными начальными значениями. Итак, для x и y мы получаем некоторые выражения:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K), \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K). \quad (473)$$

Посмотрим теперь, при каких условиях эти решения будут периодическими. Пусть период решений уравнений нулевого приближения (эти уравнения по нашему предположению линейны) будет T . Период решений нелинейных уравнений будет, вообще говоря, другой, но так как мы ищем решения, мало отличающиеся от решений линейных уравнений, то и период искомых решений должен быть близок к T . Поэтому мы можем положить, что новый период есть $T + \tau$, где τ — некоторая небольшая «поправка на период». Очевидно, что, для того чтобы решения (473) были периодическими с периодом $T + \tau$, нужно, чтобы x и y при $t = 0$ и при $t = T + \tau$ имели одинаковые значения. Действительно, если мы получим в момент $t = T + \tau$ те же начальные значения, как и в момент $t = 0$, то в силу теоремы Коши и автономности системы с момента $t = T + \tau$ мы получим повторение того, что происходило, начиная с $t = 0$, т. е. наши решения действительно будут периодическими с периодом $T + \tau$. Итак, условия периодичности сводятся к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \\ y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (474)$$

которые ввиду того, что T есть заданная величина, можно переписать так:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0. \quad (475)$$

Мы получили таким образом два уравнения с тремя неизвестными τ , β_1 , β_2 , но ввиду того, что уравнения автономны и фаза произвольна, мы можем одно из β зафиксировать, например положить β_2 равным нулю. Тогда

мы получим одно вполне определенное периодическое решение; после того как это периодическое решение будет найдено, прибавляя к нему произвольную фазу, мы снова восстановим потерянную произвольность.

Так как при $\mu=0$ мы должны получить периодические решения с периодом T , т. е. без поправки на период, то очевидно, что при $\mu=0$ и $\tau=0$ удовлетворяется условие периодичности и функции Φ и Ψ обращаются в нуль. Следовательно, μ есть общий множитель, и уравнения (475) можно переписать так:

$$\mu\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \mu\Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad (476)$$

и условия существования периодических решений будут иметь вид:

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0. \quad (477)$$

Для того чтобы наше решение было таково, чтобы при $\mu=0$, $\beta_1 = \tau=0$, нужно, чтобы эти уравнения не содержали свободных членов. Приравнявая нулю эти свободные члены, мы получим вполне определенные значения для амплитуды K и первого приближения поправки на частоту $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0}$. Следовательно, в рассматриваемом случае могут существовать периодические решения, но не со всякими значениями K , а только с вполне определенными. В соответствии с этим одна из основных задач может быть сформулирована следующим образом: при $\mu=0$ мы имеем бесчисленное множество периодических решений с произвольными амплитудами, но при $\mu \neq 0$ только вблизи некоторых вполне определенных амплитуд сохраняются периодические решения. Требуется найти значения этих амплитуд. При этом для решения вопроса о форме автоколебаний мы часто можем ограничиться линейным приближением, и знание нелинейности нам нужно только для того, чтобы определить величину амплитуды этих колебаний. Из условий для амплитуд, в случае если в уравнение движения входят какие-либо параметры, можно установить условия бифуркации между периодическими решениями, а также между периодическими решениями и положениями равновесия. Вторая часть задачи состоит в определении поправки на период τ . Во многих практически интересных случаях оказывается, что она в первом приближении равна нулю, т. е. что $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Тогда, если все таки оказывается нужным определить поправку на период, необходимо обратиться к следующим приближениям. Ввиду важности этого вопроса для теории колебаний мы этот вопрос затронем в дальнейшем.

2. Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным. Теперь мы переходим к систематическому изложению метода Пуанкаре. Мы рассмотрим одно дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, особенно интересное с точки зрения теории колебаний и ее практических применений, а именно:

$$\ddot{y} + y = \mu f(y, \dot{y}), \quad (478)$$

где μ — произвольный положительный параметр, который можно выбрать достаточно малым; $f(y, \dot{y})$ — функция, разлагаемая в ряд по степеням y и \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (478) имеет решение:

$$y = K \cos t. \quad (479)$$

Общим решением уравнения (478) при $\mu = 0$ будет, конечно, $y = K \cos(t + \delta)$, но вследствие автономности рассматриваемой системы мы можем δ дать вполне определенное значение, в частности положить его равным нулю. Если мы затем найдем близкое к нему решение при $\mu \neq 0$, то в этом решении можно затем снова положить фазу произвольной. Как сказано, не при всех значениях K будут существовать периодические решения уравнения (478); близкие к (479). Наша задача заключается в том, чтобы найти, при каких значениях K существуют такие периодические решения уравнения (478). Поясним нашу задачу с точки зрения представлений на фазовой плоскости. Так как уравнение (478) не зависит явно от времени, то фазовые траектории образуют систему непересекающихся кривых на плоскости y, \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (478) имеет решение:

$$y = K \cos t = \varphi_0(t), \quad (480)$$

где K — произвольная амплитуда (фазу мы не выписали по известным уже соображениям, но также и она остается произвольной). Решения при $\mu = 0$, если рассматривать эти решения на фазовой плоскости y, \dot{y} , представляют собой семейство концентрических кругов.

Решение (480) мы назовем порождающим решением. Для $\mu \neq 0$ мы будем искать такие периодические решения, которые при $\mu \rightarrow 0$ стремились бы к порождающим решениям $y = \varphi_0(t)$. Мы увидим, что не для всех значений K такие периодические решения существуют. Наша задача будет заключаться в том, чтобы найти K тех порождающих решений $\varphi_0(t)$, в области которых возникают периодические решения уравнения (478) при $\mu \neq 0$, а также определить изменение периода по сравнению с порождающим решением. Таким образом с точки зрения фазовой плоскости y, \dot{y} мы можем первую часть нашей задачи сформулировать так: при $\mu = 0$ интегральные кривые представляют собой семейство кругов; при $\mu \neq 0$ круги превращаются в спирали, и только некоторые из интегральных кривых остаются замкнутыми, т. е. превращаются в предельные циклы. Требуется определить значение K для тех кругов, вблизи которых возникают предельные циклы.

Как мы уже упоминали, существует доказательство того, что решения уравнения (478) можно представить в виде степенных рядов, составленных по степеням μ , и начальных значений $\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0)$ и $\beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0)$, абсолютно и равномерно сходящихся для достаточно малых значений μ, β_1, β_2 на любом заданном конечном промежутке времени t_1 . Следовательно, можем написать:

$$y = \varphi_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \dots, \quad (481)$$

где A, B, C, D, E, F — какие-то функции времени. Для определения этих функций мы поступим следующим образом. Продифференцировав ряд (481) по времени сначала один раз, а затем второй, мы получим выражения для \dot{y} и \ddot{y} также в виде рядов:

$$\dot{y} = \dot{\varphi}_0(t) + A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + D\dot{\beta}_{1\mu} + E\dot{\beta}_{2\mu} + F\dot{\mu}^2 + \dots, \quad (482)$$

$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}_0(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_{1\mu} + \ddot{E}\beta_{2\mu} + \ddot{F}\mu^2 + \dots \quad (483)$$

Так как мы рассматриваем значения y и \dot{y} , близкие соответственно к значениям $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$, то функцию $f(y, \dot{y})$ мы можем разложить в ряд Тейлора вблизи значений $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$. Применяя для приращений аргументов $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$ опять выражения в виде рядов (481) и (482), мы получим ряд Тейлора для функции $f(y, \dot{y})$ в таком виде:

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}) = & \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y=\varphi_0} \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + D\dot{\beta}_{1\mu} + E\dot{\beta}_{2\mu} + F\dot{\mu}^2 + \dots] + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{\dot{y}=\dot{\varphi}_0} \times \\ & \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + \dots] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{y=\varphi_0} \times \\ & \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dots]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} \right]_{\dot{y}=\dot{\varphi}_0} \times \\ & \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + \dots]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \right]_{y=\varphi_0, \dot{y}=\dot{\varphi}_0} \times \\ & \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + \dots] \times \\ & \times [A\dot{\beta}_1 + B\dot{\beta}_2 + \dot{C}\mu + \dots] \dots \end{aligned} \quad (484)$$

Подставляя выражения для y, \dot{y} и $f(y, \dot{y})$ в исходное уравнение (478) и приравнявая нулю сумму коэффициентов при членах, подобных относительно β_1, β_2 и μ , мы получим систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с периодической правой частью. Число этих уравнений зависит от того, до какого порядка малости мы будем вести разложение рядов. Если при разложении и подстановке ограничимся только членами не выше второго порядка малости, то мы получим шесть уравнений, определяющих шесть функций A, B, C, D, E, F :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + A &= 0, & \ddot{D} + D &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] A + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{A}, \\ \ddot{B} + B &= 0, & \ddot{E} + E &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] B + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{B}, \\ \ddot{C} + C &= f(y, \dot{y}), & \ddot{F} + F &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \dot{C}. \end{aligned} \right\} \quad (485)$$

Выражения $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, взятые в квадратные скобки, обозначают, что в эти выражения вместо y и \dot{y} должны быть подставлены $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$.

Кроме уравнений (485) мы еще должны знать начальные условия, которым подчиняются функции A, B, C, D, E, F . Сопоставляя выражения:

$$\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0)$$

и

$$\beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0) \quad (486)$$

с выражениями для y и \dot{y} (481) и (482), мы можем найти значения A, B, C, D, E, F и $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D}, \dot{E}, \dot{F}$ при $t=0$. Мы получим:

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1, \quad (487)$$

$$C(0) = \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = E(0) = \dot{E}(0) = F(0) = \dot{F}(0) = 0. \quad (488)$$

Уравнения (485) при начальных условиях (487) имеют решения:

$$A = \cos t,$$

$$B = \sin t.$$

Чтобы решить систему уравнений (486), нужно знать в общем виде решение уравнения $\ddot{x} + x = \Phi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям: $x = \dot{x} = 0$ при $t=0$.

Это решение, как известно, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^t \Phi(u) \sin(t-u) du, \\ \dot{x} &= \int_0^t \Phi(u) \cos(t-u) du. \end{aligned} \right\} \quad (489)$$

В том, что это действительно есть решение нашего уравнения, можно убедиться непосредственной подстановкой. Так как нам понадобятся в дальнейшем значения таких решений при $t=2\pi^1$, то мы их сразу приведем:

$$x(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \Phi(u) \sin u du, \quad \dot{x}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \Phi(u) \cos u du. \quad (490)$$

Зная общий вид решения (489), мы можем написать решения всех уравнений (485) и (486).

¹⁾ Напомним, что мы ввели для времени новый масштаб, приняв за единицу времени $\frac{T}{2\pi}$, где T — период собственных колебаний системы. Вследствие этого время у нас стало безразмерным и длительность одного периода колебаний выражается безразмерной величиной 2π .

Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \cos t, & \dot{A} &= -\sin t, \\
 B &= \sin t, & \dot{B} &= \cos t, \\
 C &= \int_0^t f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \sin(t-u) du, & \dot{C} &= \int_0^t f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \cos(t-u) du, \\
 D &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \cos u - \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin u \right] \sin(t-u) du, & \dot{D} &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \cos u - \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin u \right] \cos(t-u) du, \\
 E &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin u + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \cos u \right] \sin(t-u) du, & \dot{E} &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin u + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \cos u \right] \cos(t-u) du, \\
 F &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} C + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \dot{C} \right] \sin(t-u) du, & \dot{F} &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} C + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \dot{C} \right] \cos(t-u) du.
 \end{aligned} \right\} (491)$$

Заметим, что в этих формулах попережнему $\varphi_0 = K \cos t$, $\dot{\varphi}_0 = -K \sin t$. Так как в дальнейшем нам понадобятся значения этих функций при $t=2\pi$, то мы их сейчас выпишем:

$$\left. \begin{aligned}
 A(2\pi) &= 1, & \dot{A}(2\pi) &= 0, \\
 B(2\pi) &= 0, & \dot{B}(2\pi) &= 1, \\
 C(2\pi) &= - \int_0^{2\pi} f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \sin u du, & \dot{C}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \cos u du, \\
 D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin 2u + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin^2 u \right] du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \cos^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin 2u \right] du, \\
 E(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin 2u \right] du, & \dot{E}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin 2u + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \cos^2 u \right] du, \\
 F(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} C(u) \sin u - \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \dot{C}(u) \sin u \right] du, & \dot{F}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} C(u) \cos u + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \dot{C}(u) \cos u \right] du.
 \end{aligned} \right\} (492)$$

Упростим теперь несколько последние выражения для $D(2\pi)$, $\dot{D}(2\pi)$, $E(2\pi)$, $\dot{E}(2\pi)$. Для этого воспользуемся тождествами:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} f \cos u &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin 2u - \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \cos^2 u - \frac{f}{K} \sin u, \\
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} f \sin u &= \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \sin^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} \sin 2u + \frac{f}{K} \cos u.
 \end{aligned} \right\} (493)$$

Теперь соответствующие уравнения (492) можно привести к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} du - \frac{C(2\pi)}{K}, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\ E(2\pi) &= -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), & \dot{E}(2\pi) &= \frac{1}{K} C(2\pi). \end{aligned} \right\} \quad (494)$$

В частном случае при $C(2\pi) = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\ E(2\pi) &= -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (495)$$

Наконец, для частного случая, когда $C(2\pi) = \dot{C}(2\pi) = 0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0} du, \\ E(2\pi) &= 0, & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (496)$$

Заметим, что в последних формулах (496) величинам $D(2\pi)$ и $\dot{D}(2\pi)$ можно дать простую интерпретацию: это — постоянные члены в разложении в ряд Фурье функции $\frac{\partial f}{\partial \varphi_0}$ и соответственно $\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_0}$, помноженные на 2π . Величины же $-C(2\pi)$ и $\dot{C}(2\pi)$ суть коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$ разложения в ряд Фурье функции $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, помноженные на 2π . Если функция $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ есть многочлен, то эти величины можно вычислить непосредственно по тригонометрическим формулам (см. таблицу в конце книги).

Перейдем теперь к определению амплитуды K . При $t=0$ мы имеем:

$$\begin{aligned} y(0) &= \varphi_0(0) + \beta_1, \\ \dot{y}(0) &= \dot{\varphi}_0(0) + \beta_2. \end{aligned}$$

При $t=2\pi + \tau$, y и \dot{y} имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) &= \varphi_0(0) + \beta_1 + \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu), \\ \dot{y}(2\pi + \tau) &= \dot{\varphi}_0(0) + \beta_2 + \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (497)$$

Отсюда вытекают условия, необходимые для существования периодических решений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) &= 0, \\ \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (498)$$

Это — два уравнения с тремя неизвестными β_1 , β_2 и τ , причем β_1 и β_2 суть произвольные постоянные нашей задачи. Нас интересуют периодические решения, но если мы определим какое-нибудь одно периодическое решение, то их будет существовать бесконечное множество, отличающихся друг от друга на произвольную фазу. Поэтому, как уже указывалось, по существу задачи одно из β должно остаться совершенно произвольным. Можно, например, не нарушая общности, одно из них положить равным нулю. Если при этом уравнения (498) можно разрешить относительно τ и другого β таким образом, что при $\mu=0$, $\tau=\beta=0$, то наша задача решена. Если этого не удастся сделать, то в запасе остается еще один вариант, а именно, положить равным нулю другое β . Мы сейчас убедимся, что в нашей задаче предположение $\beta_2=0$ приводит к положительным результатам. Если бы мы исходили из решения $\varphi_0 = K \sin t$, т. е. полагали, что в порождающем решении $\delta = -\frac{\pi}{2}$ (а не нуль), то пришлось бы воспользоваться вторым вариантом, т. е. положить $\beta_1=0$.

Составим уравнения (498) сначала в общем виде, не полагая β_2 равным нулю. Для этого мы должны прежде всего составить выражения $y(2\pi + \tau)$ и $\dot{y}(2\pi + \tau)$. Поскольку τ мало по сравнению с 2π , мы можем разложить y и \dot{y} в ряды вблизи значения 2π .

Ограничиваясь членами первого и второго порядка малости, мы получим:

$$y(2\pi + \tau) = y(2\pi) + \tau \dot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(2\pi) + \dots, \quad (499)$$

$$\dot{y}(2\pi + \tau) = \dot{y}(2\pi) + \tau \ddot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \dddot{y}(2\pi) + \dots \quad (500)$$

Значения $y(2\pi)$, $\dot{y}(2\pi)$, $\ddot{y}(2\pi)$ и т. д. мы можем определить, пользуясь их выражениями при помощи рядов (481), (482), (483), подставляя вместо функций A , B , C и т. д. их значения при $t=2\pi$, т. е. $A(2\pi)$, $B(2\pi)$ и т. д.

Отбрасывая члены более чем второго порядка малости (порядков малости τ не ниже μ), получим:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) = & \varphi_0(2\pi) + A(2\pi)\beta_1 + B(2\pi)\beta_2 + C(2\pi)\mu + \\ & + D(2\pi)\beta_1\mu + E(2\pi)\beta_2\mu + F(2\pi)\mu^2 + \tau\dot{\varphi}_0(2\pi) + \\ & + \tau\dot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau\dot{B}(2\pi)\beta_2 + \tau\dot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\varphi}_0(2\pi) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(2\pi + \tau) = & \dot{\varphi}_0(2\pi) + \dot{A}(2\pi)\beta_1 + \dot{B}(2\pi)\beta_2 + \dot{C}(2\pi)\mu + \\ & + \dot{D}(2\pi)\beta_1\mu + \dot{E}(2\pi)\beta_2\mu + \dot{F}(2\pi)\mu^2 + \tau\ddot{\varphi}_0(2\pi) + \\ & + \tau\ddot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau\ddot{B}(2\pi)\beta_2 + \tau\ddot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2}\dddot{\varphi}_0(2\pi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (502)$$

Подставляя в эти выражения значения φ_0 , A и B и их производных при $t=2\pi$ и составляя уравнения (498), получим:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) - y(0) = & -K \frac{\tau^2}{2} + \tau \beta_2 + C(2\pi) \mu + \dot{C}(2\pi) \tau \mu + \\ & + D(2\pi) \beta_1 \mu + E(2\pi) \beta_2 \mu + F(2\pi) \mu^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (503)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(2\pi + \tau) - \dot{y}(0) = & -K\tau + \tau \beta_2 + \dot{C}(2\pi) \mu + \ddot{C}(2\pi) \tau \mu + \\ & + \dot{D}(2\pi) \beta_1 \mu + \dot{E}(2\pi) \beta_2 \mu + \dot{F}(2\pi) \mu^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (504)$$

Из этих двух уравнений может быть определено τ и одно из двух β , если другому β приписано какое-либо определенное значение. Уравнения (503) и (504) содержат члены как первого, так и второго порядка малости. Отбрасывая эти последние, мы можем сразу получить выражение первого приближения для τ . Действительно, при отбрасывании малых второго порядка малости уравнение (504) дает:

$$\tau = \mu \frac{\dot{C}(2\pi)}{K} = \frac{\mu}{K} \int_0^{2\pi} f'(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \quad (505)$$

или, по (425):

$$\tau = \mu 2\pi \Psi(K) \quad (505a)$$

(предполагается, что $K \neq 0$). Уравнение (503) содержит только один член первого порядка малости, поэтому при отбрасывании малых второго порядка это уравнение дает:

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0 \quad (506)$$

или, по (424):

$$\Phi(K) = 0. \quad (507)$$

Это уравнение определяет амплитуды тех кругов, вблизи которых при $\mu \neq 0$ возникают предельные циклы. Заметим, что приравнивание нулю $C(2\pi)$ эквивалентно приравниванию нулю коэффициента Фурье при $\sin t$ в разложении функции $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$. Положим теперь $\beta_2 = 0$, тогда уравнение (503) может быть разрешено относительно β_1 , если только $D(2\pi) \neq 0$. Таким образом, если выражения $\dot{C}(2\pi) \neq 0$ и $D(2\pi) \neq 0$, то задача может быть решена намеченным путем. Если же оба эти выражения или одно из них равно нулю, то требуются дальнейшие исследования. Но в уравнениях, описывающих практически важные случаи, часто бывает, что $\dot{C}(2\pi) = 0$. Тогда, чтобы вычислить поправку на период, которая представляет собой величину второго порядка малости, приходится находить еще и следующее приближение. Итак, положим $\dot{C}(2\pi) = 0$ и $\tau = \chi \mu^2$ и вычислим χ . Мы можем попреж-

нему положить $\beta_2 = 0$, и уравнения (503) и (504) принимают вид [так как в силу (494) $E(2\pi) = 0$]:

$$\begin{aligned} D(2\pi)\beta_1 + F(2\pi)\mu &= 0, \\ -K\mu + \dot{D}(2\pi)\beta_1 + \dot{F}(2\pi)\mu &= 0, \end{aligned}$$

откуда, если $K \neq 0$ и $D(2\pi) \neq 0$, мы можем определить β_1 и μ :

$$\beta_1 = -\frac{F(2\pi)\mu}{D(2\pi)}, \quad (508)$$

$$\mu = \frac{\dot{F}(2\pi)D(2\pi) - \dot{D}(2\pi)F(2\pi)}{D(2\pi)K}. \quad (509)$$

Подставляя найденные нами значения A , B , C и β_1 в выражение для y (481) и возвращаясь снова к произвольному отсчету времени (для чего достаточно везде заменить t на $t + \delta$), мы можем написать периодическое решение нашего уравнения (478) с точностью до величины порядка μ :

$$y = K \cos(t + \delta) + \mu \left[\int_0^t f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \sin(t - u + \delta) du - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos(t + \delta) \right], \quad (510)$$

где K определяется с точностью до μ из соотношения $C(2\pi) = 0$. Напомним, что это решение получено в предположении, что $\dot{C}(2\pi) = 0$. В этом случае первое приближение имеет период 2π , в то время как решение (510) должно иметь период, несколько отличный от 2π . Это обеспечивается тем, что выражение (510) есть разложение по степеням μ такого ряда Фурье, у которого не только амплитуда, но и периоды зависят от μ .

Действительно, рассмотрим ряд Фурье:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) \cos k\omega(\mu)t + B_k(\mu) \sin k\omega(\mu)t] \quad (511)$$

и разложим его в ряд по степеням μ ; разложение это имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(0) \cos k\omega(0)t + B_k(0) \sin k\omega(0)t] + \\ &+ \mu \sum_{k=0}^{\infty} [A'_k(0) \cos k\omega(0)t + B'_k(0) \sin k\omega(0)t - \\ &- A_k(0)\omega'(0)kt \sin k\omega(0)t + B_k(0)\omega'(0)kt \cos k\omega(0)t] + \mu^2 \sum \dots \quad (512) \end{aligned}$$

Несмотря на то, что тригонометрические функции входят только с периодом $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, y есть периодическая функция с периодом, не рав-

ным $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, если $\mu \neq 0$. Это изменение периода получается вследствие того, что в разложение входят вековые члены, т. е. члены, содержащие t в нетригонометрическом виде. Подобным же образом и в решении (510), начиная со следующего приближения, начнут появляться вековые члены, которые не нарушат периодичности функции y , а лишь немного изменят ее период. Можно написать полученное периодическое решение и без вековых членов, если писать сразу все тригонометрические функции с правильными периодами, для чего нужно в аргументы всех тригонометрических функций ввести поправку на частоту. Вследствие малости ее можно считать равной поправке на период, деленной на 2π и взятой с обратным знаком. После этого решение принимает вид:

$$y = K \cos \left[\left(1 - \frac{x\mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \right] + \left. \begin{aligned} & \left(1 - \frac{x\mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \\ & + \mu \left\{ \int_0^{\dots} \left[f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin \left[\left(1 - \frac{x\mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta - u \right] du - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos \left[\left(1 - \frac{x\mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \right] \right\} + \dots \right\} \quad (512a) \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что в силу общей теории (см. гл. V, § 8) условие устойчивости по Ляпунову рассматриваемого решения имеет вид:

$$\int_0^{2\pi} f'_y(\varphi, \dot{\varphi}) dt < 0 \quad (513)$$

или, ограничиваясь первым членом разложения по μ :

$$2\pi \Phi'(K_1) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} dt < 0. \quad (513a)$$

Выражению, стоящему в правой части последнего неравенства, не трудно дать простую интерпретацию: это — постоянный член (умноженный на 2π) в разложении в ряд Фурье функции:

$$f'_y(K_1 \cos t, -K_1 \sin t),$$

где K_1 — соответствующий корень уравнения (507).

§ 5. Применение метода Пуанкаре

1. Ляпуновский генератор с мягким режимом. Для иллюстрации метода Пуанкаре мы исследуем уравнение, к которому приводит рассмотрение обыкновенного лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 310) при мягком режиме установления. Как

мы убедились, в этом случае можно ограничиться кубической характеристикой лампы и прямо воспользоваться уже выведенным нами уравнением (452). Но квадратичный член характеристики мы опустим, так как в случае колебаний, близких к синусоидальным, он не играет роли. В таком случае для «безразмерного напряжения» на обкладках конденсатора мы получим уравнение:

$$\ddot{v} + v = \mu (\alpha' - 3\gamma' v^2) \dot{v}. \quad (514)$$

Здесь точки обозначают дифференцирование по «безразмерному» времени; остальные обозначения расшифровываются соотношениями (452a) и (452b).

Уравнение (514) как раз такого типа, для которого нами был развит метод Пуанкаре. Поэтому мы дальше можем действовать по шаблону. В первом приближении решения уравнения (514) имеют вид:

$$\varphi_0 = K \cos t, \quad \dot{\varphi}_0 = -K \sin t, \quad (515)$$

причем K определяется из соотношения:

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \left[-\alpha' K \sin u - \gamma' \frac{d}{du} (K^3 \cos^3 u) \right] \sin u \, du = 0. \quad (516)$$

Это соотношение дает:

$$2\pi \left[\alpha' K - \frac{3\gamma' K^3}{4} \right] = 0, \quad \text{откуда } K^2 = \frac{4\alpha'}{3\gamma'} = \frac{4a}{3\gamma}, \quad (517)$$

так как $a = \mu\alpha'$, $\gamma = \mu\gamma'$ (см. стр. 449).

Легко убедиться, что $C(2\pi) = 0$, т. е. что в первом приближении нет поправки на частоту, так как выражение

$$\left[-\alpha' K \sin u - \gamma' \frac{d}{du} (K^3 \cos^3 u) \right] \cos u$$

не содержит неперіодических членов, и поэтому интеграл этого выражения, взятый от 0 до 2π , даст нуль. Далее:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = 6\gamma' \varphi_0 \dot{\varphi}_0 = 3\gamma' K^2 \sin 2t \text{ и } \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} = (\alpha' - 3\gamma' \varphi_0^2) = \alpha' - 3\gamma' K^2 \cos^2 t.$$

Из этих выражений легко можно определить $D(2\pi)$ и $\dot{D}(2\pi)$. Именно, мы получим:

$$D(2\pi) = 2\pi \left(\alpha' - \frac{3\gamma' K^2}{2} \right) = -2\pi\alpha'; \quad \dot{D}(2\pi) = 0. \quad (518)$$

По выражению (509) находим поправку на период:

$$\tau = \chi\mu^2 = \frac{\dot{D}(2\pi)}{K} \mu^2.$$

Для нахождения поправки на период остается вычислить $\dot{P}(2\pi)$. Это вычисление дает:

$$\dot{P}(2\pi) = \frac{9\gamma'^2 K^5 \pi}{16} = 2\pi a'^2 \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} = \pi a'^2 K,$$

и поправка на период окончательно выразится так:

$$\tau = \pi \mu^2 a'^2 = \pi a^2. \quad (519)$$

Для того чтобы написать периодическое решение с точностью до μ , нужно вычислять еще коэффициент $C(t)$. Его вычисление дает:

$$C(t) = -\frac{3\gamma' K^3}{32} \sin 3t + \frac{15\gamma' K^3}{32} \sin t = -\frac{a'}{4} \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} \sin 3t + \frac{5a'}{4} \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} \sin t. \quad (520)$$

Периодическое решение в виде (512а), т. е. без вековых членов, с точностью до μ может быть записано так:

$$v = 2 \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} \cos \left[\left(1 - \frac{\mu^2 a'^2}{2}\right) t + \delta \right] + \mu \left\{ -\frac{a'}{4} \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} \sin 3 \left[\left(1 - \frac{\mu^2 a'^2}{2}\right) t + \delta \right] + \frac{5a'}{4} \sqrt{\frac{a'}{3\gamma'}} \sin \left[\left(1 - \frac{\mu^2 a'^2}{2}\right) t + \delta \right] \right\} + \mu^2 \{ \dots \} + \dots \quad (521)$$

В большинстве случаев для практики главный интерес представляет только выражение для амплитуды (516). Второе приближение мы вычислили для того, чтобы, с одной стороны, показать, как производить вычисление, с другой, — чтобы подчеркнуть, что решение принципиально содержит высшие гармоники, которыми при линейном рассмотрении всегда пренебрегают.

Выясним теперь, устойчиво ли найденное нами периодическое движение. Чтобы движение было устойчивым, нужно, чтобы постоянный коэффициент Фурье функции, стоящей множителем при v в правой части уравнения (514), при подстановке синусоидального решения оказался менее нуля, т. е. чтобы $a' - \frac{3\gamma' K^2}{2} < 0$ или $K^2 > \frac{2a}{3\gamma'}$. Но, как мы

знали, квадрат амплитуды нулевого приближения $K^2 = \frac{4a}{3\gamma'}$. Следовательно, условие устойчивости всегда выполняется (так как $a > 0$, $\gamma' > 0$), и, значит, найденное нами периодическое решение всегда устойчиво.

При рассмотрении лампового генератора мы представляли характеристики лампы в виде полиномов. Однако иногда бывает целесообразно представлять характеристики в виде иных аналитических выражений. Так, например, инж. Домбровский предложил изображать характеристику лампы в виде синуса, взятого за полпериода. (При помощи такой характеристики им был рассмотрен диатропный генератор). Вычисления в этом случае получаются, пожалуй, даже более простыми, так как разложение синуса от синуса в ряд Фурье может быть легко выполнено при помощи бесселевых функций. Рассмотрение таких более общих типов характеристик наряду с полиномами интересно уже

потому, что можно проверить, какие свойства специфичны для полиномов и какие специфичны для существа задачи.

2. Значение малого параметра μ . Дифференциальное уравнение всякой динамической системы содержит ряд параметров, имеющих определенный физический смысл (например L, R, C, S и т. д.). Обычно бывает целесообразно вместо этих параметров ввести новые, так называемые «безразмерные» параметры (точно так же часто бывает целесообразно вводить безразмерные переменные), представляющие собой некоторые определенные комбинации «размерных» физических параметров. Желательно, для упрощения математического исследования, свести число этих безразмерных параметров к наименьшему числу независимых. Если один из этих параметров может быть выбран таким образом, чтобы при значении параметра, равном нулю, система превращалась в линейный гармонический осциллятор, то этот параметр может служить с математической точки зрения тем малым параметром μ , по которому производятся разложения в ряды в теории Пуанкаре и малостью которого приходится распоряжаться при обосновании метода ван-дер-Поля.

Пуанкаре доказал, что ряды, представляющие периодическое решение, в его теории обладают отличным от нуля радиусом сходимости μ_0 , так что для всех $\mu \leq \mu_0$ эти ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Это значит, что в таком случае для всех $\mu \leq \mu_0$ существует периодическое решение, представляемое суммами соответствующих рядов¹⁾.

Однако о характере решения, например о близости решения к синусоидальному, эта сходимость еще ничего не говорит, на основании теории Пуанкаре мы можем лишь утверждать, что в этом случае всегда можно выбрать столь малое μ , чтобы решение было сколь угодно близко к синусоидальному.

Обычно при рассмотрении физических задач мы пользуемся нулевым приближением ($x = K \cos t$, $\Phi(K) = 0$); иногда кроме нулевого приближения нас интересуют так называемая первая поправка на частоту (пропорциональная μ или μ^2) и выражение второго члена (пропорционального μ) в разложении периодического решения. Поэтому нас в первую очередь интересуют такие вопросы: насколько амплитуда нулевого приближения отличается (при заданном μ) от амплитуды основного тона точного решения, насколько первая поправка на частоту отличается от истинной поправки на частоту, насколько истинная несинусоидальность (определенная, например, при помощи так называемого клир-фактора) отличается от несинусоидальности, присущей первому приближению, и т. д. Если мы при этом зададимся, исходя из физической сущности задачи, допустимой погрешностью (например выраженной в процентах), то это даст нам теоретическую возможность определить верхнюю границу для μ , исходя из соображений о физической пригодности нулевого приближения, первого приближения и т. д. Так как, с другой стороны, μ есть определенная комбинация

¹⁾ Заметим, что расходимость рядов по μ для $\mu > \mu_0$ еще, вообще говоря, ничего не говорит о несуществовании периодического решения для $\mu > \mu_0$.

физических параметров, то в реальной системе μ имеет совершенно определенное значение, и мы не можем по произволу считать его сколь угодно малым, не теряя физического смысла задачи. Пусть, например, по самому физическому смыслу поставленной задачи $\mu_1 < \mu$. Тогда возникают следующие два вопроса: во-первых, будет ли μ_1 таким значением, при котором сойдется ряды Пуанкаре, и, во-вторых, будет ли μ_1 таким значением, при котором нулевое или первое приближение дает требуемую точность. При отрицательном ответе на первый вопрос мы должны отказаться от использования метода Пуанкаре; при отрицательном ответе на второй вопрос, если на первый вопрос ответ положительный, возникает необходимость пользоваться дальнейшими приближениями. Однако ответы на эти вопросы, при современном положении теории, затруднительны, и перед теорией стоит задача выработать для ответа на них достаточно эффективные методы¹⁾.

Заметим, что даже для одного и того же физического прибора, например для катодного генератора, выбор μ может быть сделан различным образом, в зависимости от условий задачи.

Наконец, сделаем еще следующее замечание. В наших рассуждениях мы предполагали, что $f(x, x)$ — голоморфная функция x и x . Однако иногда бывает весьма выгодно пользоваться так называемыми ломаными характеристиками (например характеристика твердого трения, Γ -характеристика генератора и т. д.), которые, очевидно, суть функции неголоморфные. В этом случае целесообразно поступать так: рассматривать неголоморфную функцию как предел некоторой голоморфной; провести вычисление всех нужных интегралов (определяющих амплитуды, устойчивость и т. д.), перейдя к пределу (что обычно упрощает выкладки), а результаты истолковать не для ломаных характеристик (что, вообще говоря, было бы неверно), а для близких к ним голоморфных.

§ 6. ЛАМПОВЫЙ ГЕНЕРАТОР В СЛУЧАЕ ЛОМАНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим с помощью метода малого параметра случай, когда характеристика лампы изображается в виде двух прямолинейных отрезков — горизонтального и наклонного. Мы убедимся, что в случае такой «односторонней», вернее, ограниченной только с одной стороны характеристики при известных условиях возможны устойчивые колебания.

1) Грубая оценка μ_0 может быть сделана по Пуанкаре. Однако эта оценка весьма груба и часто не имеет практического значения.

Физики иногда, для грубой оценки погрешности нулевого приближения, поступают следующим нестрогим образом: вычисляют численную величину выражения

$$\mu \max \left\{ \frac{f(K_1 \cos u, -K_1 \sin u)}{K_1} \right\} \text{ для значений параметров, соответствующих физи-$$

ческим условиям задачи, и для интересующей нас амплитуды нулевого приближения K_1 . Если эта величина равна, например, $1/10$, то считают, что амплитуда нулевого приближения дает амплитуду основного тона с точностью порядка 10% и т. д. Легко видеть, что и эта оценка для многих случаев не имеет практического значения. [Аналог. прием см. А. Н. Крылов (118), стр. 44.]

Пусть характеристика лампы имеет вид, изображенный на рис. 314. Параллельно мы будем рассматривать и случай смещенной характеристики, изображенной на рис. 315, т. е. будем рассматривать случаи как положительного, так и отрицательного b . Для лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки уравнения для напря-

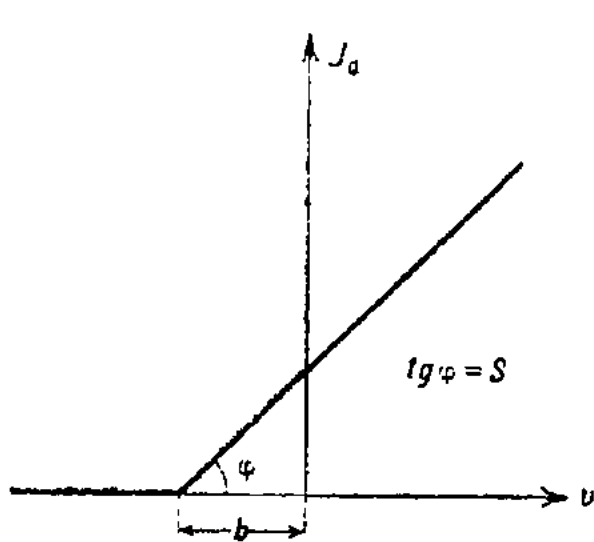


Рис. 314.

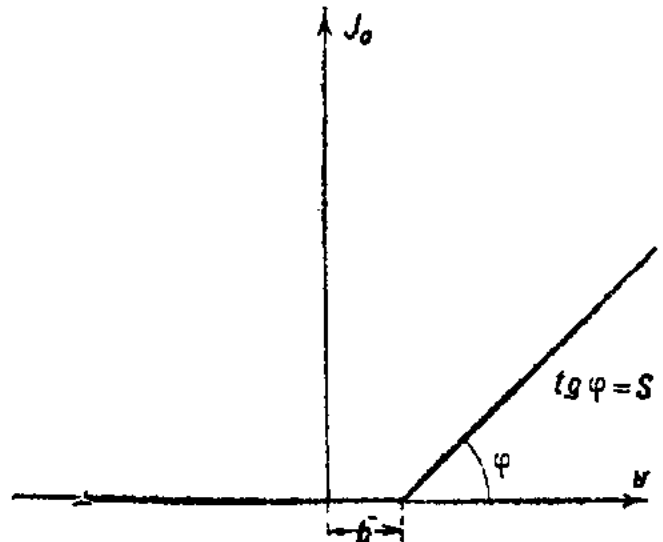


Рис. 315.

жения на конденсаторе («безразмерного») будут иметь вид (см. уравнения (514) и (515)):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} + v &= -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} && \text{при } v < b, \\ \ddot{v} + v &= -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} + \frac{MS}{\sqrt{LC}} \dot{v} && \text{при } v > b. \end{aligned} \right\} \quad (522)$$

Очевидно, что условия самовозбуждения будут следующие:

при $b > 0$ нет самовозбуждения,

при $b < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{нет самовозбуждения, если } RC > MS, \\ \text{есть самовозбуждение, если } RC < MS. \end{array} \right.$

Решение можно взять в виде:

$$v = K \sin t. \quad (523)$$

K мы будем считать положительным; так как фаза произвольна, то это не нарушает общности. Амплитуда K определится из условия $C(2\pi) = 0$. При этом для определения $C(2\pi)$ нужно брать разные значения функции $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ для $b > 0$ и $b < 0$ в соответствии с обоими уравнениями (522). В конечном счете мы получаем:

$$C(2\pi) = -\frac{\pi R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{MS}{\sqrt{LC}} \int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 0, \quad (524)$$

где ξ есть значение t при $v = b$, т. е.

$$\xi = \arcsin \frac{b}{K}, \quad (525)$$

причем для ξ нам интересны только значения, заключенные в пределах $-\frac{\pi}{2} < \xi < +\frac{\pi}{2}$. Так как K положительно, то нас интересуют только такие значения ξ , которые одного знака с b . Поэтому, если $b > 0$, то ξ лежат в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, если $b < 0$, то в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до 0. Амплитуда колебаний хотя и не входит явно в условие (524), но она не произвольна, а определяется из соотношения (525):

$$K = \frac{b}{\sin \xi}, \quad (526)$$

где ξ определится из условия (524).

После интегрирования условие (524) примет такой вид:

$$\sin 2\xi = -2\pi \frac{RC}{MS} + \pi - 2\xi \quad (527)$$

Чтобы решить это уравнение, рассмотрим (рис. 316) пересечения кривой

$$y = \sin 2\xi \quad (528)$$

и прямой

$$y = -2\pi \frac{RC}{MS} + \pi - 2\xi \quad (529)$$

Максимальный отрицательный наклон кривой (528) есть -2 ; уравнение (529) определяет прямую наклона -2 , сдвинутую от начала координат на расстояние $\frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS}$, отсчитанное вдоль оси ξ .

Для случая $b > 0$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS} < \frac{\pi}{2}, \quad (530)$$

для случая $b < 0$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS} < 0. \quad (531)$$

В случае если неравенство (530) или соответственно (531) не удовлетворяется, периодических решений нет. Неравенство (530) выполняется в том и только в том случае, если $RC < \frac{MS}{2}$; неравенство (531) выполняется только в том случае, если $\frac{MS}{2} < RC < MS$. Итак, если, при $b > 0$, $RC < \frac{MS}{2}$ или, при $b < 0$, $\frac{MS}{2} < RC < MS$, то существует один предельный цикл (эти случаи изображены соответственно на рис. 317 и 318).

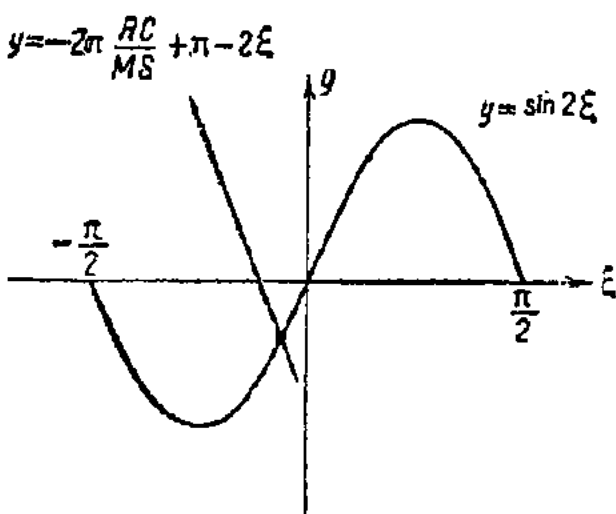


Рис. 316.

Если, при $b > 0$, $RC > \frac{MS}{2}$, а при $b < 0$, $RC < \frac{MS}{2}$ или $RC > MS$, то предельных циклов нет. Заметим (это нам понадобится для дальнейшего), что если ξ_0 , корень уравнения (527), положительно ($b > 0$), то

$$\xi_0 < \frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS}, \tag{532}$$

т. е. меньше расстояния точки пересечения прямой (529) с осью абсцисс от начала координат. Если ξ_0 отрицательно ($b < 0$), то

$$\xi_0 > \frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS}. \tag{533}$$

Это следует из того, что наклон кривой (529) отрицателен.

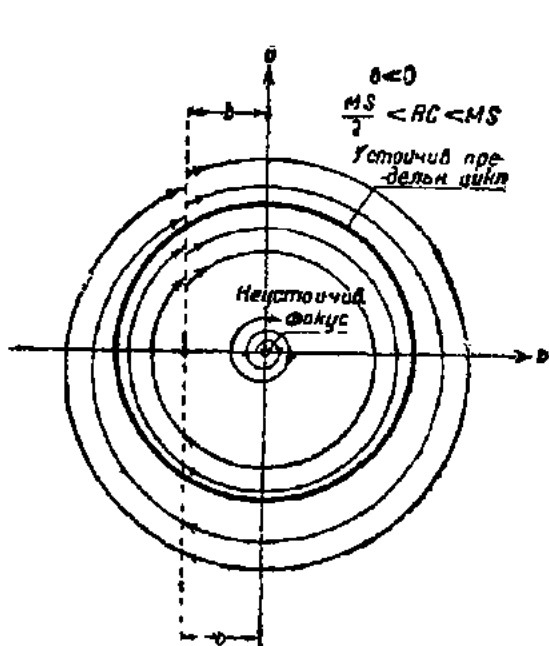


Рис. 317.

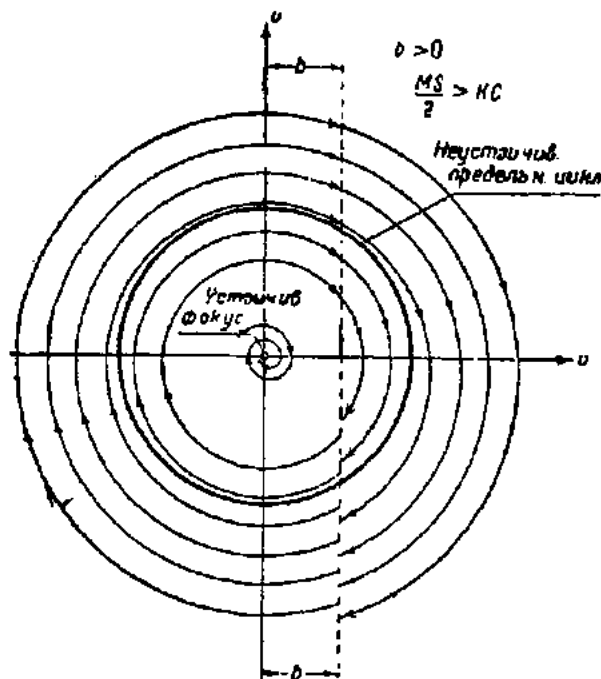


Рис. 318.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденных периодических движений. Условие устойчивости заключается в том, чтобы постоянный член Фурье разложения функции f'_i ($K \sin t$, $-K \cos t$) был меньше нуля, т. е. чтобы

$$-\pi R \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{MS}{\sqrt{LC}} \int_{\xi_0}^{\frac{\pi}{2}} dt < 0,$$

откуда следует:

$$-RC + \frac{MS}{2} - \frac{MS \xi_0}{\pi} < 0 \tag{534}$$

или

$$\xi_0 > \frac{\pi}{2} - \pi \frac{RC}{MS}.$$

Из неравенств (532) и (533) следует, что если $b < 0$, то это условие выполняется, если $b > 0$, — не выполняется. Следовательно, в случае $b < 0$ предельный цикл устойчив (рис. 317), в случае $q > 0$ — неустойчив (рис. 318). Из формулы (525) видно, что K исчезает вместе с b ; кроме того, при $\xi = 0$ ($RC = \frac{MS}{2}$) предельный цикл уходит в бесконечность. Минимальная величина $K = b$ (при этом $\sin \xi = 1$ и $RC = MS$). Таким образом мы видим, что сразу появляется предельный цикл конечных размеров.

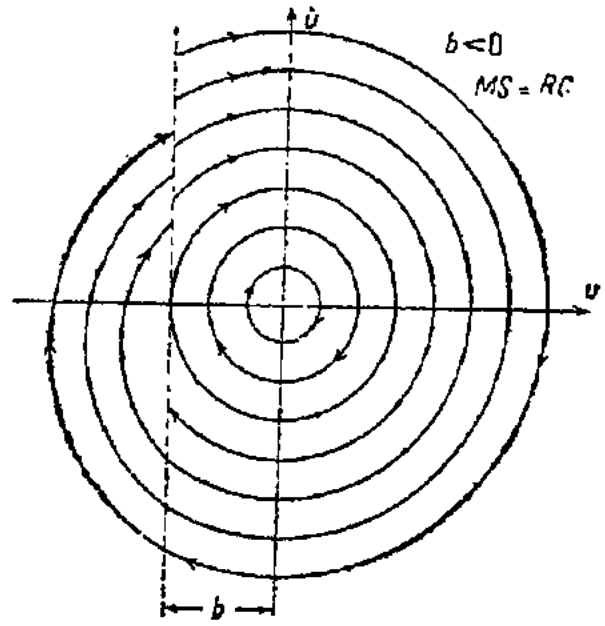


Рис. 319.

В момент появления цикла (т. е. когда $RC = MS$) возможны любые амплитуды меньше b , т. е. внутри круга b мы имеем случай центра (рис. 319). Полученные результаты легко применить к «обратным» характеристикам, изображенным на рис. 320 и 321. Для удобства расстояние от начала координат мы обозначим через b со знаком минус.

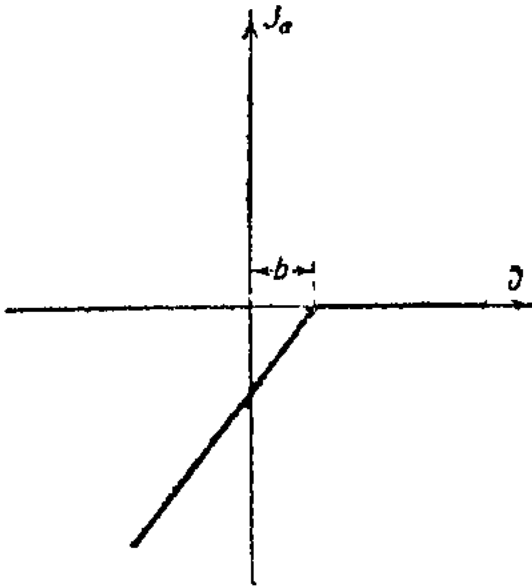


Рис. 320.

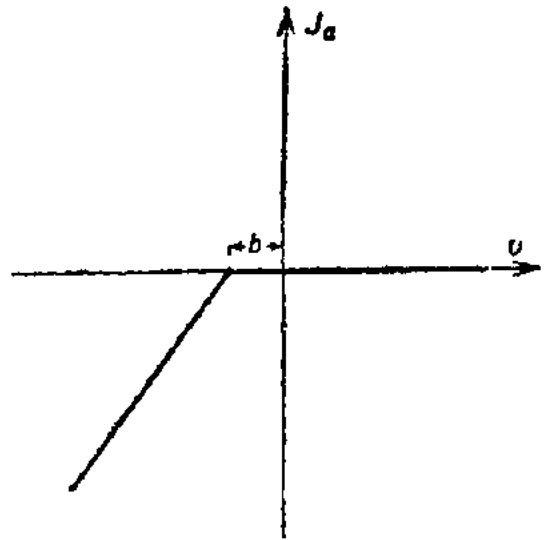


Рис. 321.

Уравнения имеют тот же вид, что и прежде, но границы их применения стали другими:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} + v &= -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} && \text{при } v > -b, \\ \ddot{v} + v &= -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} + \frac{MS}{\sqrt{LC}} v && \text{при } v < -b. \end{aligned} \right\} \quad (535)$$

Делая замену $v = -v_1$, получим:

$$\ddot{v}_1 + v = -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} \quad \text{при } v_1 < b,$$

$$\ddot{v}_1 + v = -R \sqrt{\frac{C}{L}} \dot{v} + \frac{MS}{\sqrt{LC}} \dot{v} \quad \text{при } v_1 > b;$$

таким образом мы получаем случай уравнения (522), который мы только что исследовали. Поэтому полученные нами результаты могут быть применены без всяких изменений и к случаю характеристик, ограниченных сверху.

Практический интерес рассмотренных случаев заключается не в том, что существуют реально характеристики, ограниченные только с одной стороны, — таких характеристик, конечно, не существует. Но если рабочая точка расположена вблизи одного из загибов характеристики (все равно, до загиба или после него), то при известных условиях оказывается, что дальнейшие части характеристики, в том числе и другой загиб, не влияют на характер процесса. Поэтому, рассматривая характеристику, ограниченную только с одной стороны, мы можем в некоторых случаях получить ответ на интересующие нас вопросы, в частности объяснить существование автоколебаний в системе.

§ 7. Влияние сеточного тока на работу лампового генератора

Рассматривая различные ламповые схемы, мы всегда предполагали, что в цепи сетки лампы ток отсутствует. Это предположение существенно упрощает задачу, и вместе с тем довольно часто можно считать,

что оно с достаточной точностью оправдывается на опыте. Однако в других случаях, также имеющих практический интерес, во время работы генератора в цепи сетки течет ток, имеющий существенную величину. Поэтому интересно проследить, какое влияние на работу лампового генератора может оказывать ток в цепи сетки. Однако учет сеточных токов, вообще говоря, очень существенно усложняет задачу, именно, приводит к повышению

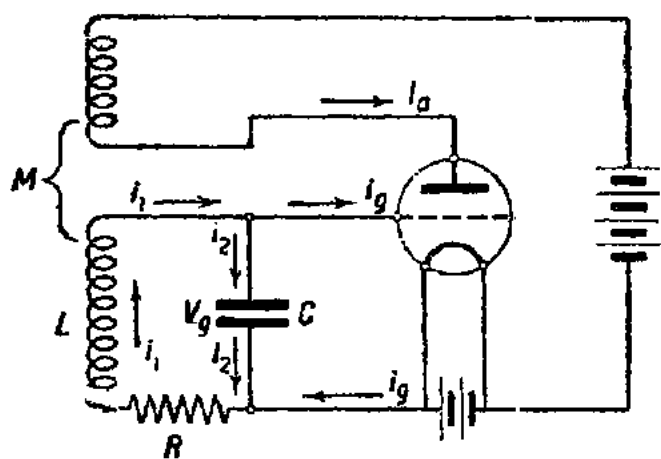


Рис. 322.

порядка дифференциального уравнения, описывающего данную ламповую схему. Поэтому, ограничив свою задачу рассмотрением схем, описываемых одним дифференциальным уравнением второго порядка, мы лишены возможности поставить вопрос об учете сеточного тока в общем виде. Но в некоторых частных случаях оказывается возможным ввести в рассмотрение сеточный ток, не повышая при этом порядка уравнений, описывающих систему. Так, например, оказывается воз-

возможным учесть влияние сеточного тока в ламповом генераторе с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 322).

При рассмотрении мы будем пренебрегать реакцией анода и сделаем простейшее предположение относительно формы характеристик анодного и сеточного токов. Именно, мы будем считать, что как анодный, так и сеточный токи могут быть заданы в виде полиномов третьей степени от напряжения на сетке V_g :

$$I_a = I_{a0} + S_1 V_g + S_2 V_g^2 - S_3 V_g^3, \quad (536)$$

$$i_g = i_{g0} + p_1 V_g + p_2 V_g^2 + p_3 V_g^3. \quad (537)$$

Применяя обозначения, приведенные на рис. 301, и пользуясь законами Кирхгофа, получим:

$$\left. \begin{aligned} i_g = i_1 - i_2; \quad V_g = \frac{1}{C} \int i_2 dt; \quad i_2 = C \frac{dV_g}{dt} \\ L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_2 dt - M \frac{dI_a}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (538)$$

Исключая из этих уравнений i_1 , получим:

$$L \left(\frac{di_g}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + R(i_g + i_2) + V_g - M \frac{dI_a}{dt} = 0,$$

или

$$L \left(p_1 \frac{dV_g}{dt} + p_2 \frac{d(V_g^2)}{dt} + p_3 \frac{d(V_g^3)}{dt} + C \frac{d^2 V_g}{dt^2} \right) +$$

$$+ R \left(i_{g0} + p_1 V_g + p_2 V_g^2 + p_3 V_g^3 + C \frac{dV_g}{dt} \right) +$$

$$+ V_g - M \left(S_1 \frac{dV_g}{dt} + S_2 \frac{d(V_g^2)}{dt} + S_3 \frac{d(V_g^3)}{dt} \right) = 0$$

и, наконец:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_g}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C} \right] \frac{dV_g}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{Rp_1}{LC} \right) V_g - \left[\frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C} \right] \frac{d(V_g^2)}{dt} + \\ + \left[\frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C} \right] \frac{d(V_g^3)}{dt} + \frac{R}{LC} i_{g0} + \frac{Rp_2}{LC} V_g^2 + \frac{Rp_3}{LC} V_g^3 = 0. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C} \right] = -\alpha_1; \quad \frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C} = \beta_1; \quad \frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C} = \gamma_1;$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \omega_0^2 (1 + Rp_1) = \omega_1^2; \quad \frac{Rp_2}{LC} = n; \quad \frac{Rp_3}{LC} = m; \quad \frac{Ri_{g0}}{LC} = p.$$

При соответствующих предположениях о малости коэффициентов это уравнение легко может быть приведено к виду: $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$, где x безразмерно и где μ — малый параметр, для которого нами были развиты теории ван-дер-Поля и Пуанкаре и могут быть получены общие

формулы для амплитуд периодических решений, для поправки к частоте в первом приближении и т. д.

Однако мы сейчас не будем пользоваться этими общими формулами, а покажем, как можно в таких случаях с минимумом вычислений получить нужный результат; само собой разумеется, что тот же результат может быть получен и из общих формул. Введем «расстройку» a^2 , т. е. разность между квадратом действительной частоты Ω^2 и ω_1^2 :

$$a^2 = \Omega^2 - \omega_1^2.$$

Величины $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, m, n, p, a^2$ мы предположим достаточно малыми (порядка малости μ) по сравнению с частотой ω_0 . Теперь уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d^2 V_g}{dt^2} + \Omega^2 V_g = \alpha_1 \frac{dV_g}{dt} + \beta_1 \frac{d(V_g^2)}{dt} - \gamma_1 \frac{d(V_g^3)}{dt} - nV_g^2 - mV_g^3 - p + a^2 V_g. \quad (539)$$

Чтобы определить амплитуду и поправку на частоту, положим $V_g = K \sin \Omega t$ и уничтожим в правой части резонансные члены. Получим два уравнения для определения K^2 и a^2 :

$$K\alpha_1 \Omega - \frac{\gamma_1 K^3 \Omega^3}{4} = 0, \quad -m \frac{3}{4} K^3 + a^2 K = 0,$$

откуда имеем:

$$K^2 = \frac{\alpha_1}{\frac{3}{4} \gamma_1}, \quad a^2 = \frac{3}{4} K m^2 = \frac{\alpha_1 m}{\gamma_1}. \quad (540)$$

Следовательно, частота

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{Rp_1}{L\sigma} + \frac{m\gamma_1}{\gamma_1}.$$

Мы видим, что в рассматриваемой схеме при учете сеточного тока получается поправка на частоту уже в первом приближении. Чтобы процесс $V_g = K \sin \Omega t$ был устойчив, нужно, чтобы постоянный член ряда Фурье, изображающего производную правой части уравнения (539) по V_g , был меньше нуля, т. е. чтобы постоянный член разложения в ряд Фурье выражения $\alpha_1 + 2\beta_1 V_g - 3\gamma_1 V_g^2$ был меньше нуля. Из этого условия получаем:

$$\alpha_1 - \frac{3}{2} \gamma_1 K^2 < 0$$

или

$$K^2 > \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\frac{3}{4} \gamma_1}, \quad (541)$$

что в силу (540) всегда имеет место; следовательно, найденное нами периодическое движение всегда устойчиво.

Наконец, условие самовозбуждения схемы есть $\alpha_1 > 0$ или

$$\frac{R}{L} + \frac{p_1}{C} - \frac{MS_1}{LC} < 0, \quad (542)$$

т. е. с точки зрения условий самовозбуждения так в цепи сетки действует как некоторая добавочная нагрузка на контур, ухудшающая условия самовозбуждения.

§ 8. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе

Мы рассматриваем попрежнему автоколебательную систему с одной степенью свободы, близкую к линейной консервативной системе, и полагаем, что поведение этой автоколебательной системы существенно зависит от какого-нибудь параметра, которому мы можем придавать различные фиксированные значения. Уравнение движения системы в таком случае может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu g(x, \dot{x}, \lambda), \quad (543)$$

где x — координата системы (например смещение, напряжение и т. д.), μ — малый параметр, который характеризует степень близости рассматриваемой автоколебательной системы к линейной консервативной системе, λ — тот параметр (например коэффициент взаимной индукции и т. д.), влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, $g(x, \dot{x}, \lambda)$ — нелинейная функция, определяемая физической природой сопротивлений и устройств, доставляющих энергию системе. Перейдем к исследованию уравнения (543), предполагая μ достаточно малым.

Пользуясь методами Пуанкаре, мы показали, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, на плоскости останутся, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к кругам, радиусы которых K определяются уравнением:

$$\frac{C(2\pi)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(K \cos u, -K \sin u, \lambda) \sin u \, du = 0. \quad (544)$$

Остальные интегральные кривые не будут замкнутыми — это будут спирали, мало отличающиеся от кругов, если μ достаточно мало. Как мы видели, периодические движения, соответствующие изолированным замкнутым интегральным кривым — предельным циклам Пуанкаре, — будут устойчивы по Ляпунову, если выполнено неравенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_x(K \cos u, -K \sin u, \lambda) \, d\xi < 0. \quad (545)$$

Покажем, что для зависимости характера стационарных движений от параметра мы здесь имеем ту же самую картину, какую мы имели в гл. II, § 5.

Введем обозначение $K^2 = \rho$ и запишем левую часть уравнения (544), помножив его предварительно на $2\sqrt{\rho}$ в виде ¹⁾:

$$\bar{\Phi}(\rho, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\sqrt{\rho} \cos u, -\sqrt{\rho} \sin u, \lambda) \sqrt{\rho} \sin u \, du.$$

Найдем $\bar{\Phi}_\rho(\rho, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\rho(\rho, \lambda) &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} \{g'_x \sqrt{\rho} \sin u \cos u + g'_y \sqrt{\rho} \cos^2 u\} \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_x \, du - \\ &- \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin u \, du = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} [g \cos u]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin u \, du + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_x \, du - \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin u \, du, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{\Phi}_\rho(\rho, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'_x \, u \, du.$$

Следовательно, условия (544) и (545) могут быть записаны в виде:

$$\bar{\Phi}(\rho, \lambda) = 0, \quad (546)$$

$$\bar{\Phi}_\rho(\rho, \lambda) < 0. \quad (547)$$

Таким образом условия (546) и (547) представляют полную аналогию с условиями, которые мы имели для состояния равновесия консервативной системы (гл. II, § 5), только вместо координат особых точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ мы должны рассматривать $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_n$ — квадраты амплитуд стационарных движений, к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и особая точка $\rho = 0$.

Итак, для зависимости стационарных движений от параметра мы действительно получаем ту же самую картину, которую мы имели в гл. II, § 5 для зависимости состояний равновесия от параметра.

Мы здесь получаем снова «линейные ряды», теперь уже не состояний равновесия, а стационарных движений, которые сохраняют свою устойчивость или неустойчивость до слияния с другими линейными рядами, т. е. до точек бифуркации.

Как мы увидим дальше, точки бифуркации имеют важное физическое значение: это те значения параметра, при которых происходят качественные изменения происходящих в системе процессов, например возникновение колебаний, срыв колебаний и т. п.

¹⁾ Этим, самое большее, мы меняем порядок кратности корня $\rho = 0$.

Стационарные движения, о которых мы сейчас говорили, подобно состояниям равновесия консервативных систем, образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «обмен устойчивостью».

Прежде чем перейти к рассмотрению какого-либо конкретного примера с точки зрения теории бифуркаций, дадим еще развернутые формулы для нахождения амплитуд и решения вопроса об устойчивости в случае, когда

$$g(x, \dot{x}, \lambda) = f(x, \lambda) \dot{x},$$

причем $f(x, \lambda)$ — степенной ряд по x :

$$f(x, \lambda) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

коэффициенты которого a_0, a_1, \dots суть функции параметра λ . Выполняя простые квадратуры, найдем, что условия (546) и (547) в этом случае имеют вид:

$$\bar{\Phi}(\rho, \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ a_0 \rho + \frac{a_2 \rho^2}{4} + \frac{a_4 \rho^3}{8} + \dots \right\} \quad (548)$$

$$\bar{\Phi}'(\rho, \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ a_0 + \frac{a_2 \rho}{2} + \frac{3}{8} a_4 \rho^2 + \dots \right\} \quad (549)$$

§ 9. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора

Рассмотрим в виде примера случай мягкого и жесткого возбуждения лампового генератора. Возьмем, чтобы не повторяться, ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода (рис. 323) при обычных упрощающих предположениях, т. е. пренебрегая сеточным током и анодной реакцией. Уравнение тока в колебательном контуре может быть записано в виде:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a, \quad (550)$$

где $i_a = \varphi(V)$ — анодный ток, зависящий от сеточного напряжения V , которое при наших предположениях равно ЭДС взаимной индукции, т. е.

$$V = M \frac{di}{dt}.$$

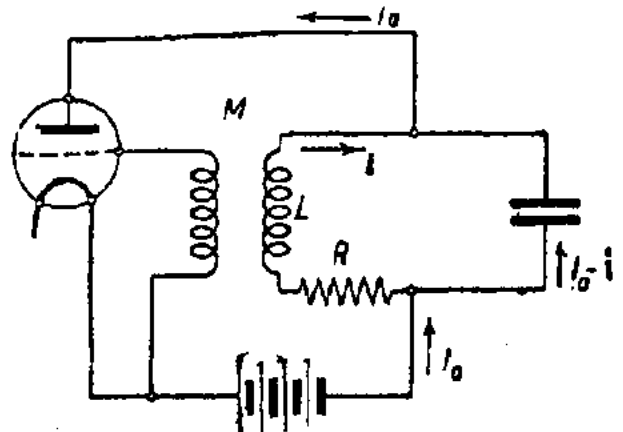


Рис. 323.

Характеристику лампы мы аппроксимируем степенным рядом; ограничиваясь — этого будет достаточно для нашей цели — членами до 5-й степени включительно, можно положить:

$$i_a = \varphi(V) = \alpha_0 V + \beta_0 V^2 + \gamma_0 V^3 + \delta_0 V^4 + \varepsilon_0 V^5. \quad (551)$$

Вводя новые переменные $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ и $x = \frac{V}{v_0}$, где v_0 — некоторое неиз-

менное для данной схемы напряжение, например напряжение насыщения¹⁾, не имеющие размерности, и выбирая, например, за малый параметр величину $\mu = \beta_0 v_0 \sqrt{\frac{2}{C}}$, также не имеющую размерности, приведем уравнение (550) к требуемому виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu \frac{M}{L} \{ \alpha + 2x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \} \frac{dx}{d\tau}, \quad (552)$$

где

$$\alpha = \frac{M\alpha_0 - CR}{\beta_0 v_0 M}; \quad \gamma = \frac{3\gamma_0 v_0}{\beta_0}; \quad \delta = \frac{4\delta_0 v_0^2}{\beta_0}; \quad \varepsilon = \frac{5\varepsilon_0 v_0^3}{\beta_0}$$

— также безразмерные параметры, но уже не малые, а порядка единицы.

В согласии с (548) и (549) мы можем записать условия для амплитуд и устойчивости в виде (с точностью до положительного множителя):

$$\bar{\Phi}(\rho, \lambda) = (M\alpha_0 - RC)\rho + \frac{3}{4}\gamma_0 v_0^2 M\rho^2 + \frac{5}{8}\varepsilon_0 v_0^4 M\rho^3 = 0, \quad (553)$$

$$\bar{\Phi}'_\rho(\rho, \lambda) = (M\alpha_0 - RC) + \frac{3}{2}\gamma_0' v_0^2 M\rho + \frac{15}{8}\varepsilon_0 v_0^4 M\rho^2 < 0. \quad (554)$$

Пусть параметром, влиянием изменения которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, будет коэффициент взаимной индукции M . Следовательно, нам нужно построить бифуркационные диаграммы $\rho - M$ для мягкого и для жесткого случая возникновения колебаний. Мы ограничимся рассмотрением области $M > 0$, соответствующей нормальному для лампового генератора направлению витков в катушке обратной связи. Не следует также забывать, что физический смысл имеют лишь значения $\rho \geq 0$, так как лишь они соответствуют действительным амплитудам стационарных решений.

Чтобы упростить выкладки, мы будем каждый раз выбирать возможно более простую математическую идеализацию, делая те или иные предположения относительно коэффициентов ряда (551), представляющего характеристику лампы²⁾.

1. Мягкое возникновение колебаний. Предположения $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $\varepsilon_0 = 0$ дадут возможность, максимально упростив выкладки, ото-

1) Подробнее об этом см. в дополнительной главе «Электронная лампа».

2) Мы еще раз обращаем внимание читателя на то, что в выражения (553) и (554) входят лишь те коэффициенты ряда, изображающего характеристику, которые стоят при нечетных степенях. Остальные коэффициенты, не влияя, таким образом, в первом приближении на величину амплитуд и на устойчивость стационарных режимов, могут играть существенную роль при действии внешней силы (например в случае детектирования, резонанса n -го рода). Малый параметр μ произволен, но мы так его выбрали, что

$\mu = \beta_0 v_0 \sqrt{\frac{2}{C}}$, т. е. мы предположили, что $\beta_0 \neq 0$ мало. Однако физической роли этот параметр для рассматриваемых вопросов не играет. Мы могли бы положить $\beta_0 = 0$ и выбрать μ как-либо иначе.

бразить существенные черты мягкого возникновения колебаний. Вводя обозначение: $\frac{3}{4} \gamma_0 v_0^2 = -a$ ($a > 0$), запишем $\Phi(\rho, M)$ в виде:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{Ma_0 - RC - aM\rho\} \rho. \quad (555)$$

Отсюда видно, что на плоскости ρ, M бифуркационная диаграмма $\bar{\Phi}(\rho, M)$ распадается на прямую $\rho = 0$ и гиперболу:

$$Ma_0 - RC - aM\rho = 0.$$

При помощи условия (554) можно выделить области плоскости ρ, M , где $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, и, пользуясь общими правилами, изложенными в гл. V, § 8, наметить устойчивые (черные кружки) и неустойчивые (светлые кружки) части линейных рядов (рис. 324).

Бифуркационным значением параметра M служит значение $M_1 = \frac{RC}{a_0}$, где пересекаются линейные ряды, соответствующие вышеупомянутой прямой и гиперболе. Прямая устойчива до значения параметра $M = M_1$, затем после смены устойчивости в точке бифуркаций устойчивой становится гипербола.

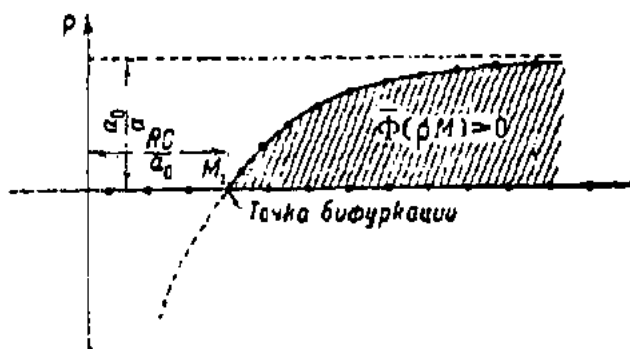


Рис. 324.

Теперь перейдем от бифуркационной диаграммы ρ, M к фазовой плоскости x, \dot{x} и будем исследовать эту фазовую плоскость при различных M . На фазовой плоскости для $M < M_1$ мы имеем только одно

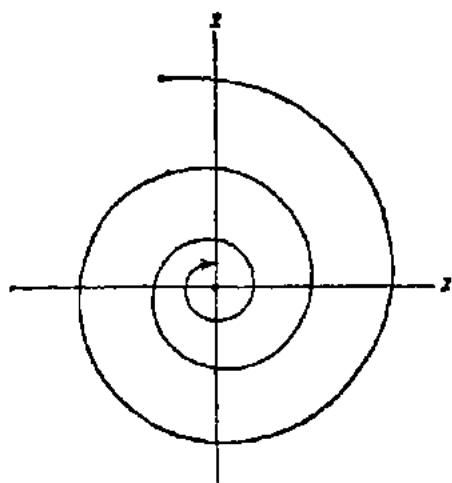


Рис. 325.

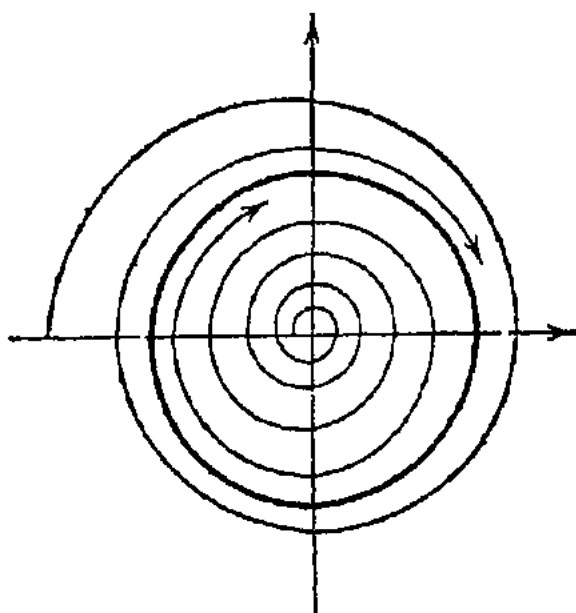


Рис. 326.

устойчивое стационарное состояние — устойчивый фокус (рис. 325). Где бы ни находилась изображающая точка, она, двигаясь по одной из спиралей, в конце концов окажется в ближайшем соседстве с устойчивой особой точкой.

При переходе M через бифуркационное значение $M = M_1$ от особой точки отделяется устойчивый предельный цикл (рис. 326). Изображающая точка, находившаяся раньше в состоянии равновесия, перейдет теперь на предельный цикл, так как при $M > M_1$ состояние равновесия неустойчиво¹⁾. На физическом языке это значит, что в системе происходят колебания и имеет место самовозбуждение. При увеличении M радиус предельного цикла увеличивается и стремится к асимптотическому значению, соответствующему $\rho = \frac{\rho_0}{a}$.

При уменьшении M система ведет себя обратимо, предельный цикл сжимается, изображающая точка «следит» за предельным циклом и

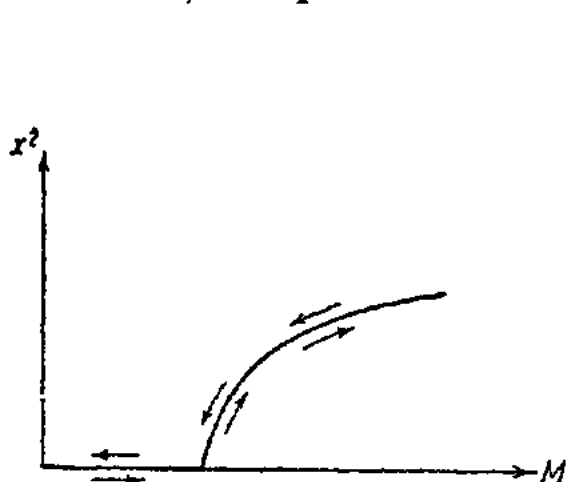


Рис. 327.

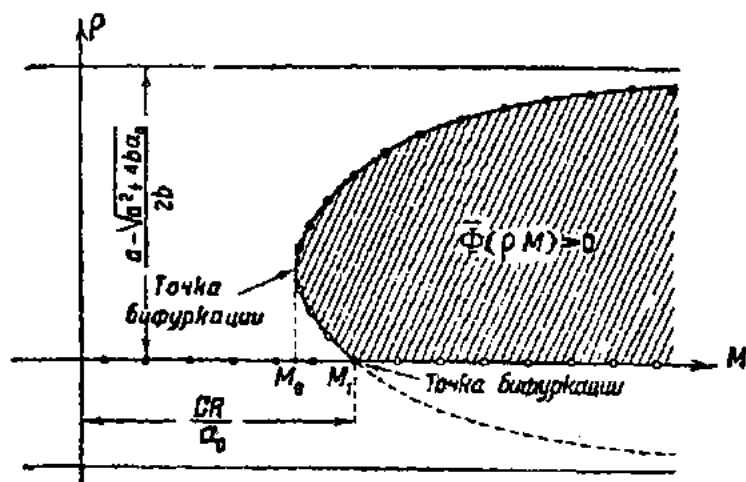


Рис. 328.

при $M = M_1$, когда предельный цикл сожмется в точку, изображающая точка снова вернется в начало координат, которое в этот момент превращается в устойчивый фокус.

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K , при изменении M покажет плавный («мягкий») переход с постепенно (без скачков) меняющейся амплитудой от состояния покоя к стационарным колебаниям, и обратно (рис. 327).

2. Жесткое возникновение колебаний. Предположения $a_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $\epsilon_0 < 0$ отображают, как мы уже видели, существенные черты жесткого возникновения колебаний.

Вводя обозначения $\frac{3}{4} \gamma_0 v_0^2 = a$ ($a > 0$); $\frac{5}{8} \epsilon_0 v_0^4 = b$ ($b > 0$), запишем для этого случая $\bar{\Phi}(\rho, M)$ в виде:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{M\alpha_0 - RC + aM\rho - bM\rho^2\} \rho. \quad (556)$$

На плоскости ρ, M бифуркационная диаграмма распадается на прямую $\rho = 0$ и кривую третьего порядка $M\alpha_0 - RC - aM\rho - bM\rho^2 = 0$.

1) Мы будем предполагать, что изменения параметра M достаточно медленны. Так как всякое движение в автоколебательных системах приближается к стационарному, то при достаточно медленных изменениях параметра мы можем считать, что изображающая точка находится в окрестности стационарных движений.

На рис. 328 указано примерное расположение этих кривых, указаны области, где $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, и намечены устойчивые (черные кружки) и неустойчивые (светлые кружки) части линейных рядов.

Для $M > 0$ существуют два бифуркационных значения параметра:

$$M_0 = \frac{RC}{\alpha_0 + \frac{a^2}{4b}} \quad \text{и} \quad M_1 = \frac{RC}{\alpha_0}.$$

M_0 соответствует слиянию двух линейных рядов¹⁾, M_1 — пересечению двух линейных рядов.

Перейдем теперь в фазовой плоскости. Для $0 < M < M_1$ на нашей фазовой плоскости имеется, так же как и в предыдущем случае, только одно стационарное движение — устойчивый фокус в начале координат (рис. 325). При переходе M через бифуркационное значение параметра M_0 у нас сразу появляется пара предельных циклов, имеющих конечный радиус (рис. 329). Один из этих циклов — больший — устойчивый; меньший — неустойчивый; характер особой точки в начале координат при этом не меняется, она остается устойчивой.

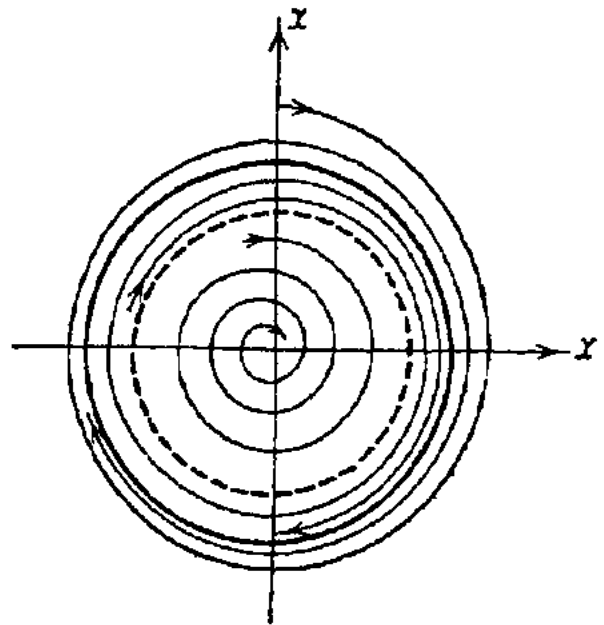


Рис. 329.

При дальнейшем увеличении M устойчивый цикл растет, а неустойчивый уменьшается (рис. 330) и при $M = M_1$ неустойчивый цикл исчезает, слившись с особой точкой, которая при $M = M_1$ становится уже неустойчивой (рис. 331). Устойчивый цикл при увеличении M монотонно растет, и его радиус асимптотически стремится к значению, соответствующему

$$\rho = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bx_0}}{2b}.$$

Что же отметит прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K^* ? Для того чтобы это выяснить, проследим поведение изображающей точки, находившейся при малых M вблизи состояния равновесия. Очевидно, что изображающая точка будет находиться вблизи состояния равновесия до тех пор, пока это состояние равновесия не сделается неустойчивым, т. е. вплоть до $M = M_1$; то, что при $M = M_1$ появилась пара предельных циклов (из них один устойчивый), это «не касается» нашей изображающей точки, так как устойчивый характер состояния равновесия при этом не изменяется.

1) Соответствующая точка бифуркации на плоскости ρ, M стечает так называемому «предельному» стационарному движению.

При $M > M_1$ особая точка уже неустойчива; изображающая точка «срывается» при переходе M через $M = M_1$, затем движется так, как ей «ведут» интегральные кривые, и, значит, приходит к устойчивому предельному циклу и уже не покидает его при дальнейшем увеличении M . При уменьшении параметра M получится иная картина. При уменьше-

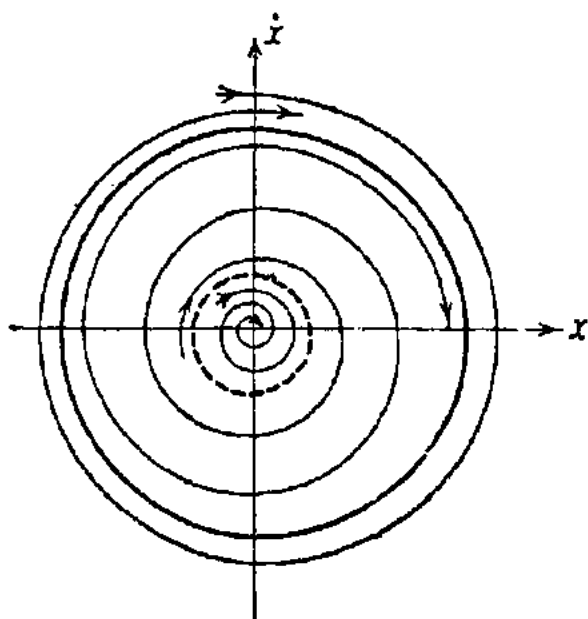


Рис. 330.

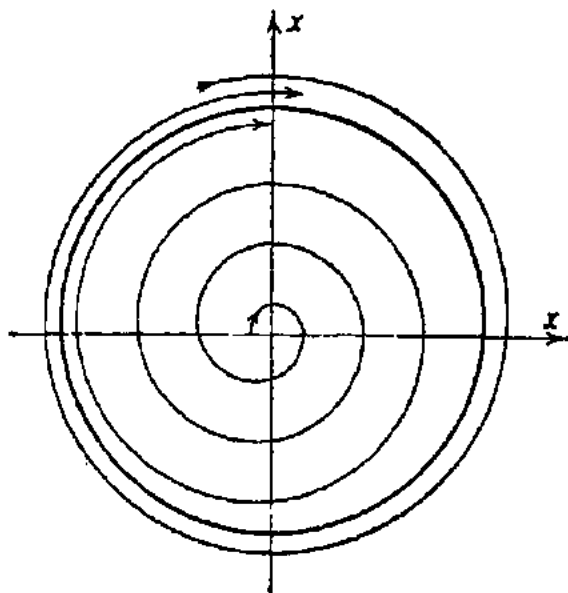


Рис. 331.

нии M изображающая точка останется на предельном цикле вплоть до $M = M_0$, когда устойчивый цикл сольется с неустойчивым и исчезнет; изображающая точка не будет реагировать на то обстоятельство, что при $M = M_1$ состояние равновесия делается устойчивым, так как это не изменяет характера того предельного цикла, по которому она

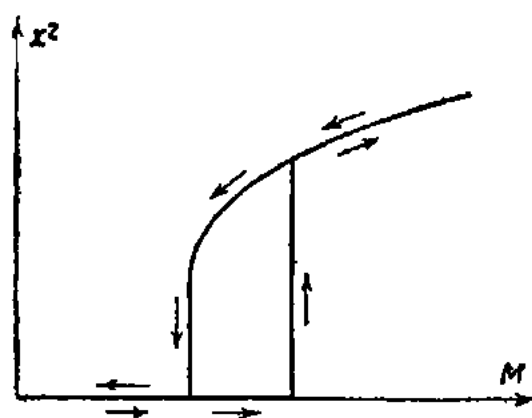


Рис. 332.

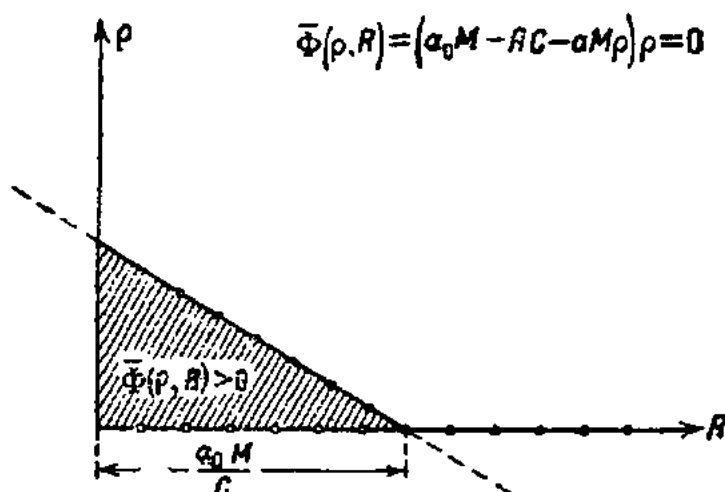


Рис. 333.

двигается. При переходе M через значение $M = M_0$ изображающая точка, следуя интегральным кривым, перейдет к состоянию равновесия и останется там при дальнейшем уменьшении.

Прибор, изменяющий амплитуду напряжения на сетке, обнаружит скачки — резкое («жесткое») изменение амплитуды для $M = M_1$ при

увеличении M и для $M = M_0$ при уменьшении M . Мы видим, что явление протекает иначе при увеличении, чем при уменьшении M ; мы имеем дело с процессом, носящим необратимый «гистерезисный» характер (рис. 332).

Мы получили, таким образом, бифуркационные диаграммы для мягкого и жесткого возникновения колебаний, принимая за параметр, влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, коэффициент взаимной индукции M . Аналогичные диаграммы мы могли бы получить и для других параметров, характеризующих нашу систему.

На рис. 333 и 334 приведены бифуркационные диаграммы $\rho - R$, где R — омическое сопротивление, опять для случая мягкого и жесткого режима: соответствующие соотношения легко могут быть получены из выражений (555) и (556).

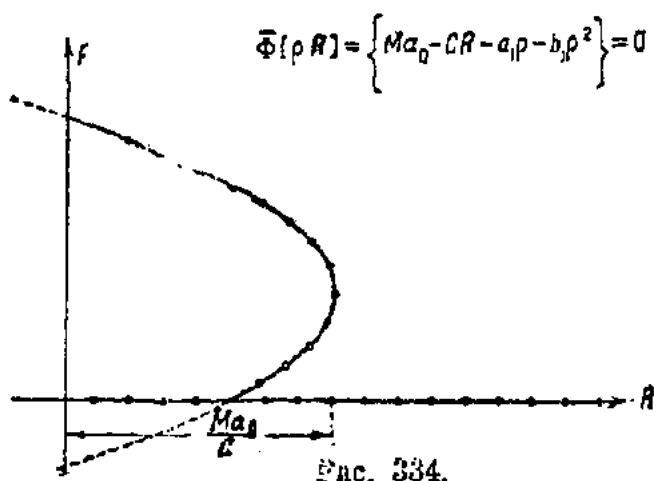


Рис. 334.

ГЛАВА VIII

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Введение

Нам уже приходилось указывать на то, что при рассмотрении всякой реальной физической системы необходимо считаться с наличием «случайных толчков», т. е. случайных отклонений от того динамического процесса, ход которого определяется уравнениями, описывающими данную систему. Эти отклонения неизбежны в реальной системе хотя бы в силу наличия в ней флуктуаций термодинамического характера. Кроме того, в физических системах возможны различные явления, принципиально связанные с флуктуациями, например термоионная эмиссия, тлеющий разряд, процессы в проводниках второго рода и т. д.

Поскольку такие малые случайные отклонения неизбежны во всякой реальной системе, естественно возникает вопрос о том, какое влияние могут оказать эти случайные отклонения на характер изучаемых нами динамических процессов.

Прежде всего очевидно, что в реальной физической системе не могут наблюдаться такие процессы, протекание которых возможно только при отсутствии каких бы то ни было случайных отклонений. На этом основании мы требовали, чтобы все процессы, наблюдаемые в реальных системах, были устойчивы по отношению к малым изменениям координат и скоростей. Однако этими соображениями отнюдь не исчерпывается вопрос о том влиянии, которое могут оказать случайные отклонения на происходящие в системе процессы. Случайные отклонения могут влиять на судьбу системы не только в том смысле, что заставляют ее уйти из неустойчивого стационарного состояния, но и в других отношениях. В некоторых случаях наличие таких случайных возмущений может приводить к систематическим эффектам, которые не могут быть объяснены на основе обычных динамических представлений и которые тем не менее могут регулярно наблюдаться. Результаты подобных наблюдений позволяют не только подтвердить самый факт влияния случайных отклонений на поведение системы, но позволяют вывести некоторые заключения о величине и законе распределения случайных отклонений в той или иной реальной системе. Но даже и в тех случаях, когда влияние слу-

чайных отклонений не поддается непосредственной экспериментальной проверке, все же самый факт наличия случайных отклонений заставляет нас, часто существенно, дополнять наши представления о процессах, происходящих в реальных системах [88, 89].

§ 2. Случайные «скачки»

Для того чтобы учесть влияние случайных возмущений на судьбу системы, мы должны предположить, что в правые части уравнений системы кроме «регулярных» функций входят еще какие-то «случайные» функции, учитывающие характер случайных процессов в системе. Можно, например, предположить, что случайные процессы в системе носят следующий характер: в течение некоторого времени случайные отклонения отсутствуют, затем происходит быстрое изменение состояния системы, затем снова случайные отклонения отсутствуют, снова — быстрое изменение состояния системы и т. д. При таком предположении мы должны считать, что стоящие в уравнении справа случайные функции равны нулю везде, кроме тех коротких промежутков времени, когда происходят быстрые изменения состояний системы. Но если эти случайные изменения состояний происходят достаточно быстро по сравнению со скоростью изменения состояний, обусловленных регулярным динамическим процессом, то мы можем те малые промежутки времени, когда действуют случайные функции (когда эти случайные функции отличны от нуля и гораздо больше регулярных функций), не рассматривать и заменить это рассмотрение представлением о скачкообразных изменениях состояний системы. Этим простейшим представлением можно пользоваться для решения некоторых вопросов. На языке фазового пространства это представление может быть сформулировано следующим образом. Представляющая точка в течение некоторого времени движется по той фазовой траектории, на которой она находилась в начальный момент, затем она скачком переходит на какую-либо другую (близкую, так как скачки малы) фазовую траекторию, снова движется дальше некоторое время, снова перескакивает и т. д. Распределение скачков по времени, их величина и направление должны быть подчинены каким-либо вероятностным законам.

В силу наличия случайных скачков движение представляющей точки будет подчиняться уже не динамическим законам, а законам статистики. В соответствии с этим могут быть поставлены вопросы о вероятности того или иного движения, о наиболее вероятных движениях и о других вероятностных характеристиках поведения системы. В частности, при некоторых предположениях о характере скачков могут быть найдены две существенные характеристики таких статистических процессов, именно, распределение вероятности нахождения представляющей точки в той или иной области фазовой плоскости и математическое ожидание времени выхода представляющей точки за границы данной области фазовой плоскости [89].

Первая из этих задач приводит к так называемому уравнению Фоккера. При исследовании этого уравнения возникает ряд вопросов,

на которые пока не удалось дать исчерпывающего ответа. Но на некоторые вопросы все же можно дать более или менее точные ответы. Можно, например, показать, что вблизи устойчивых состояний равновесия, вообще говоря, образуются максимумы функции распределения вероятности; вблизи устойчивых предельных циклов — возвышения наподобие валов и т. д.

Для второй задачи уравнение было получено Понтрягиным. При помощи этого уравнения может быть вычислено математическое ожидание времени перехода системы из одного состояния в другое.

Отметим, что можно вывести еще одно, правда, пока чисто качественное, но весьма принципиальное заключение из факта существования случайных скачков (и вообще случайных возмущений) в системе. Именно, поскольку при автоколебаниях в реальной системе в силу наличия случайных скачков представляющая точка движется не по предельному циклу, а по различным кускам фазовых траекторий, *автоколебания в реальной системе представляют собой процесс не строго периодический, а лишь приблизительно периодический*. Вследствие наличия скачков колебания перестают быть монохроматичными. Наличие различного рода флуктуаций в реальной системе ставит принципиальную границу монохроматичности генератора и кладет предел точности определения частоты автоколебаний. Количественное рассмотрение вопроса о принципиальном пределе монохроматичности пока не выполнено. Однако, судя по тому, что точность определения частот лампового генератора может быть доведена до 10^{-7} (такая точность сейчас уже достигнута), принципиальный предел монохроматичности для лампового генератора, например, лежит где-то выше.

§ 3. Случайные начальные условия

В некоторых задачах при рассмотрении влияния случайных процессов на поведение системы оказывается целесообразным ввести представление о случайных начальных условиях. Это представление целесообразно в таких задачах, где вся роль случайных процессов сводится в основном к тому, что они определяют состояние системы в момент начала интересующего нас динамического процесса, т. е. задают *случайные начальные условия*. И, вместо того чтобы делать предположения о характере случайных процессов, мы можем делать предположение о тех или иных вероятностных законах, определяющих случайные начальные условия. Подобный способ рассмотрения случайных начальных условий может быть с успехом применен к следующей задаче, которая представляет интерес потому, что она поддается экспериментальной проверке.

Задача заключается в том, чтобы определить судьбу системы, которая в начальный момент находится вблизи неустойчивого состояния равновесия, а затем, удаляясь от этого состояния, может попасть в одно из двух (или вообще в одно из нескольких) устойчивых состояний равновесия. Примером подобной системы может служить схема типа кип-реле (см. гл. V, § 10), изображенная на рис. 335. При разомкнутом ключе K схема вполне аналогична кип-реле и, следовательно,

при достаточно больших сопротивлениях R_1 и R_2 имеет три состояния равновесия — неустойчивое (седло) посередине и два устойчивых узла по бокам; фазовая плоскость для этого случая изображена на рис. 336. Если в начальный момент представляющая точка находится в непосредственной близости к седлу, то она может попасть либо в тот, либо в другой из устойчивых узлов, в зависимости от того, по какую сторону от «устойчивого уса» седла она находится в начальный момент. Близость же представляющей точки к седлу в начальный момент может быть достигнута следующим образом. При замкнутом ключе K среднее состояние равновесия превращается в устойчивый узел, а два крайних исчезают; фазовая плоскость в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 337. Если

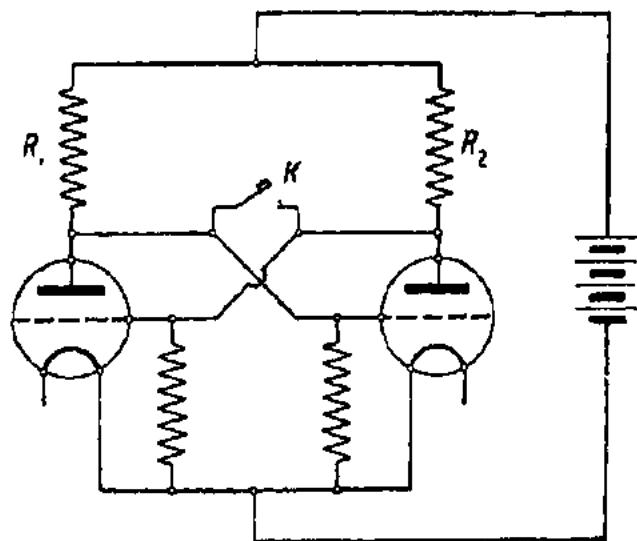


Рис. 335.

при замкнутом ключе K через него не течет ток (а этого можно добиться подбором сопротивлений R_1 и R_2), то размыкание ключа K можно толковать как перенесение представляющей точки из какого-либо положения фазовой плоскости рис. 337 в точно такое же положение на фазовой плоскости рис. 336. Перенос происходит в такое

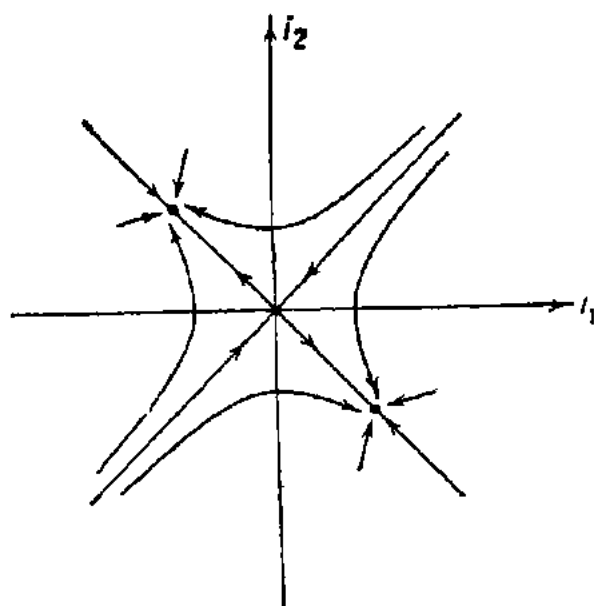


Рис. 336.

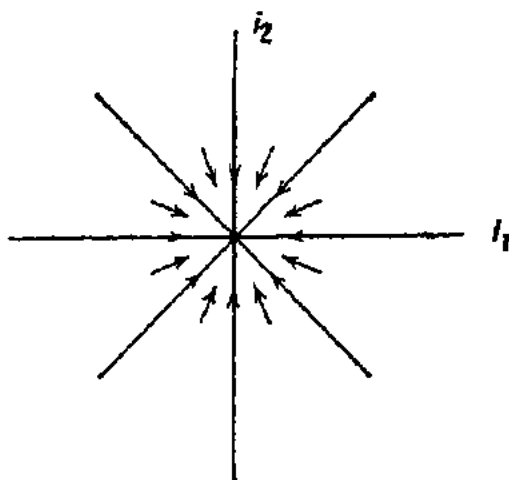


Рис. 337.

же положение потому, что разрывается цепь, не несущая тока, и, значит, значения i_1 и i_2 в момент размыкания не меняются (мы считаем, что размыкание ключа происходит мгновенно). Следовательно, положение представляющей точки вблизи седла определяется, с одной стороны, точностью установки схемы до размыкания ключа, а с другой — случайными движениями системы вблизи устойчивого

узла (при замкнутом ключе K). Если эти случайные движения не очень малы, то именно они, а не неточность установки, играют существенную роль (в этом можно убедиться специальным экспериментом). Так как уход системы из состояния неустойчивого равновесия происходит очень быстро (при малых емкостях экспозант велик), то при условии, что случайные процессы не слишком быстры, можно считать, что они не успевают влиять на движение системы после размыкания ключа K . При таком предположении случайные процессы играют роль только постольку, поскольку они определяют состояние системы в момент размыкания ключа K . Учет случайных процессов сводится в этом случае к представлению о случайных начальных условиях. Такую систему со случайными начальными условиями можно осуществить на опыте.

Если желательно регулировать величину случайных воздействий, то можно, например, в схему кипп-реле ввести извне случайные электродвижущие силы — например (при помощи усилителя) флуктуации электронного потока. Эти электродвижущие силы и будут создавать случайные начальные условия.

Так как при правильной установке схемы отклонения в начальных условиях в обе стороны равновероятны, то для распределения попаданий системы в одно и другое из устойчивых состояний должна получиться гауссова кривая. Если же кроме случайных начальных условий в схему вводить регулярные начальные отклонения, то по характеру искажения кривой распределения попаданий можно вывести заключение о связи между случайными и регулярными начальными отклонениями и определить величину случайных отклонений.

Соответствующие эксперименты вполне подтвердили все эти рассуждения и позволили измерить величину случайных воздействий, вводимых в схемы в виде флуктуаций термоионного потока.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Электронная лампа

Наиболее распространенным среди тех приборов, при помощи которых могут быть осуществлены электрические автоколебательные системы, является электронная лампа. Электронная лампа как физический прибор достаточно хорошо известна; поэтому мы ограничимся только кратким описанием ее устройства и остановимся подробнее лишь на некоторых ее свойствах, которые нас будут особо интересовать с точки зрения действия колебательных систем с электронной лампой, а главным образом мы остановимся на методах математического описания этих интересующих нас свойств. Для более подробного знакомства с электронной лампой можно рекомендовать, например, книгу Меллера.

Устройство двухэлектродной электронной лампы в общих чертах таково. В эвакуированном стеклянном баллоне помещен накаливаемый катод, окруженный другим электродом — анодом. Накаленный катод испускает в окружающее пространство электроны, которые образуют вокруг катода пространственный заряд («электронное облако»); этот пространственный заряд препятствует вылету дальнейших электронов из катода. Плотность пространственного заряда, образовавшегося вокруг катода, зависит от количества электронов, вылетающих в единицу времени, от скорости вылета электронов, т. е. в конечном счете от температуры нити. Если между катодом и анодом включить напряжение так, чтобы положительный полюс напряжения был присоединен к аноду (рис. 338), то внутри лампы между анодом и катодом возникнет электрическое поле, направленное от анода к катоду. Под действием этого поля электроны, окружающие катод, начнут двигаться к аноду и, достигнув анода, возвращаться через внешнюю цепь к катоду; в анодной цепи ламп появится электрический ток. Энергия, необходимая для поддержания этого тока, будет черпаться из источника анодного напряжения — анодной батареи. Взамен электронов, захваченных электрическим полем из пространственного заряда, катод будет выделять новые электроны, и в лампе установится стационарное состояние, соответствующее определенной величине пространственного заряда и определенной силе анодного тока. Сила анодного тока будет зависеть от величины анодного напряжения и будет в известных пределах

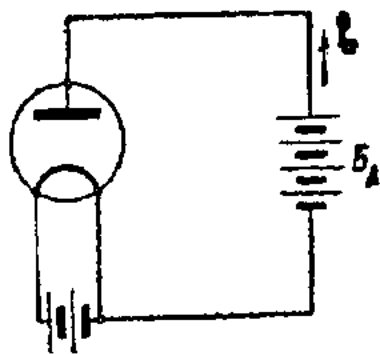


Рис. 339.

тем больше, чем больше анодное напряжение. Однако сразу видно, что зависимость между анодным напряжением и анодным током не может в широких пределах быть прямолинейной, т. е. не может в широких пределах подчиняться закону Ома. Действительно, при достаточно сильном отрицательном напряжении электрическое поле анода будет удерживать все электроны у катода, и ток в лампе вообще прекратится, а при достаточно большом положительном напряжении он достигнет насыщения, т. е. такого состояния, когда все электроны, которые может выделить катод при данной температуре, будут захватываться электрическим полем и уноситься на анод. В конечном счете зависимость между напряжением и током в двухэлектродной лампе (так называемая характеристика двухэлектродной лампы) будет иметь

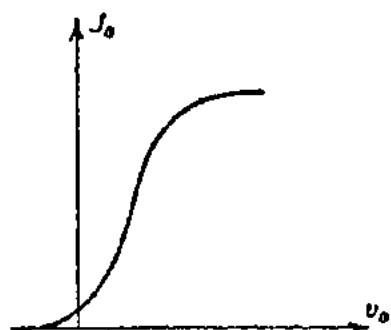


Рис. 339.

вид, изображенный на рис. 339. Это — характеристика «нелинейного» проводника, т. е. проводника, не подчиняющегося закону Ома. Число электронов, которое может испускать катод в единицу времени, зависит от свойств катода, именно от величины работы вылета электронов для данного катода и от его температуры. Соответствующей обработкой катода, например покрывая катод тонким слоем тория или оксидов легких металлов, можно понизить работу вылета и, следовательно, получить тот же ток насыщения при более низкой температу-

ре, чем в случае чистого вольфрамового катода.

В трехэлектродной лампе помимо катода и анода существует еще один электрод — сетка, расположенная между катодом и анодом. В этом случае электрическое поле вблизи катода будет зависеть не только от напряжения на аноде V_a , но и от напряжения на сетке V_g , т. е. анодный ток будет являться функцией двух величин: V_g и V_a , причем, так как электрические поля суперпозируются, то результирующее поле, действующее в каждой точке, будет зависеть от линейной комбинации напряжений V_g и V_a . Это результирующее напряжение в каждой точке может быть выражено как $V_{st} = aV_g + bV_a$, где a и b — величины, зависящие от «геометрии» лампы. Величина тока эмиссии в лампе есть, очевидно, некоторая функция этого результирующего напряжения V_{st} . Если считать, что это результирующее напряжение приложено к некоторому сплошному цилиндру, занимающему место сетки, то $a = 1$, и в таком случае фиктивное управляющее напряжение V_{st} выразится так:

$$V_{st} = V_g + DV_a,$$

где D — опять-таки некоторая постоянная, зависящая от «геометрии» лампы и указывающая, во сколько раз напряжение на аноде лампы влияет слабее на электрическое поле вблизи катода, чем напряжение на сетке. Эта величина D по предложению проф. М. В. Шулейкина была названа *проницаемостью* лампы (немецкое Durchgriff), и так как напряжение сетки, расположенной ближе к катоду, чем анод, действует сильнее, чем напряжение анода, то в обычных электронных

лампах величина D всегда меньше единицы (выражается она обычно в процентах и для нормальных типов ламп лежит в пределах от 1 до 25%).

Зависимость силы электронного тока в лампе от величины управляющего напряжения будет иметь те же типичные черты, что и характеристика двухэлектродной лампы. Точно так же при достаточном отрицательном значении V_{st} ток в лампе прекратится и при достаточно большом V_{st} достигнет величины тока насыщения. Правда, при этом часть электронов, захватываемых электрическим полем, будет попадать не на анод, а на сетку (если сетка находится под положительным напряжением), и ток возникнет не только в цепи анода, но и в цепи сетки. Однако если напряжения на сетке хотя и положительны, но не велики, то сила тока в цепи сетки будет мала по сравнению с силой анодного тока (при отрицательных напряжениях на сетке ток в цепи сетки практически исчезнет), и наличием тока в цепи сетки при упрощенном рассмотрении можно пренебречь. Обычно мы так и поступаем в нашей книге. Учет сеточных токов в тех задачах, которые мы рассматриваем, часто приводит к принципиальному усложнению задачи, именно, к появлению второй степени свободы и повышению порядка дифференциального уравнения, описывающего задачу. Поскольку, с одной стороны, мы в нашей книге ограничиваемся рассмотрением систем только с одной степенью свободы и, с другой стороны, сеточный ток, по крайней мере принципиально, может быть устранен почти во всякой схеме, мы в большинстве задач считаем сеточные токи отсутствующими. С учетом сеточного тока мы рассмотрели лишь одну задачу, в которой появление сеточного тока не вызывает повышения порядка уравнений. Практически можно подойти достаточно близко к условию отсутствия сеточного тока, выбирая так режим работы лампы, чтобы напряжения на сетке не переходили далеко в область положительных значений. Достигнуть этого можно тем, что мы выберем достаточно высокое анодное напряжение и дадим некоторое постоянное отрицательное напряжение V_{g0} («смещение») на сетку лампы, т. е. выберем V_a так, чтобы вся область изменений V_{st} , обуславливающих изменение анодного тока от нуля и до тока насыщения, соответствовала отрицательным значениям напряжения на сетке.

При этих условиях зависимость анодного тока I_a от V_{st} будет иметь такой же вид, как характеристика двухэлектродной лампы (рис. 339). Общий характер изменений I_a останется прежним, и, следовательно, характеристика трехэлектродной лампы, изображающая зависимость I_a от V_{st} , сохранит (за исключением области больших положительных значений V_{st} , при которых возникнут заметные сеточные токи) те же типичные черты, которыми обладает характеристика двухэлектродной лампы. Но изменения V_{st} можно осуществить, изменяя только V_g , а V_a оставляя постоянным, и, очевидно, зависимость I_a от V_g будет иметь такой же вид, как и зависимость I_a от V_{st} . Графическое изображение этой зависимости I_a от V_g при $V_a = \text{const.}$, т. е. кривая $I_a = \psi(V_g, V_a)$, где V_g — аргумент, а V_a — постоянный параметр, и называется обычно характеристикой трехэлектродной лампы. Если же мы будем выбирать новые значения V_a , но оставлять их постоянными, то мы получим ряд характеристик такого же вида, но сдвинутых друг относительно друга

по оси абсцисс на величину, равную $-D\Delta V_a$, где ΔV_a — изменение величины анодного напряжения, т. е. при увеличении V_a ($\Delta V_a > 0$) характеристики сдвигаются по оси абсцисс влево (рис. 340). Мы по-

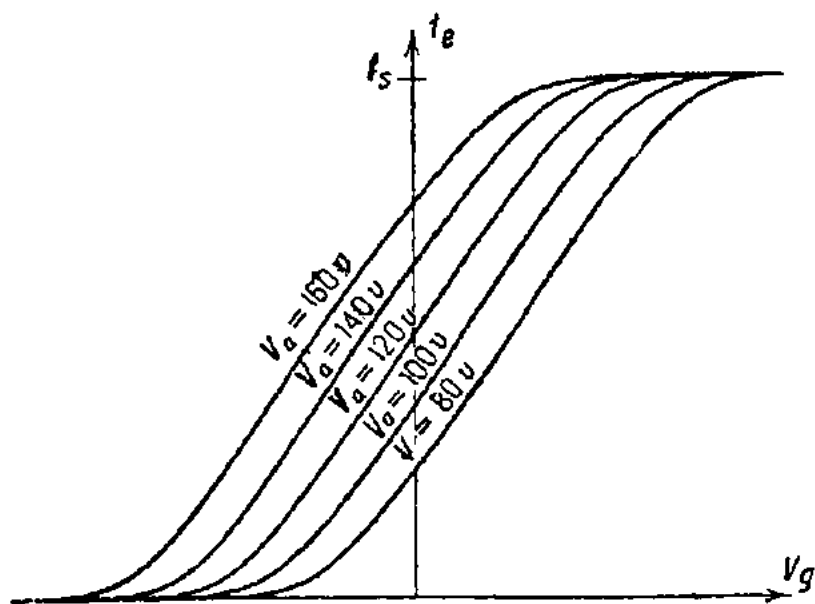


Рис. 340.

лучим таким образом семейство характеристик трехэлектродной лампы, из которых можно определить все основные параметры лампы, характеризующие ее свойства. Эти кривые представляют собой семейство кривых

$$I_a = \varphi(V_g + DV_a),$$

где V_g — независимая переменная, а V_a — параметр семейства. Один из этих параметров D мы уже ввели. Его величина, как следует из самого

определения этого параметра, определится соотношением:

$$-D = \frac{\Delta V_g}{\Delta V_a}$$

при

$$I_a = \text{const.}$$

или в дифференциальной форме:

$$-D = \left(\frac{\partial V_g}{\partial V_a} \right)_{I_a = \text{const.}}$$

Второй основной параметр лампы — это крутизна характеристики, которая определяется соотношением:

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \quad \text{при} \quad V_a = \text{const.}$$

или в дифференциальной форме:

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_g} \right)_{V_a = \text{const.}}$$

Наконец, третий основной параметр лампы — это внутреннее сопротивление лампы R_i , которое аналогично обычному сопротивлению определяется соотношением:

$$R_i = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \quad \text{при} \quad V_g = \text{const.}$$

или в дифференциальной форме:

$$R_i = \left(\frac{\partial V_a}{\partial I_a} \right)_{V_g = \text{const.}}$$

Все три основных параметра лампы (в этом можно убедиться, рассматривая, например, $I_a = \varphi(V_g + DV_a)$ как уравнение поверхности в пространстве V_g, V_a, I_a) связаны простым соотношением:

$$SDR_i = 1. \quad (557)$$

Если пользоваться обычным типом характеристик $I_a = \varphi(V_g)$ при $V_a = \text{const.}$, то крутизна характеристики S может быть определена из каждой данной характеристики семейства, между тем как два других параметра могут быть найдены только в том случае, когда известно несколько характеристик семейства.

Рассмотрение всех процессов, происходящих в схемах с электронной лампой, будет весьма упрощено, если считать, что напряжение на аноде лампы остается все время постоянным и анодный ток есть функция только напряжения на сетке. В таком случае мы можем вместо рассмотрения всего семейства характеристик ограничиться рассмотрением только одной характеристики при каком-то определенном значении V_a . Это условие — постоянство напряжения на аноде — было бы выполнено само собой, если бы анодная батарея, не обладающая внутренним сопротивлением, была присоединена непосредственно к аноду лампы. Но во всякой схеме помимо батареи в анодную цепь включается еще анодная нагрузка (обычно самоиндукция, сопротивление или колебательный контур), и изменение падения напряжения в этом сопротивлении при изменении силы анодного тока изменяет величину напряжения на аноде лампы (так называемая «анодная реакция»). В тех схемах, которые мы рассматривали, учет анодной реакции обычно не вносит ничего принципиально нового, но зато делает менее наглядной связь между коэффициентами уравнений и параметрами лампы. Поэтому мы обычно пренебрегали анодной реакцией, т. е. считали, что напряжение на аноде лампы, несмотря на присутствие анодной нагрузки, остается постоянным. При этом предположении мы будем тем ближе к истине, чем меньше действующее сопротивление анодной нагрузки (по сравнению с внутренним сопротивлением лампы) и чем меньше проницаемость лампы. Практически эти условия могут быть соблюдены достаточно хорошо в целом ряде случаев, особенно при применении так называемых экранированных ламп, обладающих большим внутренним сопротивлением и малой проницаемостью. (Для примера мы рассмотрели также одну схему, в которой анодная реакция играет принципиальную роль, — схему Фрюхгауфа.)

Поскольку мы пренебрегаем анодной реакцией, мы можем отказаться от рассмотрения семейства характеристик и ограничиться рассмотрением только одной характеристики и только одного из основных параметров лампы — именно крутизны характеристики. (Относительно двух других параметров мы, отказываясь от учета анодной реакции, заранее предположили, что один из них — D — очень мал, а другой — R_i — очень велик.) Но, для того чтобы применить математический анализ к схемам,

содержащим электронную лампу, мы должны выразить аналитически характеристику электронной лампы, т. е. аппроксимировать ее какой-то аналитической кривой¹⁾. Наиболее обычный путь — это изображение функции $I_a = \varphi(V_g)$ при помощи полинома, содержащего целые степени V_g . При помощи такого полинома, состоящего из нескольких членов, мы, конечно, не сможем достаточно точно аппроксимировать нашу действительную характеристику во всей области изменений V_g , но определенные интересующие нас участки характеристики во многих случаях могут быть удовлетворительно аппроксимированы небольшим числом членов и наиболее типичные черты этих участков характеристики могут быть переданы при помощи полинома третьей или пятой степени с достаточной точностью. Поэтому часто при изображении характеристики лампы в виде полинома ограничиваются либо третьей, либо пятой степенью V_g . Соображения, которые заставляют в некоторых случаях применять полиномы пятой степени (а иногда и высшей), а в некоторых позволяют ограничиться третьей степенью, становятся ясными при рассмотрении конкретных примеров, а сейчас мы выясним лишь, какие свойства характеристики зависят от тех или других степеней V_g .

Через V_g мы обозначим переменное напряжение на сетке лампы, отсчитываемое от постоянного сеточного смещения. Следовательно, при отсутствии переменного напряжения $V_g = 0$. Значение $V_g = 0$ соответствует «рабочей точке характеристики», и

$$I_a = \varphi(V_g) = I_0 + S_1 V_g + S_2 V_g^2 + S_3 V_g^3 + S_4 V_g^4 + S_5 V_g^5. \quad (558)$$

Здесь I_0 — «нулевой» ток, т. е. анодный ток в «рабочей точке», при отсутствии переменного напряжения на сетке. Соответствующим выбором координат мы всегда можем избавиться от этого члена и поэтому в дальнейшем мы не будем его писать. Далее, так как

$$S(V_g) = \frac{d^2 I_a}{dV_g^2} = S_1 + 2S_2 V_g + 3S_3 V_g^2 \quad \text{и} \quad S(0) = S_1, \quad (558a)$$

1) Следует отметить, что для применения математического анализа к вопросам колебаний отнюдь не необходимо знать аналитические выражения функций, входящих в дифференциальные уравнения, в частности аналитическое выражение характеристики. Для решения ряда основных вопросов физики колебаний (например для решения вопроса о количестве и устойчивости периодических движений) нам иногда достаточно знать лишь некоторые общие свойства кривой, представляющей характеристику, например число максимумов и минимумов, наличие насыщения и т. д. (см., например, работу Льенара [59], о которой мы уже упоминали).

Эти результаты, которые, правда, не дают необходимых для практических задач количественных характеристик колебательных процессов, в известной мере являются более надежными, чем, например, результаты, полученные при аппроксимировании характеристики полиномами. В последнем случае сам аппроксимирующий аппарат может вносить существенные искажения в картину возможных движений.

Заметим, что и количественные характеристики колебательных процессов часто с большой точностью могут быть получены, если мы будем при вычислениях непосредственно пользоваться характеристикой лампы, не аппроксимируя ее предварительно при помощи тех или других аналитических выражений.

Преимуществом аппроксимации при помощи простых полиномов, которой мы довольно широко пользуемся в настоящей книге, является возможность при помощи сравнительно простых математических выкладок получить легко обозримые и вместе с тем с качественной стороны достаточно близко совпадающие с экспериментальными данными результаты.

то S_1 есть крутизна характеристики в рабочей точке. Так как при нормальных условиях работы лампы рабочую точку устанавливают на поднимающейся части характеристики, то обычно $S > 0$. Далее, наличие нечетных членов в выражении (558a) обусловлено несимметричностью характеристики относительно рабочей точки, так как только при наличии нечетных членов в характеристике $S(V_g) \neq S(-V_g)$. Поэтому, если рабочая точка соответствует средней, симметричной точке характеристики, в обе стороны от которой крутизна изменяется примерно симметрично, то четные члены в ряде (558) [или нечетные в ряде (558a)] можно опустить. Таким образом в случае симметричного положения рабочей точки на характеристике можно изображать характеристику при помощи полинома:

$$I_a = S_1 V_g + S_3 V_g^3 + S_5 V_g^5, \quad (559)$$

и тогда

$$S(V_g) = \frac{dI_a}{dV_g} = S_1 + 3S_3 V_g^2 + 5S_5 V_g^4. \quad (560)$$

Если же ограничиться полиномом третьей степени, то

$$I_a = S_1 V_g + S_3 V_g^3 \quad (561)$$

и

$$S(V_g) = S_1 + 3S_3 V_g^2. \quad (562)$$

Чтобы в этом случае наступало насыщение, которому при нашей аппроксимации соответствует не насыщение, а загиб кривой $\psi(V_g)$, нужно, чтобы $S_3 < 0$. Крутизна характеристики обращается в нуль в точках, которые определяются из условия:

$$S_1 + 3S_3 V_g^2 = 0,$$

откуда

$$V_g^2 = -\frac{S_1}{3S_3}.$$

Это значение напряжения, при котором наступает насыщение в анодном токе, т. е. которому соответствует загиб в выбранной нами характеристике, называется напряжением насыщения V_s ¹⁾, следовательно, $S_3 = -\frac{S_1}{3V_s^2}$, и характеристика может быть изображена в виде:

$$I_a = S_1 V_g - \frac{S_1}{3V_s^2} V_g^3 = S_1 V_g \left(1 - \frac{V_g^2}{V_s^2}\right). \quad (561')$$

Так как при $V_g > V_s$ крутизна характеристики, определяемой выражением (560), сразу изменяет знак (характеристика «загибается»),

1) Напряжением насыщения обычно называют то напряжение, которое нужно приложить к сетке лампы, чтобы анодный ток изменялся от нуля и до тока насыщения. Мы же назвали напряжением насыщения то напряжение, которое соответствует изменению напряжения от средней точки и до тока насыщения, т. е. введенное нами напряжение насыщения примерно вдвое меньше того, которое обычно указывают для лампы.

чего в действительных характеристиках обычно нет (кроме случая диатронного эффекта, о чем мы будем говорить отдельно), то аппроксимирование характеристики лампы выражением (558) годится только для средней рабочей части характеристики, т. е. для $|V_g| < V_s$. Легко видеть, что в рассматриваемой характеристике наибольшая крутизна соответствует рабочей точке, т. е. значению $V_g = 0$. Таким образом при помощи полинома с членами первой и третьей степени можно изобразить характеристику лампы (и вообще некоторую нелинейную зависимость), обладающую следующими основными чертами. Рабочая точка соответствует симметричной точке характеристики, и крутизна

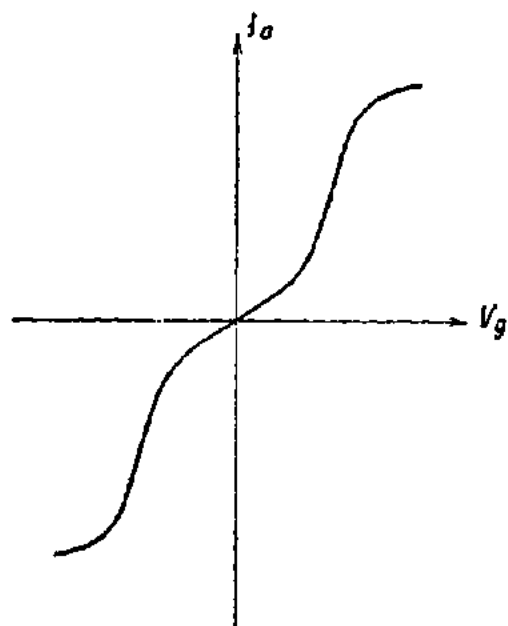


Рис. 341.

характеристики в обе стороны от рабочей точки монотонно уменьшается вплоть до тока насыщения. В этих точках производная меняет знак в идеализированной характеристике (в реальных же характеристиках лампы это обычно не имеет места).

Аппроксимировать характеристику полиномом (558), продолженным до члена пятой степени, имеет смысл только при $S_3 < 0$, так как в противном случае при $S_3 > 0$ вообще не наступило бы насыщения — сила тока возрастала бы до бесконечности с возрастанием V_g . Если и $S_3 < 0$ и $S_5 < 0$, то ничего принципиально нового в свойства характеристики член пятой степени не вносит. Попрежнему наибольшая крутизна соответствует рабочей точке, т. е. значению $V_g = 0$. Если же

при $S_3 < 0$ взять $S_5 > 0$, то свойства характеристики существенно изменятся. Действительно, в этом случае

$$S(V_g) = S_1 + 3S_3 V_g^2 - 5S_5 V_g^4 \quad (563)$$

(причем здесь уже $S_3 > 0$ и $S_5 > 0$), т. е. наибольшей крутизной характеристика обладает не в рабочей точке, а на некотором расстоянии по обе стороны от нее. Это обстоятельство играет существенную роль в колебательных схемах с электронной лампой, например обуславливает жесткое установление колебаний. Таким образом при помощи полинома, содержащего нечетные степени до пятой включительно, можно изобразить характеристику, обладающую следующими основными чертами. Рабочая точка соответствует симметричной точке характеристики, и крутизна характеристики сначала в обе стороны возрастает, а затем начинает уменьшаться и падает до нуля (причем изменение крутизны в обе стороны от рабочей точки происходит симметрично). Такую характеристику (рис. 341), симметричную и с возрастающей на некотором участке по обе стороны от рабочей точки крутизной, можно осуществить на практике при помощи некоторых специальных схем, содержащих две лампы. С помощью же одной лампы практически может быть осуществлен с достаточной точностью только первый из двух

рассмотренных симметричных случаев, именно случай монотонного убывания крутизны характеристики в обе стороны от рабочей точки.

Рассмотренные нами симметричные случаи являются довольно специальными случаями. В большинстве случаев практики приходится иметь дело с большей или меньшей несимметрией характеристики; для учета этой несимметрии нужно, очевидно, ввести четные члены в полном, с помощью которого аппроксимирована характеристика. Наличие четных членов в характеристике может совершенно сгладить указанные выше отклонения во внешнем виде характеристики, которые связаны с присутствием или отсутствием члена пятой степени в изображающем характеристику полиноме. В этом легко убедиться при

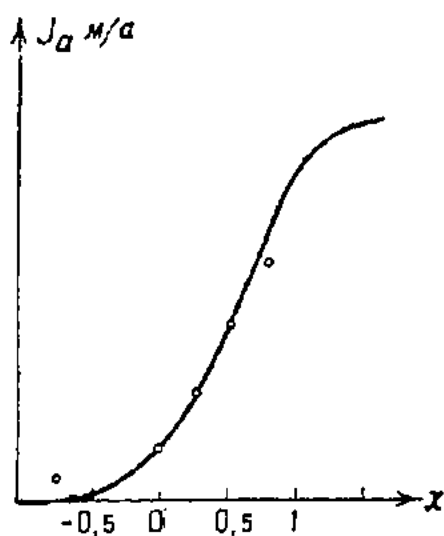


Рис. 342.

Характеристика лампы П-7. Кругами обозначены точки, вычисленные по формуле $I_a = 0,95 + 3,35x + 2,25x^2 - 1,5x^3$.

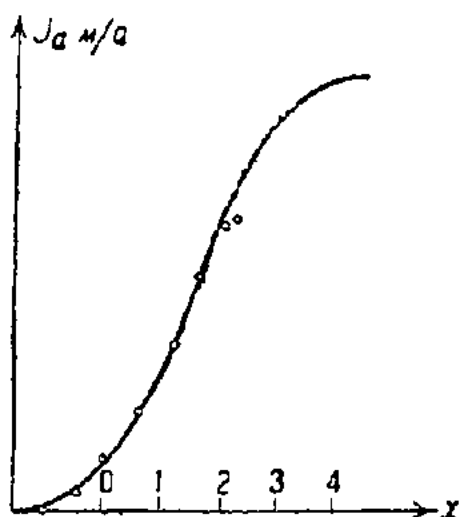


Рис. 343.

Характеристика лампы М-28. Кругами обозначены точки, вычисленные по формуле $I_a = 26,4 + 40,65x + 15x^2 + 2x^3 - 1,2x^5$.

рассмотрении приводимых нами на рис. 342 и 343 примеров характеристик некоторых ламп и их аналитического выражения при помощи полиномов (эти примеры заимствованы нами из ст. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси в «Журнале технической физики», т. II, стр. 788).

Однако при рассмотрении тех задач, которые нас главным образом интересуют, именно при исследовании периодических процессов, близких к синусоидальным, четные члены полинома, изображающего характеристику, часто не играют существенной роли, и их можно не учитывать [119]. Поэтому при аппроксимировании характеристики всегда можно изобразить ее в виде суммы функций четной и нечетной, отбросить четную функцию и принимать во внимание только нечетную функцию, в частности в случае аппроксимирования характеристики в виде полинома принимать во внимание только члены нечетных степеней. Следовательно, хотя реальную характеристику лампы в большинстве случаев невозможно достаточно точно аппроксимировать при помощи полиномов (559) или (561), но для изучения тех вопросов, которые нас будут интересовать, можно ограничиться рассмотрением

одного из двух типов симметричной характеристики, именно, либо характеристики

$$I_a = S_1 V_g - S_3 V_g^3,$$

либо характеристики

$$I_a = S_1 V_g + S_3 V_g^3 - S_5 V_g^5,$$

где

$$S_1 > 0, \quad S_3 > 0 \quad \text{и} \quad S_5 > 0.$$

При таком аппроксимировании экспериментально снятых характеристик возникает вопрос о том, какой именно полином, с членами до третьей степени или до пятой, следует применить. В том случае, когда рабочая точка совпадает с симметричной точкой характеристики, четные члены в полиноме отсутствуют, и вопрос решается тем, убывает или возрастает крутизна характеристики в обе стороны от рабочей точки. Если же рабочая точка смещена относительно симметричной точки, то наличие четных членов маскирует влияние члена пятой степени и поэтому затрудняет решение вопроса о выборе полинома для аппроксимирования характеристики. Для решения вопроса в этом случае следует воспользоваться уже отмеченным нами обстоятельством, именно тем, что всякую функцию можно представить как сумму четной и нечетной функций. Действительно,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

причем для решения интересующих нас вопросов существенной является только вторая, нечетная часть. Чтобы определить вид этой нечетной части, нужно, очевидно, сложить две функции — снятую экспериментально функцию $f(x)$ и функцию $[-f(-x)]$, которая получится из данной, если направления обеих координатных осей изменить на обратные. В результате этого построения мы получим некоторую нечетную функцию, которая представляет собой нечетную часть исходной функции $f(x)$ (рис. 344). По виду этой нечетной части мы так, как указано выше, можем заключить, следует ли для аппроксимирования данной функции применять члены пятой степени или нет. Если полученная при помощи построения нечетная часть интересующей нас функции имеет монотонно убывающую в обе стороны от рабочей точки крутизну (рис. 344), то для аппроксимирования функции достаточно члена третьей степени. Если же крутизна полученной нечетной части в обе стороны от рабочей точки сначала возрастает, а затем уже монотонно убывает (рис. 345), то для аппроксимирования такой характеристики необходим член пятой степени. Если же, наконец, изменение крутизны нечетной части имеет более сложный характер, например сначала в обе стороны от рабочей точки убывает, затем возрастает и затем снова убывает, то, чтобы передать эти черты характеристики, нужно было бы ввести члены еще более высокой (в нашем примере седьмой) степени. Таким образом как для симметричной, так и для несимметричной характеристики, снятой экспериментально, мы можем решить вопрос о том, какие именно нечетные члены должны содержаться в полиноме, аппроксимирующем эту характеристику.

Коэффициенты полинома (558), аппроксимирующего характеристику лампы, являются величинами разных размерностей в абсолютной (или практической) системе единиц. Так, S_1 имеет размерность тока, деленного на напряжение ($i \cdot v^{-1}$), т. е. размерность проводимости. Коэффициент S_2 имеет размерность $i \cdot v^{-2}$ и т. д. Поэтому, сравнивая между собой эти коэффициенты, мы будем получать разные результаты, если будем пользоваться разными масштабами (разными единицами). Без дальнейшего не имеют смысла утверждения, что коэффициенты S_1, S_2, \dots одинакового порядка, что один мал по сравнению с другим и т. п. Эти неудобства сразу отпадут, и мы получим возможность сравнивать между собой все коэффициенты полинома, если сделаем их все величинами

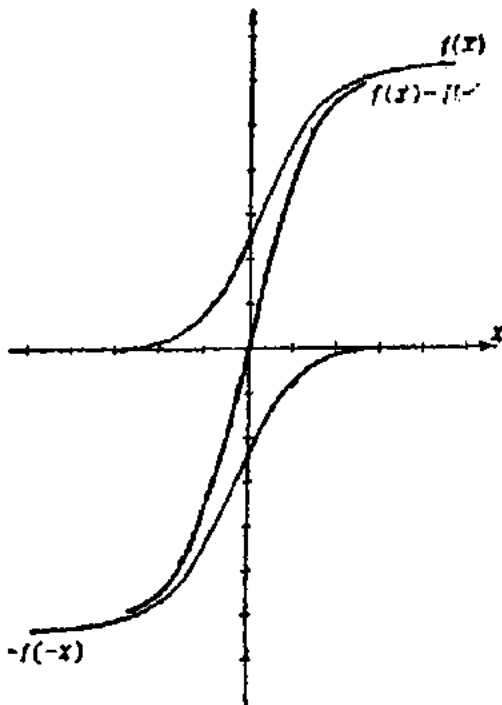


Рис. 344.

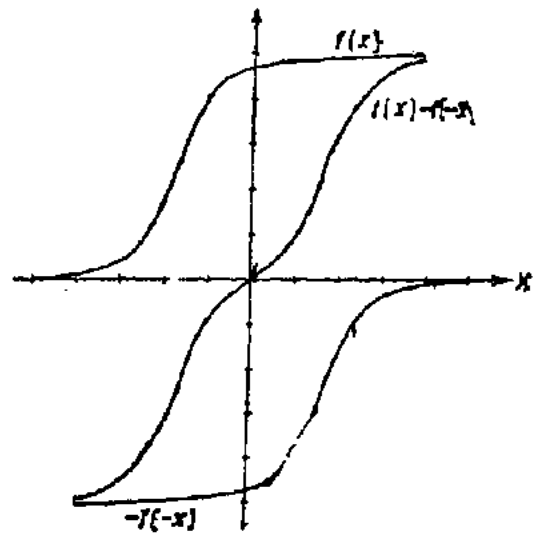


Рис. 345.

одной и той же размерности. Но это возможно только в том случае, когда величина, по степеням которой расположен полином, имеет размерность нуль. Мы можем этого достигнуть, если будем писать в полиноме не напряжение на сетке V_0 , измеренное в каких-либо единицах, например вольтах, а отношение этого напряжения к какому-либо определенному напряжению, постоянному для рассматриваемой задачи. В качестве такого «естественного масштаба» напряжений в нашем случае удобнее всего взять напряжение насыщения лампы V_s и к нему относить все напряжения на сетке лампы. Обозначая это «безразмерное» напряжение через v , мы должны положить $v = \frac{V_0}{V_s}$ или $V_0 = v \cdot V_s$. В таком случае полином, изображающий характеристику, может быть написан так:

$$I_a = V_s (S_1 v + S_2 V_s v^2 + S_3 V_s^2 v^3 + \dots). \quad (564)$$

Если мы обозначим $S_1 = \alpha_1$; $S_2 V_s = \beta_1$; $S_3 V_s^2 = \gamma_1$ и т. д., то мы получим полином:

$$I_a = V_s (\alpha_1 v + \beta_1 v^2 + \gamma_1 v^3 + \delta_1 v^4 + \varepsilon_1 v^5 + \dots), \quad (565)$$

коэффициенты которого все имеют одинаковую размерность, именно размерность приводимости. Теперь эти все коэффициенты можно сравнивать между собой, и имеет полный смысл говорить, например, о том, что они все одного порядка. Только для такого случая имеет содержание высказанное нами выше утверждение, что мы изображаем характеристику лампы не в виде сходящегося ряда, а в виде полинома, все коэффициенты которого суть величины одинакового порядка. Легко убедиться, что это утверждение не только имеет содержание, но и справедливо, например, в случае аппроксимирования характеристики в виде полинома третьей степени. Действительно, если

$$I_a = V_s (a_1 v + \gamma_1 v^3), \quad (565a)$$

то для точки, в которой наступает насыщение,

$$S(v_s) = \frac{dI_a}{dV_g} = (a_1 + 3\gamma_1 v^2) = 0,$$

а так как в этой точке по самому определению «безразмерное напряжение» v должно быть равно единице, то мы получаем такое соотношение между a_1 и γ_1 :

$$a_1 = -3\gamma_1.$$

Как видим, это величины одинакового порядка. Если мы введем это значение γ_1 в выражение (565a) для I_a , то мы получим уравнение характеристики, содержащее только один параметр a :

$$I_a = a V_s \left(v - \frac{v^3}{3} \right),$$

и крутизна характеристики выразится так:

$$S(v) = a(1 - v^2).$$

В качестве аналитического выражения зависимости между напряжением и током в электронной лампе иногда применяют также функцию arctg , которая в своих основных чертах совпадает с обычной характеристикой трехэлектродной лампы [31]. В том случае, когда рабочая точка совпадает со средней точкой характеристики лампы (т. е. когда характеристика лампы симметрична относительно рабочей точки), зависимость между напряжением на сетке V_g и анодным током I_a может быть при помощи функции arctg выражена следующим образом:

$$I_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{\pi} \text{arctg} \frac{\pi V_g}{V_s},$$

где I_s — ток насыщения, а V_s — напряжение насыщения. Крутизна характеристики в этом случае выражается так:

$$S = \frac{dI_a}{dV_g} = \frac{I_s}{V_s} \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi V_g}{V_s} \right)^2}$$

В случае симметричной характеристики S будет наибольшей в рабочей точке, при $V_g = 0$. Для того чтобы учесть несимметричность характеристики, нужно рассматривать «смещенную» функцию arctg (т. е. помимо переменного напряжения ввести еще некоторое постоянное смещение V_0).

Мы рассматривали все время «нормальную» характеристику лампы, т. е. такую характеристику, вид которой обусловлен электронами, испускаемыми нитью и движущимися от нити к аноду. Однако внутри лампы могут появиться не только электроны, вылетающие из накаленной нити, но и так называемые вторичные электроны, выбиваемые из колодных электродов (сетки и анода) ударяющимися в них первичными электронами. Это явление выбивания вторичных электронов с поверхности металла в результате ударов первичных электронов — так называемый динаatronный эффект — становится заметным при достаточно больших скоростях первичных электронов. Дальнейшее поведение выбитых вторичных электронов зависит от характера того электрического поля, в которое эти электроны попадают. В том случае, если, например, напряжение на сетке положительно и близко по величине к анодному напряжению, некоторая часть вторичных электронов, выбитых из анода, будет перелетать от анода к сетке. При дальнейшем увеличении положительного напряжения на сетке все большее и большее число вторичных электронов будет улетать от анода к сетке. Так как эти электроны движутся в направлении, противоположном направлению движения электронов, образующих анодный ток, то увеличение числа улетающих с анода вследствие динаatronного эффекта электронов уменьшает величину анодного тока. Следовательно, в некоторой области положительных напряжений на сетке увеличение сеточного напряжения вызывает уменьшение анодного тока. Этой области соответствует падающий участок характеристики анодного тока. Такие же падающие участки, обусловленные динаatronным эффектом, встречаются и в характеристиках сеточного тока или в характеристиках анодного тока лампы с защитной сеткой. В этом последнем случае падающий участок характеристики особенно легко может быть реализован.

Для того чтобы аппроксимировать этот падающий участок характеристики, обычно бывает достаточно применить полином, содержащий члены до третьей степени, причем, так как характеристика в этом случае не возрастает, а падает, коэффициенты должны быть взяты обратных знаков по сравнению с теми, которые мы брали для обычной характеристики, т. е. S_1 должно быть отрицательно, а S_2 — положительно. Кроме того, значение S_3 в этом случае определяется по напряжением насыщения, а теми напряжениями, при которых начинается и прекращается спадение анодного тока.

Мы особенно подробно остановились на электронной лампе и ее свойствах потому, что она является наиболее распространенным среди тех приборов, при помощи которых могут быть осуществлены электрические автоколебательные системы. С точки зрения интересующих нас вопросов наиболее важным свойством электронной лампы является *нелинейная зависимость* между напряжением на сетке лампы и током

в анодной цепи лампы, т. е. то обстоятельство, что лампа, рассматриваемая как электрический проводник, *не подчиняется закону Ома*. Этим же самым важным для нас свойством обладает в достаточной степени не только электронная лампа, но и ряд других электрических проводников, которые принято называть «неомическими проводниками». Таковы, например, вольтова дуга, неоновая лампа, контактные детекторы, прерыватель Венельта и т. д.

В механических системах трение играет такую же роль, как сопротивление в электрических системах, и в механических системах закону Ома будет соответствовать такой закон трения, при котором сила трения прямо пропорциональна скорости. Поэтому среди механических систем нас интересуют главным образом такие, которые не подчиняются этому закону трения. Как известно, этому закону во всяком случае не подчиняются системы, в которых имеет место так называемое твердое трение, т. е. трение сухих или смазанных твердых поверхностей друг о друга.

В заключение мы рассмотрим одну из схем включения электронной лампы. Это — так называемая схема усиления на сопротивлениях (рис. 346), которая входит как элемент во многие из рассмотренных нами схем.

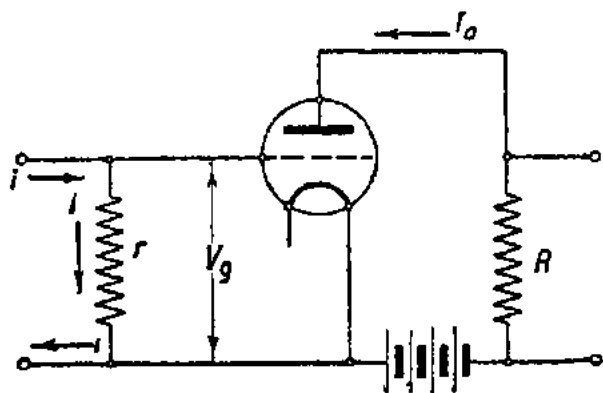


Рис. 346.

К сетке лампы подводится некоторое напряжение V_g , которое задается, например, током i , текущим в сопротивлении r . Снимается же напряжение с сопротивления R , включенного в анодную цепь лампы. Пока напряжение на сетке отсутствует, через анодную цепь лампы течет ток определенной силы и на сопротивлении R падает определенное напряжение. Когда к сетке под-

водится напряжение V_g , сила тока в анодной цепи изменяется и вместе с тем изменяется и падение напряжения на сопротивлении R . Это *изменение* напряжения, обусловленное подачей на сетку напряжения V_g , и следует рассматривать как напряжение V_a , даваемое усилителем.

Для случая, когда напряжения на сетке лампы достаточно малы, можно считать, что характеристика лампы прямолинейна, или, иначе говоря, при разложении в ряд функции $\varphi(V_g)$ ограничиться одним первым членом. В этом случае легко установить связь между подводимым к сетке напряжением V_g и снимаемым с анода напряжением V_a . Если крутизну прямолинейной части характеристики обозначить через S_0 , то, принимая во внимание сказанное выше, мы можем написать:

$$I_a = S V_{st} = S (V_g + D V_a). \quad (566)$$

Но V_a — переменная часть напряжения на аноде может быть выражена через силу анодного тока — это есть падение напряжения в сопротивлении R . Следовательно,

$$V_a = - R I_a; \quad (67)$$

знак минус взят потому, что при возрастании анодного тока напряжение на аноде лампы падает. Подставляя значение V_a из (567) в выражение для I_a (566), получаем:

$$I_a = S(V_g - DR I_a),$$

откуда для I_a получаем:

$$I_a = \frac{S V_g}{1 + SDR},$$

и так как $|V_a|$ есть RI_a , то отношение напряжений снимаемого $|V_a|$ и подводимого $|V_g|$, т. е. коэффициент усиления усилительного каскада, выразится так:

$$k = \frac{RS}{1 + SDR},$$

причем $|V_a| = k|V_g|$.

Так как $SD = \frac{1}{R_i}$, то выражение для k можно записать иначе:

$$k = \frac{RS}{1 + \frac{R}{R_i}} = \frac{SR_i}{1 + \frac{R_i}{R}}. \quad (568)$$

Если R очень велико по сравнению с R_i , то

$$k = SR_i = \frac{1}{D}.$$

Поэтому величина $\frac{1}{D}$ называется усилительной постоянной лампы (обозначается буквой μ). При больших внешних сопротивлениях коэффициент усиления каскада тем больше, чем меньше проницаемость лампы.

Если, наоборот, R очень мало по сравнению с R_i , то $(1 + \frac{R}{R_i}) \approx 1$, и для коэффициента усиления получается другое, приближенное значение:

$$k \approx RS,$$

т. е. при малых внешних сопротивлениях коэффициент усиления каскада тем больше, чем больше крутизна характеристики лампы.

Что касается фазы напряжения на аноде по отношению к фазе на сетке, то легко видеть, что эти фазы противоположны, если мы говорим о напряжении на сетке относительно нити и на аноде относительно нити. Когда на сетку подается положительное напряжение, то с анодного сопротивления R снимается усиленное в k раз отрицательное напряжение. Таким образом в рассматриваемой схеме лампа усиливает подводимые напряжения в « $-k$ раз», т. е. помимо усиления в k раз поворачивает фазу подводимого к сетке напряжения на 180° .

§ 2. Катодный осциллограф

В то время как электронная лампа является наиболее распространенным прибором для получения электрических колебаний, другой электронный прибор — катодный осциллограф, или трубка Брауна, — является сейчас одним из наиболее употребительных приборов для изучения электрических колебаний. Трубка Брауна может служить как для изучения формы колебаний, т. е. вида функции, изображающей зависимость колеблющейся величины от времени, так и для воспроизведения фазовых портретов электрической системы. В силу этого последнего обстоятельства катодный осциллограф представляет для нас особый интерес, и поэтому мы вкратце опишем его устройство и способы применения для указанных выше целей. Устройство современного катодного осциллографа в общих чертах таково (рис. 347). В сильно эвакуированном стеклянном (или частью стеклянном, частью металлическом) сосуде расположены электроды — катод, анод и две пары управляющих обкладок (часто трубки снабжаются еще добавочным электродом, так называемым цилиндром Венельта). Накаливаемый (а в некоторых типах холодный) катод является источником электронов, которые под действием высокого анодного напряжения приобре-

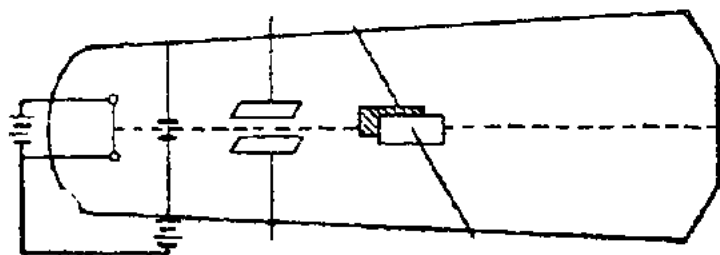


Рис. 347.

тают значительные скорости. Часть электронов пролетает сквозь малое отверстие, имеющееся в аноде, и образует узкий пучок электронов, который дополнительно фокусируется при помощи магнитных полей. Для получения более тонкого электронного пучка применяется и цилиндр Венельта. Сфокусированный пучок падает на флуоресцирующий экран, и на месте падения получается маленькое светящееся пятнышко. Но по дороге сфокусированный пучок должен проходить между двумя парами попарно параллельных пластин, причем обе пары перпендикулярны друг другу. Если к какой-либо паре этих управляющих пластин подвести некоторое напряжение, то между пластинами возникнет электрическое поле, которое будет отклонять пролетающие электроны. Под действием напряжения, подведенного к одной паре пластин, электронный пучок, а вместе с тем и светлое пятнышко на экране, будет перемещаться вверх и вниз, а под действием другой пары пластин он будет перемещаться вправо и влево.

Если светлое пятнышко будет перемещаться на экране достаточно быстро, то отдельные пятна будут сливаться и пятно в своем движении вычертит некоторую линию. Яркость пятна зависит от интенсивности пучка и от длительности его воздействия на экран, поэтому те участки кривой, по которым электронный пучок движется медленно, будут получаться яркими, а те, по которым пучок движется быстро, — бледными. При очень быстрых движениях электронного пучка он совсем не оставит никакого следа на экране (заметим кстати, что экран светится не только в то время, пока на него падает пучок

Если светлое пятнышко будет перемещаться на экране достаточно быстро, то отдельные пятна будут сливаться и пятно в своем движении вычертит некоторую линию. Яркость пятна зависит от интенсивности пучка и от длительности его воздействия на экран, поэтому те участки кривой, по которым электронный пучок движется медленно, будут получаться яркими, а те, по которым пучок движется быстро, — бледными. При очень быстрых движениях электронного пучка он совсем не оставит никакого следа на экране (заметим кстати, что экран светится не только в то время, пока на него падает пучок

электронов, а несколько дольше, — это так называемое послесвечение экрана).

Для того чтобы при помощи катодного осциллографа воспроизвести форму изучаемых колебаний, поступают следующим образом. К одной паре обкладок (например горизонтальной, вызывающей отклонение электронного пучка вверх и вниз) подводится то переменное напряжение, форма которого должна быть изучена. К другой паре обкладок (вертикальных, вызывающих отклонение вправо и влево) подводится какое-либо вспомогательное напряжение, монотонно изменяющееся со временем. Закон этого изменения должен быть заранее известен — это может быть, например, напряжение, снимаемое с обкладок конденсатора, разряжающегося на сопротивление. Под действием этого переменного напряжения электронный пучок перемещается справа налево. Таким образом на экране получается «временная развертка» изучаемого напряжения. Особенно удобно, когда вспомогательное напряжение линейно зависит от времени (этого можно достигнуть, применяя напряжение от релаксационных генераторов). Тогда на экране прямо, без всяких искажений, получается форма колебаний. Для того чтобы, пробежав один раз по экрану, электронный пучок оставил заметный след, он должен двигаться по экрану не слишком быстро. Если же, один раз пробежав по экрану, электронный пучок не оставляет заметного следа, то можно заставить пучок много раз прочерчивать одну и ту же кривую; для этого нужно возвращать его на место всякий раз после того, как он пробежал до конца экрана. Конечно, это возможно, только если изучаемый процесс периодический, и развертывающее напряжение после целого числа периодов процесса возвращается скачком к исходному значению.

При помощи катодного осциллографа можно воспроизводить не только форму колебаний, но и движение представляющей точки по фазовой плоскости x, y . Для этого нужно к одной паре обкладок подводить напряжения, пропорциональные переменной x (например пропорциональные напряжению на обкладках конденсатора контура), а к другой паре обкладок — напряжения, пропорциональные переменной y (например силе тока в контуре); при этом положение светящейся точки на экране будет в точности соответствовать положению представляющей точки на фазовой плоскости. Если состояние системы будет изменяться, то соответствующим образом будет изменяться и положение светящейся точки на экране, светящаяся точка будет вычерчивать на экране интегральную кривую, соответствующую данному начальному состоянию.

Но послесвечение экрана прекращается почти сразу после того, как прекратились удары электронов в данную точку, и поэтому вычерченная электронным пучком фазовая траектория очень быстро исчезает. Такую появившуюся на мгновение фазовую траекторию можно сфотографировать, но наблюдать ее визуальным способом неудобно. Для того чтобы полученная картина на фазовой плоскости сохранилась на экране долгое время, необходимо, чтобы пучок электронов все время, раз за разом, прочерчивал один и тот же кусок фазовой траектории. В известных случаях это условие соблюдается само собой — именно, когда мы на-

блюдаем периодический процесс. Тогда «представляющая точка» (светящееся пятно) снова и снова возвращается в исходное положение и вычерчивает ту же замкнутую кривую — предельный цикл. Таким образом при помощи трубки Брауна можно непосредственно воспроизвести предельный цикл на фазовой плоскости. Но представляет интерес получить на экране весь фазовый портрет, который содержит не только предельные циклы, но и все другие фазовые траектории, не соответствующие периодическим движениям. Для этого необходимо обеспечить возвращение «представляющей точки» (светящегося пятна) в исходное положение при помощи каких-либо специальных приспособлений. Приспособление должно состоять в том, чтобы, после того как «представляющая точка» прочертила весь экран или достигла стационарного состояния, она снова вернулась в исходное положение; для этого необходимо вернуть систему к тем же самым на-

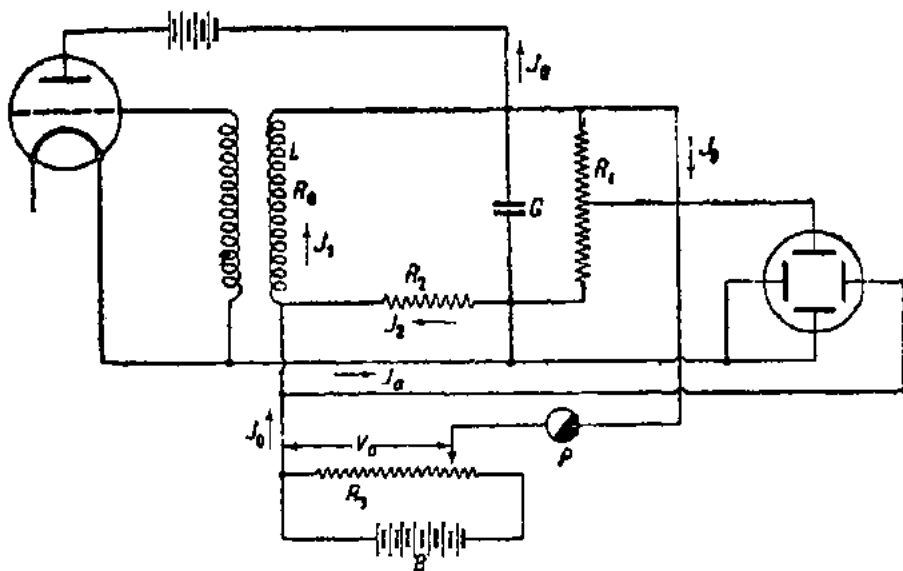


Рис. 348.

чальным условиям, что может быть достигнуто различными способами. Первые «фазовые портреты», полученные при помощи трубки Брауна, приведены в работе Г. А. Остроумова.

В. Бовшеверов^[11] разработал специальную схему для «зарисовки фазовых портретов» ламповых генераторов при помощи трубки Брауна. Схема эта приведена на рис. 348. В емкостную ветвь колебательного контура включено небольшое сопротивление R_2 , и падение напряжения на нем используется в качестве управляющего напряжения для одной пары обкладок трубки Брауна — отклонение электронного пучка, вызываемое этими обкладками, пропорционально, следовательно, q — силе тока в емкостной ветви. На другую пару обкладок трубки Брауна подводится напряжение от конденсатора. Однако все напряжение от конденсатора было бы слишком велико, так как при малом сопротивлении в колебательном контуре амплитуда напряжения на конденсаторе гораздо больше, чем амплитуда напряжения на сопротивлении. Поэтому напряжение на конденсаторе делится при помощи высокоомного потенциометра R_1 и только небольшая часть его подается на обкладки трубки. Следовательно, отклонения, вызываемые

этимися обкладками, пропорциональны q — заряду конденсатора (или V — напряжению на конденсаторе). Сопротивление R_1 так велико, что его шунтирующим влиянием на колебательный контур можно пренебречь. Наоборот, сопротивления R_2 — омическое сопротивление катушки h — и R_3 достаточно малы, и поэтому в присутствии всех этих сопротивлений колебательный контур обладает все же не слишком большим затуханием.

Для задания различных начальных условий параллельно колебательному контуру включается низкоомный потенциометр R_3 , к которому присоединена батарея B . Потенциометр присоединен к контуру через быстро действующий выключатель P , который периодически разрывает цепь на небольшие промежутки времени. Пока выключатель замкнут, малое сопротивление R_3 сильно шунтирует контур, так что даже при самой сильной обратной связи он остается аperiodическим. За время, пока выключатель остается включенным, в контуре успевает установиться постоянный ток и постоянное напряжение на обкладках конденсатора. Значение тока и напряжения, которые устанавливаются в схеме, зависят от величины V_0 . Эти постоянные значения могут быть определены точно, но особенно легко найти их приближенные значения, воспользовавшись тем, что $R_2 \ll R_1$ и $R_3 \ll R_1$. В силу этих соотношений почти весь ток от потенциометра I_0 течет через катушку самоиндукции L . То же самое относится и к току I_2 . Поэтому $I_2 \ll I_0$ и приближенно $I_1 = I_2 + I_0$. С другой стороны, в ветви, состоящей из R_2 и R_1 , почти все напряжение падает на R_1 , и, значит, приближенно напряжение на конденсаторе $V_c = V_0$. Следовательно, при замкнутой цепи прерывателя P на обе пары пластинок подаются сравнительно небольшие напряжения: на первую пару — определенная доля напряжения батареи (приходящаяся на R_1), на вторую пару — еще меньшее напряжение, приходящееся на R_2 . Поэтому, пока выключатель P замкнут, электронный пучок почти не отклоняется и образует размытое светлое пятно в середине экрана.

В момент выключения выключателя P происходит следующее: цепь тока I_0 выключается, но I_1 — ток в цепи самоиндукции L — не может измениться скачком. Следовательно, в цепи сопротивления R_2 ток должен скачком измениться на величину I_0 ; только при этом условии ток I_1 не изменится при выключении P . (Этот добавочный ток I_0 в ветви R_2 вызван появлением ЭДС самоиндукции, которая возникает скачком на зажимах L в момент выключения P .)

Напряжение же на зажимах конденсатора не может измениться скачком и останется прежним (примерно равным V_0). Таким образом в момент выключения P в контуре скачком установятся начальные условия $V_c = V_0$ и $i = I_0$ и дальше в схеме будет происходить процесс, определяемый этими начальными условиями. Что же будет при этом происходить в осциллографе? В момент размыкания цепи прерывателя напряжение на первой паре обкладок не изменится и будет, как и раньше, равняться определенной доле напряжения на конденсаторе; напряжение же на второй паре обкладок в момент размыкания изменится скачком и сразу станет равным $R_2 I_0$. В дальнейшие моменты, при разомкнутом прерывателе, напряжение на первой

паре пластин будет пропорционально напряжению на конденсаторе, напряжение на второй паре — току в колебательном контуре.

Замыкание цепи прерывателя шунтирует колебательный контур малым сопротивлением R_3 , и система весьма быстро приходит в исходное положение. При новом размыкании процесс будет опять начинаться с тех же начальных условий и т. д. На осциллографе при замыкании «представляющая точка» практически мгновенно будет возвращаться

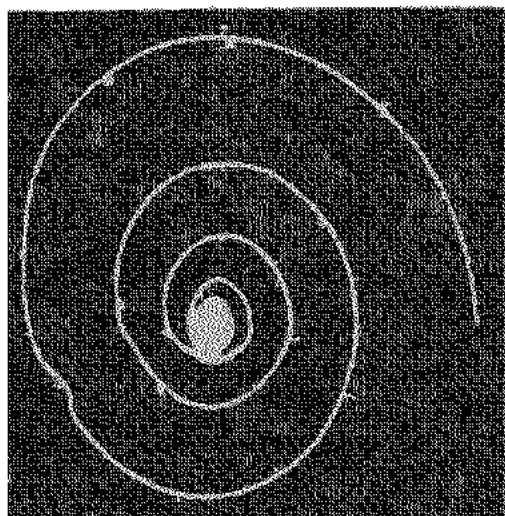


Рис. 349 А.

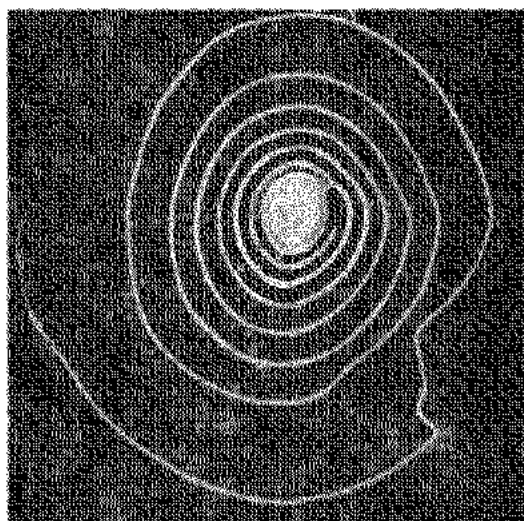


Рис. 349 В

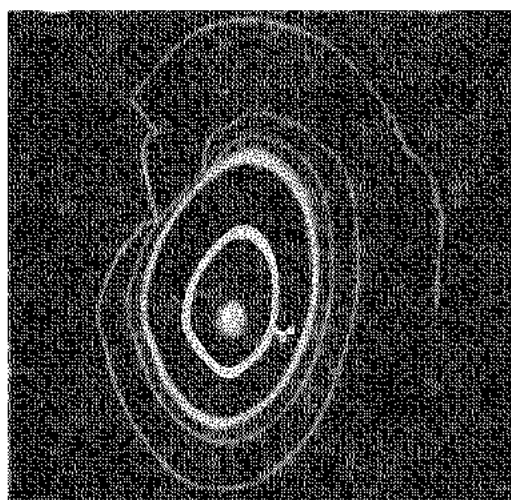


Рис. 349 С.

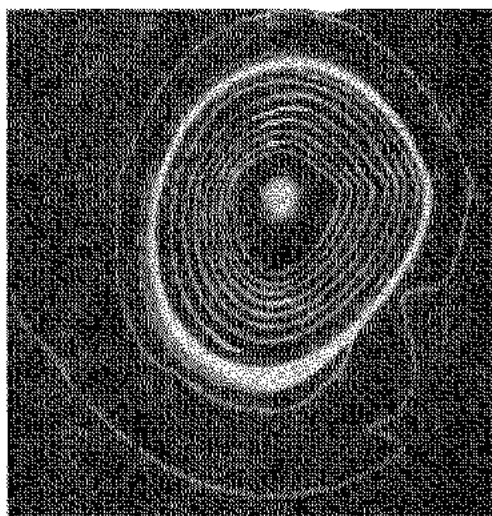


Рис. 349 D.

в прежнее положение; при размыкании — снова прочерчивать ту же самую кривую и т. д.

Изменяя V_0 , мы тем самым изменяем I_0 и осуществляем различные начальные условия.

Так как при выключении P отсоединяется малое сопротивление R_3 , шунтирующее колебательный контур, то затухание контура сразу резко уменьшается — он становится колебательным, и вся схема при достаточно сильной обратной связи может быть сделана автоколебательной.

Описанным способом были сняты «фазовые портреты» лампового генератора. Четыре таких портрета приведены на рис. 349. Эти

фотографии¹⁾ соответствуют четырем различным значениям обратной связи в ламповом генераторе при жестком режиме. На рис. 350 эти значения обратной связи отмечены соответствующими буквами. Рис. 349 *A* дает фазовый портрет в отсутствие обратной связи — обычная картина колебательной системы с большим затуханием. Рис. 349 *B* соответствует наличию обратной связи, хотя и значительной, но все же не достигающей критической. Фазовый портрет дает ту же картину, но с меньшим затуханием (затухание меньше из-за обратной связи). Рис. 349 *C* дает фазовый портрет системы с обратной связью, превосходящей критическую, но не дающей еще самовозбуждения.

Фазовый портрет содержит два предельных цикла, причем внешний цикл устойчив, а внутренний неустойчив. Для того чтобы сфотографировать неустойчивый предельный цикл, поступали следующим образом. Начальные условия подбирались так, что они как раз соответствовали некоторой точке, лежащей на устойчивом предельном цикле. Так как

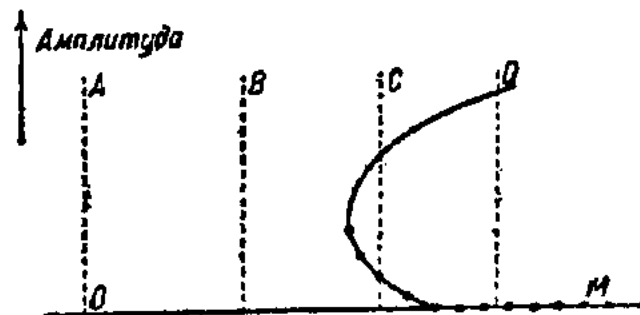


Рис. 350.

у самого предельного цикла интегральные кривые скручиваются очень медленно, то за время одного движения представляющая точка не успевает сколько-нибудь заметно отойти от предельного цикла. Новое движение опять начинается с той же точки на предельном цикле и снова не успевает заметно удалиться от предельного цикла. В конечном счете на фотографии получается изображение неустойчивого предельного цикла. Необходимо иметь в виду, что фотография рис. 349 *C* (так же как и следующая, рис. 349 *D*), представляет собой, в сущности, комбинацию из двух фотографий, соответствующих двум различным начальным состояниям — одному, лежащему вне устойчивого предельного цикла, и другому, лежащему как раз на неустойчивом предельном цикле. Рис. 349 *D* соответствует сильной обратной связи, при которой имеет место самовозбуждение и существует только один устойчивый предельный цикл. Этот портрет, как и предыдущий, получен при помощи комбинаций двух фотографий для двух различных начальных состояний — одного, лежащего вне предельного цикла, и другого, лежащего внутри него.

¹⁾ На всех приведенных фотографиях движение «представляющей точки» происходит против часовой стрелки, а не по часовой стрелке, как мы привыкли обычно изображать.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques*, 3-e Série, Vol. 7 (1881); Vol. 8 (1882).
2. H. Poincaré, Oeuvres, Vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1928.
3. Lord Rayleigh, On Maintained Vibrations, *Philosophical Magazine*, Ser. 5, Vol. 15, p. 229, 1883.
4. Lord Rayleigh, Theory of Sound.
5. Koenigs, Recherches sur les substitutions uniformes, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883.
6. Koenigs, Recherches sur les équations fonctionnelles, *Annales de l'École Normale*, 1884.
7. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Mathematica*, Vol. 7.
8. H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1903.
9. H. Poincaré, Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, Vol. 13.
10. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthier-Villars, Vol. I (1892); Vol. II (1893); Vol. III (1899).
11. А. Япучов, Общая задача об устойчивости движения, Харьков 1892.
12. А. Ляпунов, Problème générale de la stabilité du mouvement, *Annales de Toulouse*, S. 2, Vol. IX, 1907.
13. I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mathematica*, Vol. 24, p. 1, 1901.
14. H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung, Leipzig, Hirzel, 1907.
15. E. Picard, Traité d'Analyse, Vol. III, Paris, Gauthier-Villars, 2 édition, 1908.
16. K. W. Wagner, Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger, Leipzig, Hirzel, 1910.
17. G. Birkhoff, Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques, *Bulletin de la Société Mathématiques de France*, Vol. 40, 1912.
18. H. Busch, Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik, Leipzig, 1913.
19. Rogowsky, Selbsterregte Schwingungen von Synchronmotoren, *Archiv für Elektrotechnik*, B. III, 1915.
20. Nichols, Theory of variable dynamical-electrical Systems, *Physical Review*, 1917.
21. A. Blondel, Sur les systèmes à oscillations persistantes et en particulier sur les oscillations entretenues par auto-amorçage, *Journal de Physique*, Vol. 9, p. 117, 1919.
22. A. Blondel, Amplitude de courant oscillant produit par les audions générateurs, *Comptes Rendus*, Vol. 169, 1919.
23. H. Abraham et E. Bloch, Mesures en valeur absolue des périodes des oscillations électriques de haute fréquence, *Annales de Physique*, Sér. 9, Vol. XII, p. 237, 1919.
24. H. Barkhausen, Die Vakuumröhre und ihre technische Anwendung, *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie*, 14, S. 27, 1919; 16, S. 82, 1920.
25. Hull, Das D natron, ein Vacuumröhre mit der Eigenschaft des negativen elektrischen Widerstandes, *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie*, 14, S. 47, 157, 1919.
26. H. G. Möller, Quantitative Behandlung der Schwingungen im Röhrengenerator mit Hilfe der Schwingkennlinien, *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie*, 14, S. 326, 1919.
27. B. van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibration, *Radio Review*, 1, p. 701, 1920.

28. H. Schunk und I. Zenneck, Ueber Schwingungskreise mit Eisenkernspulen, *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie*, 19, S. 170, 1922.
29. E. Appleton and B. van der Pol, On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator, *Philosophical Magazine* (6) 43, p. 177, 1922.
30. A. Robb, On a graphical solution of a class of differential equations occurring in wireless telegraphy, *Philosophical Magazine* (6) 43, p. 700, 1922.
31. G. Joss, Theorie des Elektronenröhrengenerators, *Annalen der Physik* (4) 69, S. 505, 1922.
32. N. Papalexi, Theorie des Elektronenröhrengenerators, Odessa 1922.
33. W. Hort, Technische Schwingungslehre, Berlin, Julius Springer, 1922.
34. E. Appleton and W. Greaves, On the Solution of the Representative Differential Equation of the Triode Oscillator, *Philosophical Magazine*, Ser. 6, 45, 1923.
35. W. Greaves, On a certain Family of Periodic Solutions of Differential Equations with Application to the Triode Oscillator, *Proceeding of the Royal Society*, Ser. A, 103, 516, 1923.
36. Krüger, Mechanische Schwingungssysteme mit Stossanregung, *Annalen der Physik*, B. 70, 291, 1923.
37. Schallreuter, Ueber Schwingungserscheinungen in Entladungsröhren, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1923.
38. H. Dulac, Sur les cycles limites, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. LI, Paris 1923.
39. H. Rukop, Reissdiagramme von Senderröhren, *Telefunken-Zeitung*, VI Jahrgang, Juni 1923, S. 27; September 1923, S. 20.
40. H. Rukop, Reissdiagramme von Senderröhren, *Zeitschrift für technische Physik*, V, S. 260, 299, 387, 441, 569, 1924.
41. W. Greaves, On the stability of the Periodic States of the triode oscillator, *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 22, p. 16, 1924.
42. W. Hort, Entstehung von Schwingungen durch nichtperiodische Kräfte, *Zeitschrift für technische Physik*, B. 5, S. 384, 1924.
43. Janet, Note sur une ancienne expérience d'électricité, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, Vol. 14, p. 1193, 1925.
44. H. et H. Cartan, Note sur la génération des oscillations entretenues, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, Vol. 14, p. 1196, 1925.
45. Lotka, Elements of Physical Biology, Baltimore, 1925.
46. Andrade, L'Horlogerie et Chronometrie, Paris 1925.
47. F. Ollendorf und W. Peters, Schwingungsstabilität Parallelarbeiten der Synchronmaschinen, *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, B. V, 1926.
48. F. Ollendorf, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Berlin, Springer, 1926.
49. E. Friedländer, Steuerungsvorgänge durch «Feldzerfall» und Kippschwingungen in Elektronenröhren, *Zeitschrift für technische Physik*, 7 Jahrgang, S. 481, 1926.
50. K. Heegner, Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, welche Selbstinduction nicht erhalten, *Zeitschrift für Hochfrequenztechnik*, B. 29, S. 151, 1927.
51. E. Friedländer, Ueber Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren, *Archiv für Elektrotechnik*, 17, S. 1, 103, 1927.
52. B. van der Pol, On relaxation oscillations, *Philosophical Magazine* (7) 2, p. 978, 1926.
53. B. van der Pol, Ueber Relaxationsschwingungen, *Zeitschrift für Hochfrequenztechnik*, 28, S. 178, 1926; 29, S. 114, 1927.
54. G. Iobst, Drei Beiträge über Schwingungserzeugung, *Telefunken-Zeitung*, N. 47, S. 11, 1927.
55. I. Namba and S. Namba, Study on the operation of the multivibrator, *Research of the Electrotechnical Laboratories* (Tokyo), N. 218, November, 1927.
56. D. Gabor, Fortschritte im Oscillographieren von Wanderwellen, besonders bei Hochspannung, *Forschungshefte der Studiengesellschaft für Hochspannungsanlagen*, H. 1, Berlin 1927.
57. P. Fatou, Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. LVI, p. 98, 1928.
58. M. Frommer, Singuläre Punkte, *Mathematische Annalen*, B. 99, 1928.

59. A. Lienard, Etude des oscillations entretenues, *Revue Générale d'Electricité*, Vol. 23, p. 901, 946, 1928.
60. А. Андронов, Прелезные циклы Пуанкаре и теория колебаний, VI съезд русских физиков, Госуд. изд., стр. 23—24, 1928.
61. B. van der Pol et M. van der Mark, Le battement du coeur considéré comme oscillation de relaxation et un modèle électrique du coeur, *Onde électrique*, 7 année, p. 365, 1928.
62. F. Tank und K. Graf, Entdämpfung und Schwingungserzeugung aperiodischer Systeme, *Helvetica Physica Acta*, Vol. I, fasc. 7—8, 1928.
63. E. Friedländer, Einige Berichtigungen und Ergänzungen zum Problem der Kippschwingungen, *Archiv für Elektrotechnik*, 20, S. 158, 1928.
64. G. Frühauf, Eine neue Schaltung zur Erzeugung von Schwingungen mit linearem Spannungsverlauf, *Archiv für Elektrotechnik*, 21, S. 471, 1929.
65. A. Andronow, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, *Comptes Rendus*, Vol. 189, p. 559, 1929.
66. F. Kirschstein, Zur Theorie des rückgekoppelten Röhrensenders, *Zeitschrift für Hochfrequenztechnik*, B. 33, S. 201, 1929.
67. F. Kirschstein, Ueber ein Verfahren zum graphischen Behandlung elektrischer Schwingungsvorgänge, *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 24, p. 730, 1930.
68. K. Heegner und I. Watanabe, Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, bei welchem die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist, *Zeitschrift für Hochfrequenz*, 34, S. 49, 1929.
69. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, Julius Springer, Dritte Auflage, 1930.
70. E. Kamke, Differentialgleichungen Reeller Funktionen, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1930.
71. A. Andronow und andere, Unstetige periodische Bewegungen und die Theorie des Multivibrators von Abraham und Bloch, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, S. 189, 1930.
72. С. Э. Хайкин, Непрерывные и разрывные колебания, *Журнал прикладной физики*, VII, вып. 6, 1930.
73. B. van der Pol, Oscillations sinusoidales et de relaxation, *Onde électrique*, 1930.
74. A. Andronow und andere, Zur Theorie des Mithnehmens von van der Pol § 2, Mathematische Grundlagen, *Archiv für Elektrotechnik*, B. XXIV, S. 99, 1930.
75. Н. Д. Папалекси, О некоторых современных проблемах в теории колебаний, *Ученые физическим наук*, т. XI, стр. 185, 1931.
76. W. Reichart, Entartungen sinusförmiger Schwingungen, *Elektrische-Nachrichten-Technik*, Vol. 8, S. 344, 1931.
77. E. Hollman, Ueber symmetrische Kippschwingungen, *Elektrische-Nachrichten-Technik*, 8, S. 449, 1931.
78. Desaix et P. Corbeiller, Sur une système électrique auto-entretenues, utilisant un tube a néon, *Comptes Rendus*, Vol. 193, p. 723, 1931.
79. Vecchiacchi, Multivibratore dissimetrico, *Nuovo Cimento*, 8, N. 9, 1931.
80. P. Le Corbeiller, Les systèmes auto-entretenues et les oscillations de relaxation, Paris, Hermann, 1931.
81. Rensuke Usui, Operating Mechanismus of negative resistance oscillators, *Journal Inst. Electr. Engineers* (Japan), July 1931, December 1931, March 1932.
82. V. Volterra, Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
83. P. Le Corbeiller, La mecanisme de la production des oscillations, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, Vol. 21, p. 697, 1932.
84. N. Kryloff et N. Bogoliùboff, Quelques exemples d'oscillations non linéaires, *Comptes Rendus*, Vol. 194, p. 957, 1932.
85. N. Kryloff et N. Bogoliùboff, Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones, Kieff 1932.
86. N. Kryloff et N. Bogoliùboff, Recherches sur la stabilité longitudinale des avions, Kieff 1932.
87. Н. М. Крылов и Н. И. Боголюбов, Основные проблемы нелинейной механики, *Известия Академии наук СССР*, VII серия, стр. 475, 1933.
88. H. Barkhausen und G. Hössler, *Zeitschrift für Hochfrequenztechnik*, B. 4, S. 41, 1933.

89. F. Tricomi, Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, Ser. II, Vol. 2, p. 1, 1933.

90. Н. Кайдановский и С. Хайкин, Механические релаксационные колебания, *Журнал технической физики*, III, 1933.

91. A. Andronow und andere, Zur Stabilität nach Liapunow, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, B. 4, S. 603, 1933.

92. Л. И. Мандельштам, Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники. Первая Всесоюзная конференция по колебаниям, сборник 1, стр. 5—31, Москва, ГТТИ, 1933.

93. А. А. Андронов, Математические проблемы теории автоколебаний, тот же сборник, стр. 32—71.

94. С. Э. Хайкин, Автоколебательные системы, тот же сборник, стр. 72—86.

95. Ю. В. Кобзарев, Устойчивость частоты автоколебательной системы, тот же сборник, стр. 117—122.

96. С. П. Стрелков, Маятник Фруда, *Журнал технической физики*, III, 1933.

97. Bascet, Self Induced Vibrations, *Transactions of American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics*, Vol. 1, N. 1, 1933.

98. Н. М. Крылов и Н. И. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, Москва—Ленинград, ОНТИ, 1934.

99. L. Pontrjagin und andere, Statistische Auffassung dynamischer Systeme, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 6, S. 1, 1934.

100. Г. Гаузе и другие, О периодических колебаниях численности популяции, *Известия Академии наук СССР*, VII серия, стр. 1531, 1934.

101. Den Hartog, Theory of vibrations, Mc Graw-Hill, New York, 1934.

102. P. Le Corbeiller, Calculs et remarques sur le rendement des machines, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, 23, p. 893, 1934.

103. Max Frommer, Ueber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln, *Mathematische Annalen*, B. 109, S. 395, 1934.

104. L. Pontrjagin, Ueber Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, B. 6, p. 14, 1934.

105. В. Юввинский, Об автоколебаниях системы, аналогичной язычку гармони и кларнета, *Журнал технической физики*, IV, стр. 1295, 1934.

106. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, IV, стр. 117, 1934.

107. L. Mandelstam, N. Papalex, A. Andronow, Exposé des recherches recentes sur les oscillations non lineaires, *Technical physics of the USSR*, Vol. 11, p. 81, 1935.

108. S. Chaikin et L. Lochakov, Oscillations «disciplinées» dans un circuit à capacité et self-induction, *Technical Physics of the USSR*, Vol. 11, p. 181, 1935.

109. А. А. Андронов и А. Г. Любима, Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркации» и «смене устойчивостей» к простейшим автоколебательным системам, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, V, стр. 296, 1935.

110. Н. П. Власов, Автоколебательная схема с однофазным асинхронным мотором, *Журнал технической физики*, V, стр. 641, 1935.

111. V. Bowschewegow, Experimentelle Untersuchung des Phasenganges autoschwingender Systeme, *Technical Physics of the USSR*, Vol. 11, p. 43, 1935.

112. Л. П. Холоденко, К теории схемы Фрюхауфа, *Technical Physics of the USSR*, Vol. II, p. 1, 1935.

113. А. Г. Майер, Исследование уравнений Релея и ван-дер-Поля, *Известия Горьковского университета*, вып. 2, 1936.

114. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, Теория «грубых» систем (подготавливается к печати).

115. Е. Леонтович и А. Майер, Об особых элементах, определяющих разбиение фазовой плоскости на траектории (подготавливается к печати).

116. А. Андронов и Е. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра (подготавливается к печати).

117. Л. Лошаков и С. Хайкин, Экспериментальное изучение электрических схем при случайных начальных условиях (подготавливается к печати).

118. А. Н. Крылов, О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения, *Известия Академии наук СССР*, стр. 1, 1933.
119. А. Баутин, Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл (подготавливается к печати).
120. С. Хайкин, О влиянии малых параметров на характер стационарных состояний динамической системы, *Журнал технической физики*, т. V, стр. 1389, 1935.
121. E. Friedländer, Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energie-Speichern, *Physikalische Zeitschrift*, 27 Jahrgang, S. 361, 1926.
122. J. Haag, Sur les oscillations auto-entretenues, *Comptes Rendus*, Vol. 199, p. 906—909, 1934.
123. J. Haag, Sur l'étude asymptotiques des oscillations de relaxation, *Comptes Rendus*, Vol. 292, p. 102—103, 1936.
124. J. Pomey, Analogies Mécaniques de l'électricité, Paris, Gauthier-Villars, 1921.
125. R. Tiemann, Kinetik pseudoharmonischer Reibungsschwingungen, *Zeitschrift für Angewandte Math. und Mechanik*, B. 9, p. 110, 1929.

НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z$$

$$\sin^3 z = \frac{3}{4} \sin z - \frac{1}{4} \sin 3z$$

$$\sin^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z$$

$$\sin^5 z = \frac{5}{8} \sin z - \frac{5}{16} \sin 3z + \frac{1}{16} \sin 5z$$

$$\sin^6 z = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2z + \frac{3}{16} \cos 4z - \frac{1}{32} \cos 6z$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z$$

$$\cos^3 z = \frac{3}{4} \cos z + \frac{1}{4} \cos 3z$$

$$\cos^4 z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z$$

$$\cos^5 z = \frac{5}{8} \cos z + \frac{5}{16} \cos 3z + \frac{1}{16} \cos 5z$$

$$\cos^6 z = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2z + \frac{3}{16} \cos 4z + \frac{1}{32} \cos 6z$$

$$\sin^2 z \cos z = \frac{1}{4} \cos z - \frac{1}{4} \cos 3z$$

$$\cos^2 z \sin z = \frac{1}{4} \sin z + \frac{1}{4} \sin 3z$$

(Выражения типа $\cos^2 z \sin z$, $\sin^2 z \cos z$ могут быть получены из вышеприведенных формул для $\sin^3 z$ и $\cos^3 z$ простым дифференцированием).

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

Редакция *Н. А. Ершовой.*

Оформление *В. Ф. Зазульской.*

Сдано в производство 31/III 1935 г. Подписано в печать с матрицы 7/VI 1937 г. Формат бумаги $62 \times 94\frac{1}{16}$. Печатн. листов $32\frac{1}{2}$. Тираж 3 000. Печати. знак. в б. л. 101 00. Глави. ред. техн.-теорет. лит. № 38 Уч.-завт. л. 48,5. Уполн. Главлита № Б-13820 Заказ - 559. Выход в свет июль 1937 г.

Набрано фабрикой книги „Красный Пролетарий“ издательства ЦК ВКП(б) Наргиздата,
Москва, Краснопролетарская, 16

Отпечатано в 3-й тип. ОНТИ. Ленинград, ул. Моисеевско, 10.

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать | По чьей вине |
|------|-------------|--|---|--------------|
| 52 | Формула(65) | $\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t) = -$ $-x_0 \frac{k}{b} e^{-\frac{b}{m} t}$ | $\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t) =$ $= x_0 \frac{k}{b} e^{-\frac{b}{m} t}$ | Тип. |
| 93 | 20 снизу | $= - \int_0^x f(x) dx$ | $= - \int_0^x f(x) dx$ | Ред. |
| 191 | 6 сверху | $(d = 0, \dot{q} < 0)$ | $(q = 0, \dot{q} < 0)$ | Ред. |
| 211 | сверху | $ x_1(t) - x_2(t) <$ | $ x_1(t) - x_2(t) < \varepsilon$ | Ред. |
| 257 | 10 сверху | линии. фазовой плоскости | линии. На фазовой плоскости | Ред. |
| 261 | 5 сверху | $b + \beta(d - S_1) = 0$ | $\lambda b + \beta(d - S_1)$ | Ред. |
| 265 | 2 снизу | $= (a_1 - ib_1)(u + iv)$ | $= (a_1 - ib_1)(u - iv)$ | Ред. |
| 267 | 4 снизу | лежат выше пара- болы | лежат внутри пара- болы | Авт. |
| 279 | 20 сверху | $= - \{ P(x_0, y_0) +$ $+ Q'_y(x_0, y_0) \}$ | $= - \{ P'_x(x_0, y_0) +$ $+ Q'_y(x_0, y_0) \}$ | Ред. |
| 282 | 13 снизу | , а дугой для | , а другой для | Ред. |
| 287 | 15 снизу | $x = x(t)$ | $x = \bar{x}(t)$ | Ред. |
| 326 | 13 снизу | $p(x, y)$ и $q(x, y)$ | не читать | Ред. |
| 340 | 19 сверху | $\varphi(r_0, \lambda) = \dots$ | $\varphi(r_0, \lambda) = \dots = 0$ | Авт. |
| 352 | 7 сверху | $-cV_2 + f(E - e - V_1)$ | $-cV_2 + f(E - e -$ $-V_1) = 0$ | Ред. |